Chương 4

CÁC ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN
VÀ
BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

I. Các định lý giới hạn

1. Luật số lớn

Các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ có kỳ vọng $\mathrm{E}X_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ và được gọi là thỏa mãn luật số lớn nếu với bất kỳ $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + \ldots + EX_n}{n}\right| \le \varepsilon\right] = 1$$

__Luật số lớn Bernoulli__ : Xét mô hình nhị thức với xác suất thành công p. Gọi X_i là số lần xuất hiện thành công trong phép thử thứ i. Khi đó X_1 , X_2 , ... thỏa mãn luật số lớn $(\varepsilon > 0)$:

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left| f_n - p \right| \leq \varepsilon \right] = 1 \qquad (1)$$

Trong đó,

$$f_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện thành công trong n phép thử.

Do $X_i \sim B(1, p)$ nên $EX_i = p$, $i = 1, 2, \ldots$ vì vậy

$$\frac{EX_1 + \ldots + EX_n}{n} = \frac{np}{n} = p$$

Nếu (1) thỏa mãn ta nói tần suất f_n hội tụ đến p theo xác suất và ký hiệu

$$f_n \xrightarrow{P} p$$

Ứng dụng thực tế : Để xác định xác suất p của sự kiện A trong một phép thử nào đó, người ta lặp lại phép thử một số lớn lần độc lập với nhau. Sau đó lấy tần suất làm xấp xỉ cho p

$$f_n \approx p$$

2. Định lý giới hạn trung tâm (ĐLGHTT)

Các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots$ với kỳ vọng và phương sai hữu hạn, được gọi là thỏa mãn ĐLGHTT nếu

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le x\right] = \Phi(x) \qquad (2)$$

Trong đó $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ và $\Phi(x)$ là hàm phân phối của luật chuẩn tắc $N(0, 1)$.

Nếu đặt

$$F_n(x) = P\left[\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le x\right]$$

là hàm phân phối của $S'_n = \dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$

thì (2) có dạng

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

Định lý giới hạn trung tâm Moivre -Laplace

Xét mô hình Nhị thức với xác suất thành công p, X_i là số lần xuất hiện thành công trong phép thử thứ i. Khi đó X_1, X_2 , ... thỏa mãn ĐLGHTT :

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right] = \Phi(x)$$

Trong đó $X = X_1 + ... + X_n$ là số lần xuất hiện thành công trong *n* phép thử và $X \sim B(n, p)$, $EX = np$, $DX = npq$.

Như vậy với một số lớn phép thử Bernoulli độc lập thì chuẩn hóa của biến ngẫu nhiên chỉ số lần thành công là biến ngẫu nhiên có phân phối Nhị thức sẽ có phân phối xấp xỉ chuẩn tắc.

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

Hay $X \sim N(np, npq)$.

<u>Công thức xấp xỉ</u> : Cho $X \sim B(n, p)$ với n lớn.

Khi đó $X \sim N(np, npq)$ và từ đó

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

3. Định lý giới hạn địa phương (ĐLGHĐP) Moivre – Laplace :

Xét mô hình Nhị thức với xác suất thành công p,

X_i là số lần xuất hiện thành công trong phép thử

thứ i. Khi đó X_1, X_2 , ... thỏa mãn ĐLGHĐP :

$$\lim_{n \to \infty} \left[P(X = k) - \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \right] = 0$$

Với $X = X_1 + ... + X_n$, $X \sim B(n, p)$.

Công thức xấp xỉ : Cho $X \sim B(n, p)$ với n lớn.

Khi đó

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

II. Véc tơ ngẫu nhiên

1. Bảng phân phối đồng thời của véc tơ rời rạc (X,Y)

$X \backslash Y$	y_1	....	y_n	
x_1	p_{11}	....	p_{1n}	$p_{1.}$
....	....	....	....	....
x_m	p_{m1}	....	p_{mn}	$p_{m.}$
	$p_{.1}$	....	$p_{.n}$	1

Trong đó $p_{ij} = P(X = x_i\ ;\ Y = y_j\ )$.

Các xác suất lề :

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(X = x_i)$$

$$p_{.j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = P(Y = y_j)$$

Các bảng phân phối lề :

X	x_1	...	x_m
P	$p_{1.}$	...	$p_{m.}$

Y	y_1	...	y_n
P	$p_{.1}$	...	$p_{.n}$

2. Phân phối có điều kiện

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i ; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i ; Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

3. Hàm phân phối đồng thời

$$F(x, y) = P(X \le x ; Y \le y)$$

Tính chất

1) $0 \le F(x, y) \le 1$

2) $\lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F_X(x) = P(X \leq x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$

4) $F(x, y)$ *là hàm không giảm*

$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \quad , \quad x_1 < x_2$

$F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \quad , \quad y_1 < y_2$

5) $P(a < X \leq b\,;\ c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) -$

$- F(b, c) + F(a, c)$

4. Hàm mật độ đồng thời

Nếu hàm phân phối đồng thời của véc tơ (X,Y) có thể biểu diễn dưới dạng

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

khi đó $f(x,y)$ được gọi là hàm mật độ đồng thời của (X,Y).

Tính chất

1) $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geq 0$

2) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial_x \partial_y}$ tại những điểm liên tục của $f(x,y)$.

3) $\iint_{R^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

4) $P\left((X,Y)\in A\right) = \iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy$

với A là tập hợp trên $\mathbb{R}^2$.

5) $P\left(a \le X \le b;\ c \le Y \le d\right) = \int\limits_{c}^{d}\left[\int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx\right]dy$

5. Hàm mật độ lề :

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

6. Hàm mật độ có điều kiện

$$f_{X/Y=y_0}(x) = f(x/y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = f(x_0/y) = \frac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$

7. Tính độc lập ngẫu nhiên

- Rời rạc : Cho véc tơ (X, Y), biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập nếu

$$P(X = x_i ; Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$$

- Liên tục : Cho véc tơ (X, Y) với mật độ đồng thời $f(x, y)$, biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập nếu

$$f(x, y) = f_X(x) \,.\, f_Y(y)$$

8. Kỳ vọng và phương sai

1) Kỳ vọng

- Rời rạc :

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i.} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$$

$$EY = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{.j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$$

- Liên tục :

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

2) Phương sai

- Rời rạc :

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_{i.} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - EX)^2 p_{ij}$$

$$DY = \sum_{j=1}^{m} (y_j - EY)^2 p_{.j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - EY)^2 p_{ij}$$

- Liên tục:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$DY = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - EY)^2 f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - EY)^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

9. Hiệp phương sai

$$Cov(X, Y) = E(X-EX)(Y-EY) = E(XY) - EX.EY$$

- Rời rạc :

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - EX)(y_i - EY)p_{ij}$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}$$

- Liên tục:

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - EX)(y - EY)f(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dx\,dy$$

Tính chất

1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

2) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$

3) $Cov(kX, Y) = Cov(X, kY) = k\, Cov(X, Y)$

4) $Cov(X, X) = DX$

5) $\left|Cov(X, Y)\right| \leq \sqrt{DX.DY}$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

6) $[Cov(X, Y)]^2 \leq EX^2 . EY^2$

10. Hệ số tương quan

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX.DY}}$$

Tính chất

1) $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.
2) Nếu X và Y độc lập thì $\rho_{XY} = 0$.
3) $|\rho_{XY}| = 1$ khi và chỉ khi $Y = aX + b$ với hằng số a và b (có thể ngoại trừ một tập hợp có xác suất 0).

Khi $\rho_{XY} > 0$, Y có xu hướng tăng cùng với X.

Khi $\rho_{XY} < 0$, Y có xu hướng giảm cùng với X.