Chương 0

GiẢI TÍCH KẾT HỢP

I. Các khái niệm cơ bản

Bài toán của giải tích kết hợp

Từ tập hợp $\{ a_1, ..., a_n \}$ lập các nhóm gồm k phần tử, gọi là nhóm cỡ k, với điều kiện nào đó và tính số các nhóm được tạo thành.

Thí dụ: Từ tập hợp {1, 2, 3} lập các nhóm cỡ 2.

Giải:

12	12 21	12 21 11	12 11
13	13 31	13 31 22	13 22
23	23 32	23 32 33	23 33
3 nhóm	6 nhóm	9 nhóm	6 nhóm

Qui tắc nhân

Nếu công việc 1 có n_1 cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n_2 cách thực hiện công việc 2 thì có $n_1 \times n_2$ cách thực hiện "công việc 1 rồi công việc 2" . . .

Thí dụ: Từ các số {0, 1, 2, 3, 4} lập các số 3 chữ số.

Giải:

CV1: chọn hàng trăm, n_1= 4 cách

CV2: chọn hàng chục, n_2= 5 cách

CV3: chọn hàng đơn vị, n_3= 5 cách

Cả thảy có: 4. 5 .5 = 100 số 3 chữ số.

Qui tắc cộng

Nếu công việc 1 có n_1 cách thực hiện, công việc 2 có n_2 cách thực hiện và các cách thực hiện công việc 1 không trùng với bất kỳ cách thực hiện công việc 2 nào thì có $n_1 + n_2$ cách thực hiện "công việc 1 hoặc công việc 2" . . .

Thí dụ: Từ các số {0, 1, 2, 3, 4} lập các số chẵn gồm 3 chữ số khác nhau.

Giải: ∗TH1- hàng trăm lẻ

CV1: chọn hàng trăm lẻ, n_1= 2 cách (1,3)

CV2: chọn hàng đơn vị chẵn, n_2= 3 cách (0,2,4)

CV3: chọn hàng chục, n_3= 3 cách

Có: 2. 3 .3 = 18 số.

∗TH2- hàng trăm chẵn

CV1: chọn hàng trăm chẵn, n_1= 2 cách (2,4)

CV2: chọn hàng đơn vị chẵn, n_2= 2 cách

CV3: chọn hàng chục, n_3= 3 cách

Có: 2. 2 .3 = 12 số.

Theo qui tắc cộng cả thảy có 18+12=30 số.

Nhóm không thứ tự

Khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của nhóm này ta không nhận được nhóm khác.

Thí dụ: $12 \equiv 21$

Nhóm có thứ tự

Khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của nhóm này ta nhận được nhóm khác.

Thí dụ: $12 \neq 21$

- Nhóm không lặp

Các phần tử của nhóm chỉ có mặt một lần trong nhóm.

Phương pháp lấy mẫu không hoàn lại

Lấy phần tử thứ nhất của nhóm từ tập ban đầu,
ghi nhận, sau đó bỏ phần tử này ra ngoài…
Cứ như vậy cho đến khi đủ cỡ nhóm.

- Nhóm có lặp

Các phần tử của nhóm có thể có mặt nhiều lần trong nhóm.

Phương pháp lấy mẫu có hoàn lại

Lấy phần tử thứ nhất của nhóm từ tập ban đầu,
ghi nhận, sau đó bỏ phần tử này trở lại tập đã cho…
Cứ như vậy cho đến khi đủ cỡ nhóm.

II. Các công thức thường dùng

1. <u>Chỉnh hợp</u> chập k từ n phần tử là nhóm không lặp, có thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp :

$$A_n^k = n(n-1)\ldots[n-(k-1)]$$

Từ {1, 2, 3} có các chỉnh hợp:

12 21

13 31

23 32

Thí dụ: Có 10 đội bóng đá, đấu vòng tròn 2 lượt. Có bao nhiêu trận?

Giải:

Một trận = một nhóm cỡ 2 từ 10 phần tử

+ Không lặp

+ Có thứ tự

= Chỉnh hợp

Số trận = $A_{10}^{2} = 10.9 = 90$

A – B 18/1

B – A 25/1

2. Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là nhóm có lặp, có thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp lặp :

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

Từ {1, 2, 3} có các chỉnh hợp lặp:

12 21 11

13 31 22

23 32 33

Thí dụ: Có 256 mã ASCII của hệ máy tính 8 bits. Tại sao?

Giải:

Một mã = một nhóm cỡ 8 từ 2 phần tử {0, 1}

+ Có lặp

+ Có thứ tự

= Chỉnh hợp lặp

Số mã = $\tilde{A}_2^8 = 2^8 = 256$

1	0	1	0	1	0	1	0

3. <u>Hoán vị</u> của n phần tử là nhóm có thứ tự gồm đủ mặt n phần tử đã cho.

Số hoán vị:

$$P_n = n!$$

Chú ý: Một hoán vị là một chỉnh hợp chập n từ n phần tử. Vì vậy

$$P_n = A_n^n = n!$$

Thí dụ: Xếp 3 sinh viên ngồi một bàn dài. Số cách?

Giải:

Một cách xếp= một nhóm đủ mặt 3 phần tử

+ Có thứ tự

= Hoán vị

Số cách xếp = $P_3 = 3! = 6$

123	213	312
132	231	321

4. <u>Tổ hợp</u> chập k từ n phần tử là nhóm không lặp, không thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \qquad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2)$$

Thí dụ: Có 10 đội bóng đá, đấu vòng tròn 1 lượt. Có bao nhiêu trận?

Giải:

Một trận = một nhóm cỡ 2 từ 10 phần tử

+ Không lặp

+ Không thứ tự

= Tổ hợp

Số trận = $C_{10}^{2} = \frac{A_{10}^{2}}{2!} = \frac{10.9}{2} = 45$

A – B (Hay B – A) 18/1

5. <u>Tổ hợp lặp</u> chập k từ n phần tử là nhóm có lặp, không thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp lặp :

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Từ {1, 2, 3} có các tổ hợp lặp:

12	11
13	22
23	33

Thí dụ: Phát 2 học bổng giống nhau cho 3 sinh viên. Có bao nhiêu cách?

Giải:

Một cách = một nhóm cỡ 2 từ 3 phần tử

+ Có lặp

+ Không thứ tự

= Tổ hợp lặp

Số cách phát = $\tilde{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$

12 13 23

11 22 33

III. Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Thí dụ :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^0 b^{2-0} + C_2^1 a^1 b^{2-1} + C_2^2 a^2 b^{2-2}$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$