CHUỖI SỐ

Khái niệm

cho nên chuỗi hội tụ và $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

b) $a_n=1, S_n=n$ tiến tới ∞ . Vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là phân kỳ.

TÍNH CHẤT

- Mệnh đề 1:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì chuỗi tổng* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *là hội tụ và*

$$\sum_{n-1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *thì với mọi số* α*, chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \ \ a_n$ *cũng hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \ \ a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

- Mệnh đề 2: *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chú ý Từ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ chưa thể suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Thí dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, mặc dù $a_n = \frac{1}{n}$ là hội tụ đến 0.

CÁC DẤU HIỆU HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ

Tiêu chuẩn so sánh 1

Hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ thoả điều kiện $0 \le a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$

1) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.

CÁC DẤU HIÊU HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (1) , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (2) thoả $0 < a_n < b_n, \forall n \geq n_0$

$$K = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1) $K = 0$: Nếu chuỗi (2) hội tụ, thì chuỗi (1) hội tụ.

2) K hữu hạn, $\neq 0$: Chuỗi (1) và (2) cùng HT hoặc cùng PK

3) $K = +\infty$: Nếu chuỗi (1) HT, thì chuỗi (2) HT.

Chú ý: trong thực hành, một số chuỗi quen thuộc sau sẽ được dung để so sánh:

1) Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n\geqslant 0} aq^n$, $a \neq 0$ hội tụ khi $0 \leqslant q < 1$ và phân kỳ khi $q \geqslant 1$.

2) Chuỗi Dirichlet: $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leqslant 1$.

Thí dụ Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^{2n}}$ hội tụ.

HD: So sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Tiêu chuẩn d'Alembert

Chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$

1) $D < 1$: chuỗi hội tụ. 2) $D > 1$: chuỗi phân kỳ.

3) $D = 1$: không kết luận được, chuỗi có thể HT, hoặc PK.

Tiêu chuẩn Cô si

Chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$

1) $C < 1$: chuỗi hội tụ.

2) $C > 1$: chuỗi phân kỳ.

3) $C = 1$: không kết luận được, chuỗi có thể HT, hoặc PK.

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3}{(1+1/n)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{e} > 1$$ Phân kỳ

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3} \cdot \sqrt[n]{n^5} = \frac{3}{4} < 1$$ HT theo t/c Cô si.

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n-4)}$$

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3(n+1)-1)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5(n+1)-4)} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n+1)}$$

$$= \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n-4)(5n+1)} = a_n \cdot \frac{(3n+2)}{(5n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1$$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

II. Chuỗi có dấu tuỳ ý. Hội tụ tuyệt đối.

Định nghĩa hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ

Định lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

Theo định lý: chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Mệnh đề ngược lại không đúng: có những chuỗi hội tụ, tuy nhiên chuỗi của trị tuyệt đối không hội tụ.

Thí dụ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ không tuyệt đối vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$

Chuỗi có dấu tuỳ ý. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là chuỗi dương

$$|a_n| = \frac{(2n+3)|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \le \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \cong \frac{2n}{n^{7/3}} = \frac{2}{n^{4/3}} \Rightarrow$$

Hội tụ tuyệt đối

II. Chuỗi đan dấu. Tiêu chuẩn Leibnitz.

Định nghĩa chuỗi đan dấu

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, $\forall n, a_n \geq 0$ hoặc $\forall n, a_n \leq 0$ gọi là chuỗi đan dấu.

Định nghĩa chuỗi Leibnitz

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ gọi là chuỗi Leibnitz, nếu:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy giảm.

II. Chuỗi đan dấu. Tiêu chuẩn Leibnitz.

Định lý (Leibnitz)

Chuỗi Leibnitz hội tụ. Tổng của chuỗi này thoả $0 \leq |S| \leq a_1$

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Chuỗi không hội tụ tuyệt đối. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)_{n=1}^{\infty}$ là dãy giảm. Đây là chuỗi Leibnitz và hội tụ.

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0.$ $\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ dãy giảm (có thể k/s đạo hàm)

Chuỗi Leibnitz nên hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibnitz)

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Khái niệm hàm số:

Cho X và Y là hai tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$.

Phép ứng f từ X vào Y được gọi là hàm số trên X.

Ta viết $y = f(x)$ có nghĩa y là giá trị (trong Y) ứng với x (trong X).

Người ta gọi x là *biến độc lập* (hay *đối số*) và y là *biến phụ thuộc* hay *giá trị* của hàm số f tại x.

Tập X được gọi là *miền xác định* của hàm số f.

Tập $R_f := \{y \in Y / \exists x \in X : f(x) = y\}$ được gọi là *miền giá trị* (hay *tập ảnh*) của hàm f.

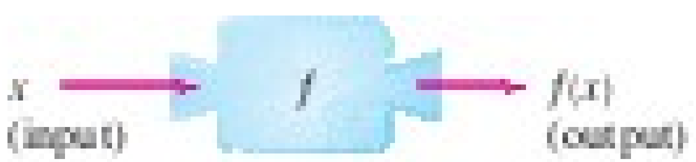


FIGURE 2
Machine diagram for a function f

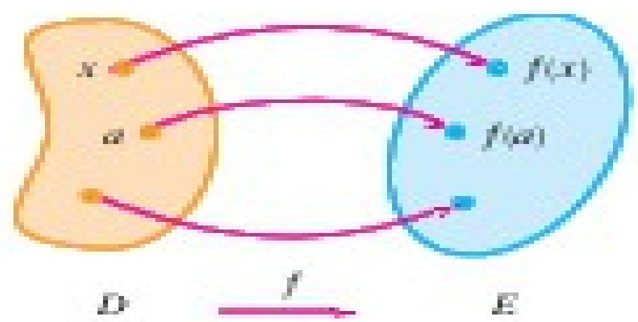


FIGURE 3
Arrow diagram for f

Các phương pháp biểu diễn hàm số

- 1. Phương pháp giải tích
- 2. Phương pháp bảng
- 3. Phương pháp đồ thị
- 4. Phương pháp vẽ đồ thị

Các phép toán trên hàm số

Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên tập X.

1. f=g nếu f(x)=g(x) với mọi x thuộc X.
2. $f \neq g$ nếu tồn tại $x_0 \in X$ mà $f(x_0) \neq g(x_0)$.

- f lớn hơn (nhỏ hơn) g nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in X$.

3.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x);$$

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x);$$

$$(f.g)(x) := f(x).\ g(x);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{khi } g(x) \neq 0)$$

Định nghĩa (hàm hợp)

Cho hai hàm $g: X \to Y; f: Y \to Z$.

Khi đó tồn tại hàm hợp $f \circ g: X \to Z$.

$$h = f \circ g = f(g(x))$$

Ví dụ. $g(x) = x - 3;\ f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

cần lưu ý rằng nói chung $g \circ f \neq f \circ g$.

Ví dụ.

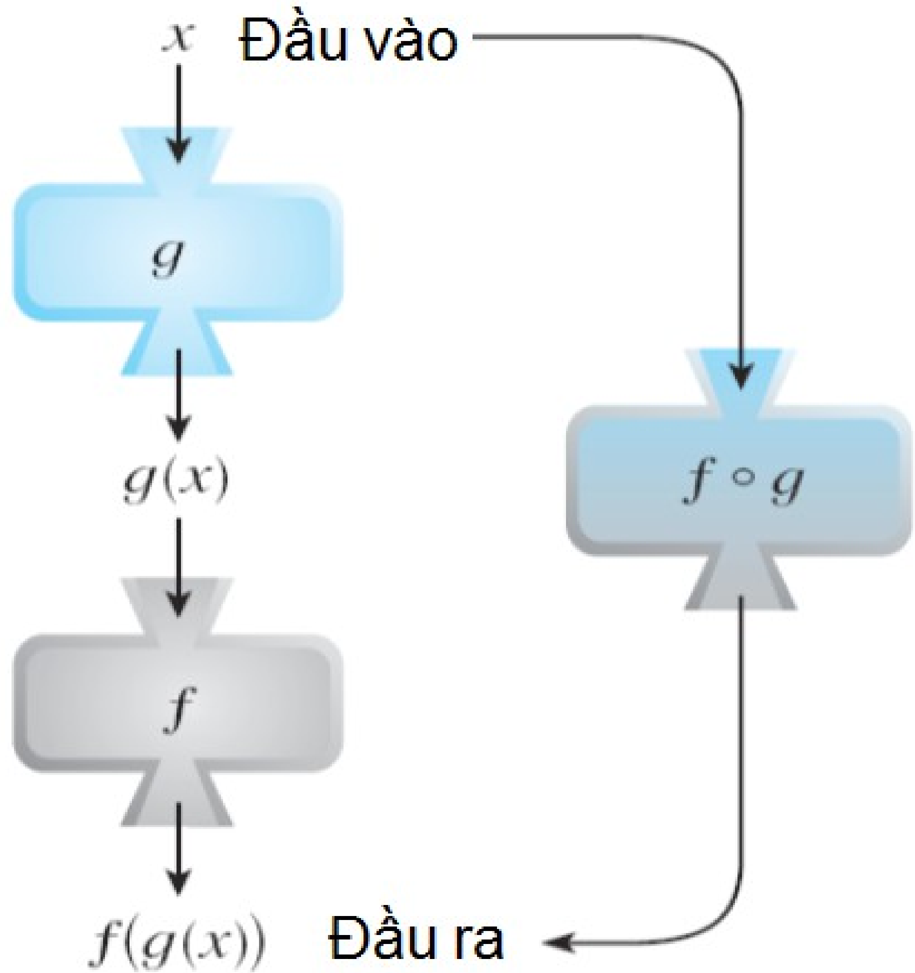
Cho $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\sqrt{2-x}$. Tìm các hàm sau và miền xác định của nó: $a)\ f\circ g$; $\mathrm{b)}\ g\circ f$; $\mathrm{c)}\ f\circ f$; $\mathrm{d)}\ g\circ g$.

$$a)\ f\circ g(x)=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x} \qquad \Rightarrow D_{f\circ g}=(-\infty,2]$$

$$b)\ g\circ f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}} \qquad \Rightarrow D_{g\circ f}=[0,4]$$

$$c)\ f\circ f(x)=\sqrt[4]{x} \qquad \Rightarrow D_{f\circ f}=[0,+\infty)$$

$$d)\ g\circ g(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}} \qquad \Rightarrow D_{g\circ g}=[-2,2]$$


x
Đầu vào
g
g(x)
f
f(g(x))
Đầu ra
f ∘ g

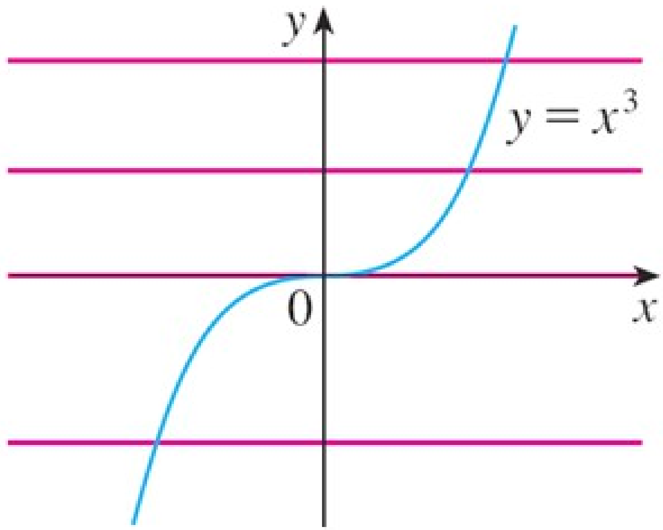
Định nghĩa (hàm 1 – 1)

Hàm $y = f(x)$ được gọi là hàm 1 – 1, nếu $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$

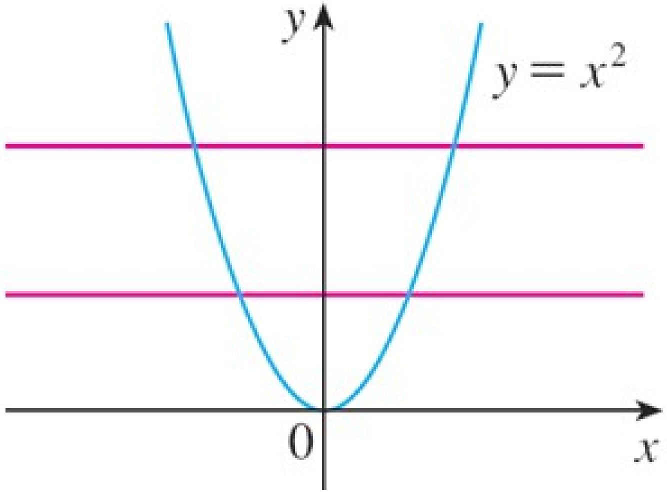
thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Hàm $y = f(x)$ là hàm 1 – 1 khi và chỉ khi không tồn tai đường thẳng nằm ngang cắt đồ thi nhiều hơn môt điểm.

Ví dụ.



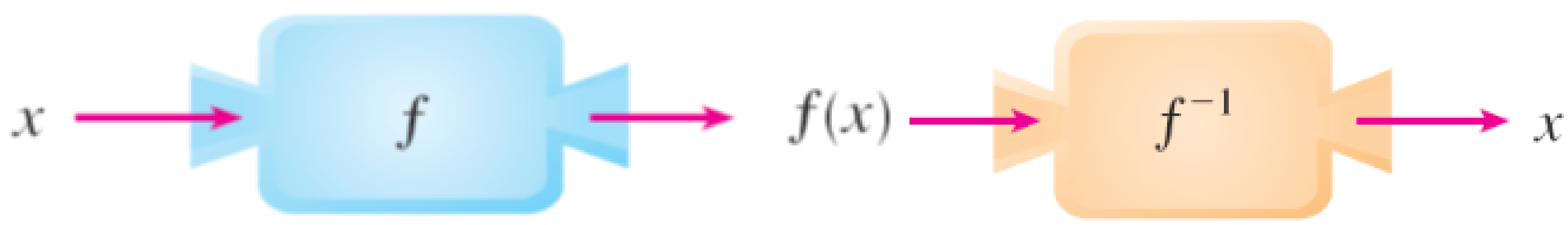
Hàm 1 – 1



Không là hàm 1 – 1

Định nghĩa (hàm ngược)

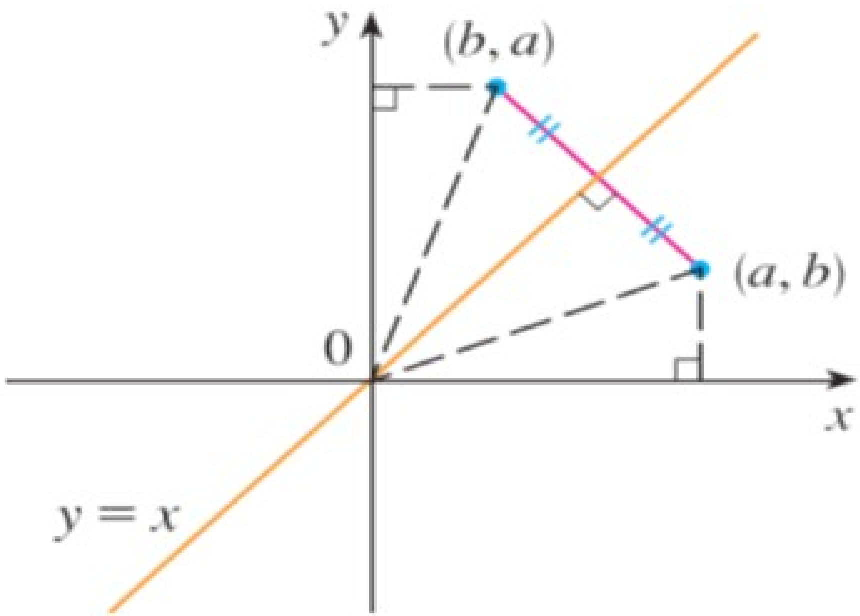
Cho $y = f(x)$ là hàm 1 – 1 với miền xác định D và miền giá trị E. Hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm từ E vào D, ký hiệu $x = f^{-1}(y)$, xác định bởi $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

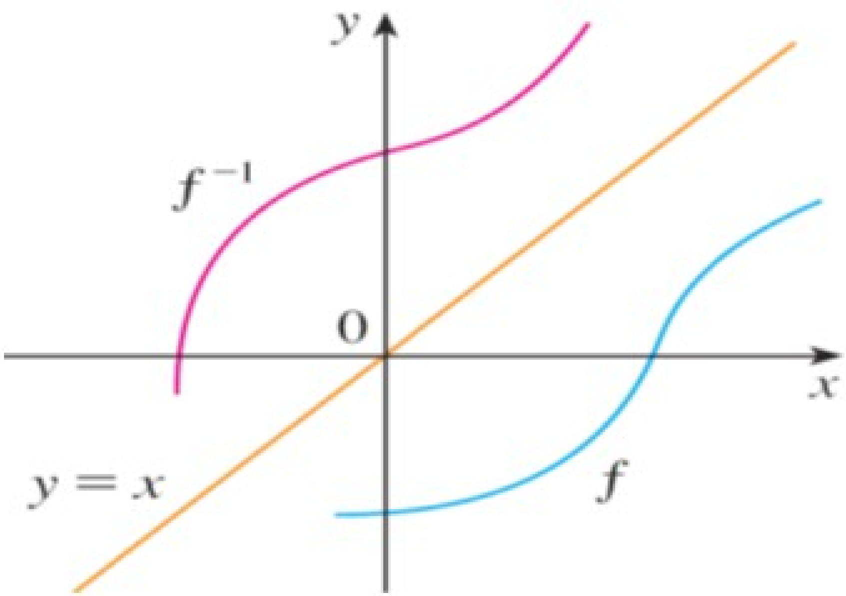


Chú ý:

Vì $a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$, nên (a,b) thuộc đồ thị $y = f(x)$

khi và chỉ khi (b,a) thuộc đồ thị của f^{-1}





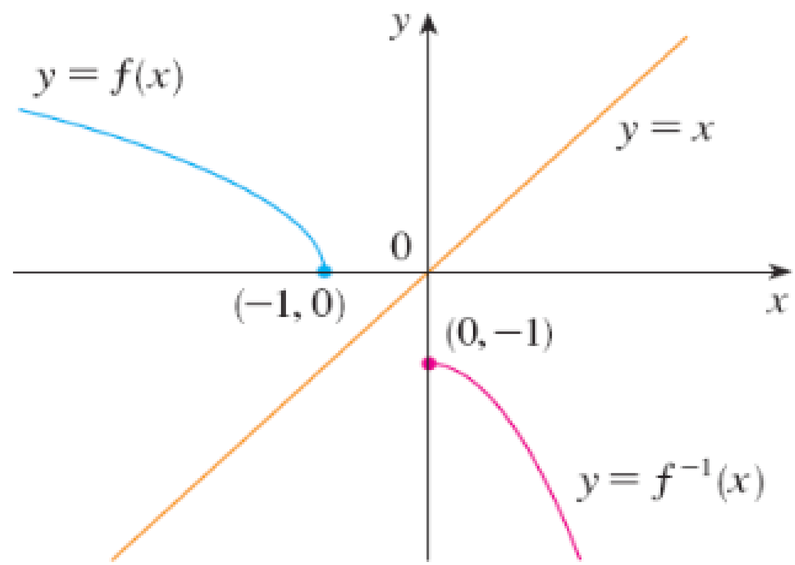
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{for every } x \text{ in } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{for every } x \text{ in } B$$

Đồ thị $y = f(x)$ và đồ thị của f^{-1} đối xứng nhau qua qua đường thẳng y = x.

Ví dụ. Vẽ đồ thị của

Vẽ đồ thị của $y = \sqrt{-x-1}$

và đồ thị hàm ngược.



Các hàm sơ cấp thường gặp

1. Hàm đa thức $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$
2. *Hàm phân thức*

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{n-1}x + b_m}$$

là thương của hai hàm đa thức.

3. Hàm lũy thừa: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

4. Hàm mũ $y = a^x$ với cơ số a bất kỳ $(a \geq 0, a \neq 1)$

5. Hàm lôgarit: $y = \ln(x)$

2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa.

Cho D là tập số thực. Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của tập D nếu trong mọi khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ đều chứa vô số các phần tử của tập D.

Ví dụ. D = (0,1) Điểm tụ của D là [0,1]

$$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$$

D có duy nhất một điểm tụ là 0

2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa. (ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$)

Cho x_0 là điểm tụ của miền xác định.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

Chú ý:

Trong định nghĩa không đòi hỏi là *f*(*x*) phải xác định tại x_0

Ví dụ. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ mặc dù hàm không xác định tại $x = 0$.

2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$$

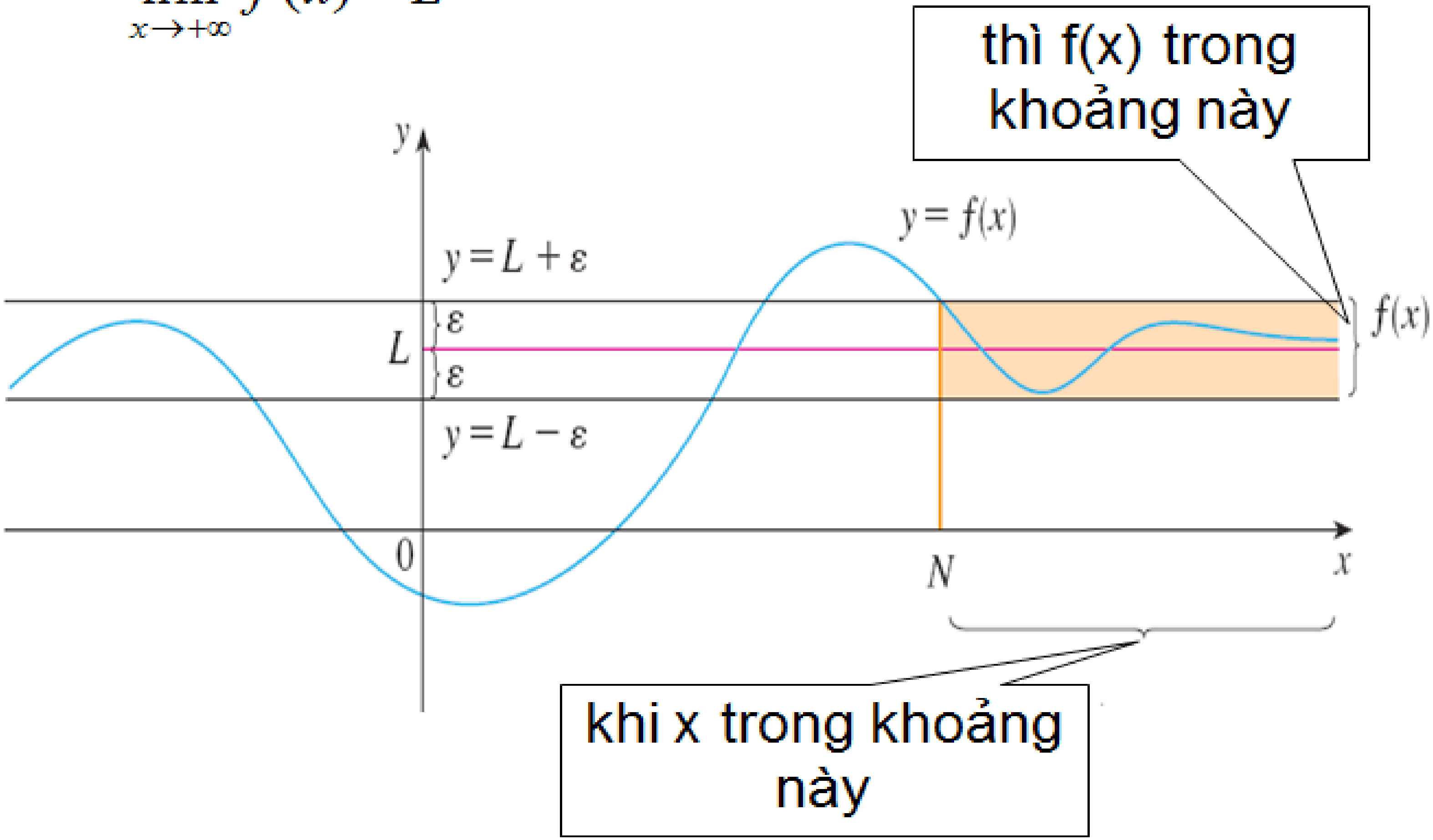
$$\forall x \in D_f, x > A \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

Định nghĩa.

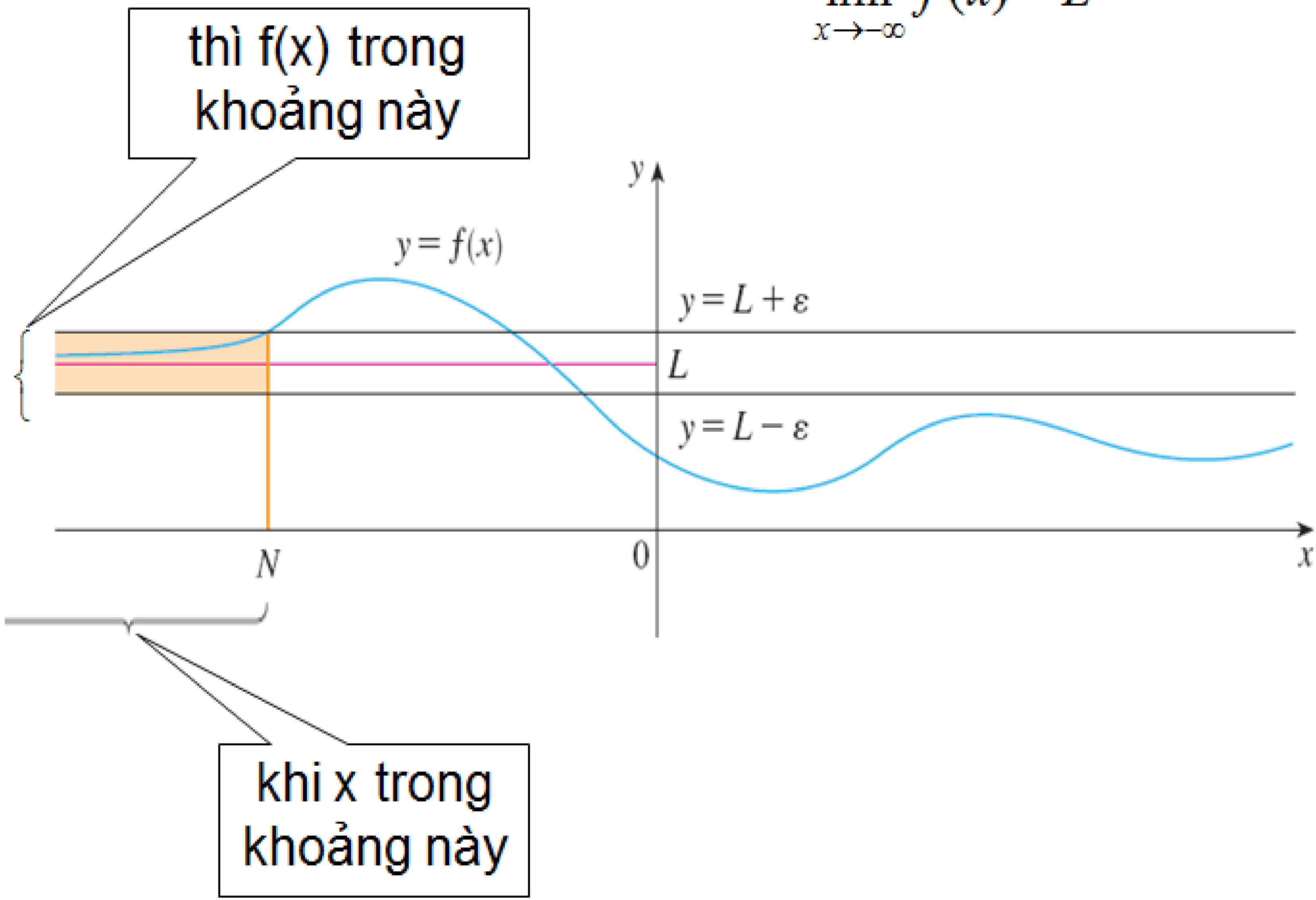
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B < 0$$

$$\forall x \in D_f, x < B \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, | x - x_0 | < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Định nghĩa.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \forall M < 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, | x - x_0 | < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa. (ngôn ngữ dãy)

Cho x_0 là điểm tụ của miền xác định.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, \quad x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_o$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Chú ý: Thường dùng định nghĩa này chứng tỏ hàm không có giới hạn.

Nếu tìm được hai dãy $(x_n), (x_n') \to x_0$ mà $f(x_n), f(x_n')$ hội tụ về hai số khác nhau thì hàm không có giới hạn.

2. Giới hạn của hàm số

Ví dụ. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

Chọn dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \to 0$

Chọn dãy $x'_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\Rightarrow f(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$$

Suy ra không tồn tại giới hạn

Tính chất của giới hạn hàm số

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=b$$

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f)=\alpha a,\quad \alpha\in \mathrm{R}$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)=a+b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)=a\cdot b$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=\dfrac{a}{b},\quad b\neq 0$

5) $\left(\forall x\in V_\varepsilon(x_0), f(x)\le g(x)\right)\Rightarrow a\le b$

6) $\begin{cases} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f=\lim\limits_{x\to x_0} h=a \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$

Mệnh đề

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = a^b$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln\left(u(x)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln(u(x))}$$

$$= e^{b\ln a} = a^b.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \to 0$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=\dfrac{1}{e}$

Các giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \to +\infty$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty, \quad a > 1$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ không tồn tại

Các dạng vô định

1) $\dfrac{0}{0}$

2) $\dfrac{\infty}{\infty}$

3) $0 \cdot \infty$

4) $\infty - \infty$

5) 1^{∞}

6) 0^{0}

7) ∞^{0}

Định nghĩa. (giới hạn trái)

Số a gọi là giới hạn trái của $y = f(x)$ tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

Định nghĩa. (giới hạn phải)

Số a gọi là giới hạn trái của $y = f(x)$ tại điểm x_0, nếu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon.$$

ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

Ví dụ

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=+\infty$$

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Không tồn tại $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$

Vì $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

và $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$

Định lý.

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái và giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý

Dùng định lý trên để chứng tỏ hàm không có giới hạn.

Hàm số liên tục

Giả sử hàm f xác định trên một đoạn chứa x_0.

<u>Định nghĩa</u> *Hàm f được gọi là <u>liên tục</u> tại điểm x_0 nếu:*

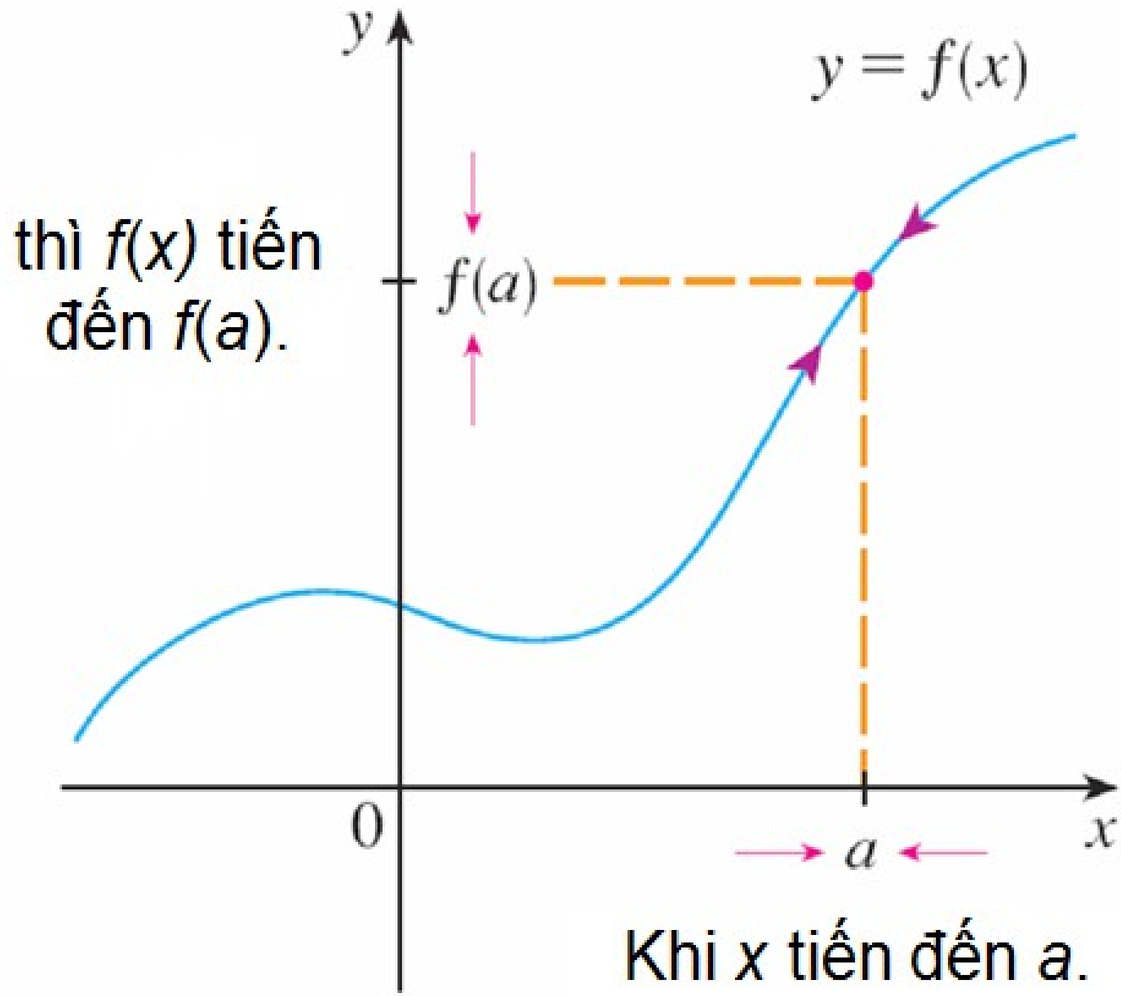
1) *Tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Một định nghĩa tương đương:

Hàm f được gọi là <u>liên tục</u> tại x_0 nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ tiến tới x_0 ta đều có $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$.

Nếu hàm không liên tục tại x_0, ta nói hàm gián đoạn tại điểm này.



đồ thị liền nét (không đứt đoạn) tại điểm (a, $f(a)$).

Theo *ngôn ngữ* $\varepsilon - \delta$ thì

Hàm f được gọi là __liên tục__ tại x_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi x: $|x-a| < \delta$ *ta có* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hàm f được gọi là __liên tục phải__ __(liên tục trái)__ tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)).$$

Mệnh đề *Hàm f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại đó. Khi ấy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x).$$

Điểm gián đoạn:

Những điểm mà tại đó hàm số không liên tục (tức là giới hạn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *không tồn tại hoặc giới hạn đó tồn tại nhưng không bằng* $f(x_0)$ *) được gọi là điểm gián đoạn của* f.

Tương tự ta có thể định nghĩa điểm gián đoạn trái và gián đoạn phải.

Định nghĩa

Cho x_0 là điểm gián đoạn của đồ thị hàm số $y = f(x)$

1) Điểm gián đoạn loại một:

giới hạn trái $f(x_{o-})$ và phải $f(x_{o+})$ tồn tại và hữu hạn.

x_0 là điểm khử được: $f(x_{o-}) = f(x_{o+})$

x_0 là điểm nhảy: $f(x_{0+}) \neq f(x_{0-})$

bước nhảy: $h = f(x_{0+}) - f(x_{0-})$

2) Điểm gián đoạn loại hai: không phải là loại một.

Một trong hai giới hạn (trái hoặc phải) không tồn tại hoặc tồn tại nhưng bằng vô cùng.

Tính chất của hàm số liên tục

Cho $y = f(x), y = g(x)$ là hai hàm liên tục tại x_0, khi đó

1) $\alpha f(x);\ f(x)+g(x);\ f(x)\cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

2) Nếu $g(x_0) \neq 0$, thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.

Định lý

Nếu hàm $f(x)$ liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$, thì tồn tại một lân cận của x_0, sao cho $f(x) > 0$ với mọi x thuộc lân cận này.

Định lý (Bozano- Côsi)

Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a) = A$, $f(b) = B$

thì $\forall C \in [A,B]$ tồn tại $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = C$.

Hệ quả

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì

tồn tại ít nhất một x_0 thuộc [a,b] sao cho $f(x_0) = 0$.

Ví dụ Khảo sát tính liên tục

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$\forall x\neq 0, f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên MXĐ

Tại x = 0: $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=f(0)$

Hàm liên tục tại x = 0. Vậy hàm liên tục trên R.

Ví dụ Khảo sát tính liên tục

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$\forall x\neq 0, f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên MXĐ

Tại x = 0: $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$

HÀM LIÊN TỤC ĐỀU

Hàm số được gọi là <u>liên tục đều</u> trên tập $X \subset R$ nếu như với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in X, \quad |x - y| \le \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad .$$

Nhận xét Nếu hàm là *liên tục đều* trên tập X thì nó *liên tục* tại mọi điểm trên tập đó (vì trong định nghĩa trên ta cố định điểm x thì sẽ suy ra ngay hàm liên tục tại điểm này).

Định lý (Cantor) *Hàm liên tục trên đoạn thì cũng liên tục đều trên đoạn đó.*

Hệ quả (Weierstrass 1) *Hàm liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì bị chặn trong đoạn đó.*

Hệ quả (Weierstrass 2) *Hàm liên tục trên đoạn thì đạt được các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (tại những điểm nằm trên đoạn đó).*

Chú ý Các định lý trên sẽ không còn đúng nếu ta thay *đoạn* $[a,b]$ bằng *khoảng* (a,b). Thật vậy, hàm $y=\dfrac{1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0,1)$ nhưng nó không bị chặn và không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng này.

Đạo hàm

I. Đạo hàm

Định nghĩa (đạo hàm)

Hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f'(x_0)$ được gọi là đạo hàm của f tại điểm x_0.

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm $f(x) = \cos x$ tại điểm x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin(x_0)$$

Ví dụ

Tìm $f'(0)$, biết $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin(1/\Delta x)-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=0$$ (bị chặn x vô cùng bé)

Định nghĩa (đạo hàm phải)

Hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0.

$$f_+'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f'_+(x_0)$ được gọi là đạo hàm phải của f tại điểm x_0.

Định nghĩa (đạo hàm trái)

Hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0.

$$f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f'_-(x_0)$ được gọi là đạo hàm trái của f tại điểm x_0.

Định lý

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0, khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại điểm x_0 và hai đạo hàm này bằng nhau.

Định nghĩa (đạo hàm vô cùng)

Nếu $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, thì ta nói hàm có đạo hàm vô cùng tại điểm x_0.

Ví dụ

Tìm $f'(x)$, biết $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 0 \\ 2x + 3, & x < 0 \end{cases}$$

Tại điểm x = 0: $f'_+(0) = -3; f'_-(0) = 3$

Đạo hàm trái và đạo hàm phải không bằng nhau, suy ra không tồn tại đạo hàm tại x = 0.

Ví dụ

Tìm $f'_+(0); f'_-(0)$, biết $f(x) = |\sin 2x|$

Đạo hàm trái và đạo hàm phải không bằng nhau, nên đạo hàm tại $x = 0$ không tồn tại.

Ví dụ

Tìm $f'(x)$, biết $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Ví dụ

Tìm $f'(x)$, biết $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} = 0$$

Công thức tính đạo hàm

Qui tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp.

1. $(\alpha u)' = \alpha u'$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4. $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

Đạo hàm của hàm hợp

$$f = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Đạo hàm

1. $(a)' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(e^{x})' = e^{x}$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

hàm hợp

2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
3. $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
4. $(\sin u)' = \cos(u) \cdot u'$
5. $(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
7. $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
8. $(\cot u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$

Đạo hàm của hàm ngược.

Hàm y = f(x) là hàm 1-1 có hàm ngược x = g(y).

Nếu f(x) có đạo hàm hữu hạn khác không tại x_0, thì hàm

g(y) sẽ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

Ví dụ

Tìm đạo hàm hàm ngược của hàm $f(x) = x + x^3$

f(x) là hàm 1-1 trên R, đạo hàm $f'(x) = 1 + 3x^2 \neq 0, \forall x$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1+3x^2}$$

Ví dụ

Tìm $y'(x)$, biết $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

x = sinh(y) là hàm 1-1, đạo hàm $x'(y) = 1/\cosh y \neq 0, \forall y$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Mệnh đề *Nếu* f *có* ***đạo hàm*** *tại điểm* x_0 *thì nó* ***liên tục*** *tại* x_0.

III. Các định lý về giá trị trung bình

Nêu lên mối liên hệ giữa hàm y = f(x) và đạo hàm $f'(x)$.

Định lý Fermat

Hàm y = f(x) xác định trong lân cận của điểm x_0 và đạt cực trị tại đó. Nếu tồn tại đạo hàm $f'(x_0)$, thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Rolle

Cho hàm y = f(x).

1) Liên tục trên đoạn [*a*,*b*]
2) Có đạo hàm trong khoảng (*a*,*b*)
3) f (*a*) = f(*b*)

$\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$

III. Các định lý về giá trị trung bình

Định lý Lagrange Cho hàm y = f(x).

1) Liên tục trên đoạn $[a,b]$

2) Có đạo hàm trong khoảng (a,b)

$$\exists c \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Định lý Cauchy Cho hai hàm y = f(x) và y = g(x).

1) Liên tục trên đoạn $[a,b]$

2) Có đạo hàm trong khoảng (a,b)

3) $g(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$

$$\exists c \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ví dụ

Kiểm tra tính đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Hàm $f(x)$ Có đạo hàm trên đoạn [1,3] và bằng 0 tại các điểm

x = 1, x= 2, x = 3.

Trên hai đoạn [1,2] và [2,3] đối với hàm *f*(*x*) thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý Rolle.

Tồn tại ít nhất hai điểm của khoảng (1,3) tại đó $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \quad \Leftrightarrow c_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}; c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c_1 \in [1,2]; c_2 \in [2,3]$$

Ví dụ. Xác định giá trị trung gian *c* trong đlý Lagrange

đối với hàm $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty\end{cases}$ trên đoạn [0,2].

Khảo sát tính khả vi tại x = 1. Dùng định nghĩa tìm được

$$f'_-(1)=-1=f'_+(1)$$

Vậy f(x) khả vi, liên tục trên đoạn [*0,2*]. Theo đlý Lagrange

$$\left.\begin{aligned}&f(2)-f(0)=f'(c)(2-0),0<c<2\\&f'(x)=-x,0<x\le 1, f'(x)=\frac{-1}{x^2},1<x<2\end{aligned}\right\}-1=\begin{cases}-2c, & 0<c\le 1\\ -2/c^2, & 1<c<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow c=1/2\vee c=\sqrt{2}$$

Ví dụ. Giả sử $f(0) = -3, (\forall x) f'(x) \le 5$. Hỏi giá trị lớn nhất của *f*(2) có thể là bao nhiêu?

Trên đoạn [0,2], hàm khả vi và liên tục.

Áp dụng đlý Lagrange, ta có:

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2-0) = 2f'(c)$$

$$\Rightarrow f(2) = f(0) + 2f'(c)$$

$$\Rightarrow f(2) \le -3 + 2\cdot 5 = 7.$$

Định nghĩa (đạo hàm cấp cao)

Đạo hàm của hàm *y* = *f*(*x*) là một hàm số.

Có thể lấy đạo hàm một lần nữa của đạo hàm cấp một, ta được khái niệm đạo hàm cấp hai.

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Tiếp tục quá trình ta có đạo hàm cấp n.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Công thức Leibnitz (tính đạo hàm cấp cao)

Giả sử $y = f \cdot g$

Dùng qui nạp ta chứng minh được

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

$$\Leftrightarrow (f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(0)} \cdot g^{(n)} + C_n^1 f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + \cdots + C_n^n f^{(n)} \cdot g^{(0)}$$

Trong đó qui ước: $f^{(0)} = f; g^{(0)} = g.$

Phương pháp tính đạo hàm cấp cao.

1) Sử dụng các đạo hàm cấp cao của một số hàm đã biết

2) Phân tích thành tổng các hàm "đơn giản".

3) Phân tích thành tích của hai hàm: f.g, trong đó f là hàm đa thức, chỉ có vài đạo hàm khác không, sau đó sử dụng công thức Leibnitz

4) Sử dụng khai triển Maclaurint, Taylor (sẽ học)

Đạo hàm cấp cao của một số hàm thường gặp

1) $\left((x+a)^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(x+a)^{\alpha-n}$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^{n} n!\frac{1}{(x+a)^{n+1}}$$

2) $\left(e^{ax}\right)^{(n)} = a^{n}\cdot e^{ax}$

3) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^{n}}$

4) $(\sin(ax))^{(n)} = a^{n}\cdot\sin(ax+n\dfrac{\pi}{2})$

5) $(\cos(ax))^{(n)} = a^{n}\cdot\cos(ax+n\dfrac{\pi}{2})$

Chú ý: $$\left((ax+b)^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}\cdot a^{n}$$

$$\left(\ln(ax+b)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(ax+b)^{n}}\cdot a^{n}$$

$$\left(\sin(ax+b)\right)^{(n)} = a^{n}\cdot\sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$$

$$\left(\cos(ax+b)\right)^{(n)} = a^{n}\cdot\cos(ax+b+n\frac{\pi}{2})$$

Ví dụ. $$\left(\ln(2x+3)\right)^{(100)} = (-1)^{99}99!\frac{2^{100}}{(2x+3)^{100}}$$

Ví dụ

Tính $y^{(n)}(x)$, biết $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

$$y = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Sử dụng công thức $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4} \cdot \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

Ví dụ

Tính $y^{(n)}(x),$ biết $y = \sin^2 x$

$$y = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(n)}(x) = -2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

IV. Công thức Taylor, Maclaurint

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n trong lân cận x_0.

Mục đích. Tìm một đa thức bậc n, sao cho:

1) $f(x_0) = P_n(x_0); (\forall k = 1, \ldots, n)\, f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$

2) $P_n(x)$ là xấp xĩ tốt nhất cho hàm $f(x)$ trong lân cận của x_0 (tức là $f(x) - P_n(x)$ là VCB bậc cao hơn $(x - x_0)^n$)

IV. Công thức Taylor, Maclaurint

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n trong lân cận x_0.

Đa thức $P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ gọi là đa thức Taylor của hàm f(x) trong lân cận của x_0

Chú ý: Với một hàm có đạo hàm đến cấp n cho trước ta luôn tính được đa thức Taylor.

Trong định lý sau ta thấy $P_n(x)$ là xấp xỉ (tốt nhất) cho hàm $y = f(x)$ (khác nhau một đại lượng là VCB bậc n + 1).

IV. Công thức Taylor, Maclaurint

Định lý

Hàm số *y* = *f*(*x*) có đạo hàm đến cấp n + 1 trong lân cận điểm x_0 . Công thức Taylor của f(x) đến cấp n tại x_0 là:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Phần dư thứ n: $R_n(x)$

ξ là số nằm giữa x và x_0

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Định lý

Trong định nghĩa của công thức Taylor, ta có:

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Từ công thức Taylor, ta có: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$$f(x_0) = P_n(x_0), (\forall k = 1, \ldots, n)\, f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$$

$$\Rightarrow R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

Sử dụng qui tắc Lopital n lần, ta được:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Phần dư ghi ở dạng Peano

Phần dư là một vô cùng bé bậc cao hơn $(x-x_0)^n$

Khi không quan tâm đến phần dư, sử dụng dạng Peano

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$$

Phần dư ghi ở dạng Lagrange

Khi cần đánh giá phần dư, sử dụng dạng Lagrange:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, x<\xi<x_0 \vee x_0<\xi<x$$

Khai triển Taylor tại $x_0 = 0$ gọi là khai triển Maclaurint.

Khai triển Maclaurint của một số hàm thường gặp

$$1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$2)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$3)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$4)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Khai triển Maclaurint của một số hàm thường gặp

$$1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$2)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$3)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$4)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Khai triển Maclaurint của một số hàm thường gặp

$$5)\ \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$6)\ \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$7)\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$8)\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Các ứng dụng của công thức Taylor, Maclaurint

1) Xấp xỉ hàm $y = f(x)$ bởi một đa thức bậc n.

2) Tìm đạo hàm cấp cao của $y = f(x)$ tại điểm x_0.

3) Tìm giới hạn của hàm số.

4) Tính gần đúng với độ chính xác cho trước.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

Ví dụ. Tìm khai triển Maclaurint đến cấp 3 của hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + o(x^3)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{6} + \frac{5x}{36} + \frac{19x^2}{216} + \frac{65x^3}{1296} + o\left(x^3\right)$$

Ví dụ. Tìm khai triển Maclaurint đến cấp 5 của hàm

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

$$f(x) = e^{2x-x^2} = 1 + \left(2x - x^2\right) + \frac{\left(2x - x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(2x - x^2\right)^3}{3!} + $$

$$+ \frac{\left(2x - x^2\right)^4}{4!} + \frac{\left(2x - x^2\right)^5}{5!} + o(x^5)$$

Khai triển, rút gọn, sắp xếp các số hạng theo bậc tăng dần:

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

Ví dụ. Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right) \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$\tan x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0$$

II. Qui tắc Lôpital

Định lý 1

Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, thỏa:

1) Xác định trong lân cận của điểm x_0 và $f(x_0) = g(x_0)$.

2) Tồn tại đạo hàm hữu hạn $f'(x_0), g'(x_0) \neq 0$.

Khi đó: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

II. Qui tắc Lôpital

Định lý 2 (Qui tắc Lôpital $\frac{0}{0}$)

Cho hai hàm số *y* = *f*(*x*), y =*g*(*x*), thỏa:

1) Khả vi trong khoảng (*a*,*b*).

2) $\forall x \in (a,b): g^{'}(x) \neq 0.$

3) Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

4) Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ hữu hạn hay vô hạn.

Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

II. Qui tắc Lôpital

Định lý 2 (Qui tắc Lôpital $\frac{\infty}{\infty}$)

Cho hai hàm số *y* = *f*(*x*), y =*g*(*x*), thỏa:

1) Khả vi trong khoảng (*a*,*b*).

2) $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0.$

3) Tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

4) Tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hay vô hạn.

Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

II. Qui tắc Lôpital

Dạng vô định: $0 \cdot \infty$

$$\begin{cases} f \to 0 \\ g \to \infty \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow f \cdot g = \frac{f}{1/g} \text{ dạng } \frac{0}{0} \\ &\Rightarrow f \cdot g = \frac{f}{1/g} \text{ dạng } \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Các dạng vô định: $\infty - \infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$

Các dạng vô định trên đều đưa về dạng vô định $0.\infty$

I. Tính giới hạn (sử dụng qui tắc Lôpital)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}$ $\quad \dfrac{-1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$ $\quad -1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$ $\quad -3$

4) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$ $\quad 0$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$ $\quad 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$ $\quad e^{-1/2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$ $\quad 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/\ln(\sinh x)}$ $\quad e$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^x-1\right)\ln x$ $\quad 0$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{1/x}$ $\quad 3$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x - x}$ $\quad 1$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{n}e^{-x^{3}}$ $\quad 0$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$ $\quad 0$

14) $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\left(\dfrac{1}{x\arctan x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$ $\quad \dfrac{1}{3}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^{2}}$ $\quad e^{-1/2}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-1}{\ln x - x + 1}$ $\quad -2$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\tanh x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ $\quad \dfrac{2}{3}$

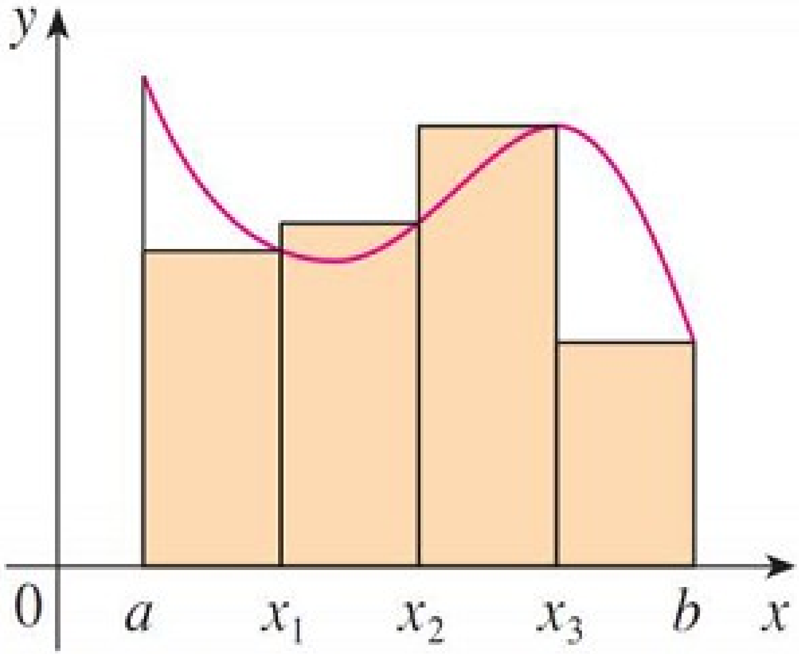
18) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$ $\quad e^{-1}$

19) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$ $\quad 1$

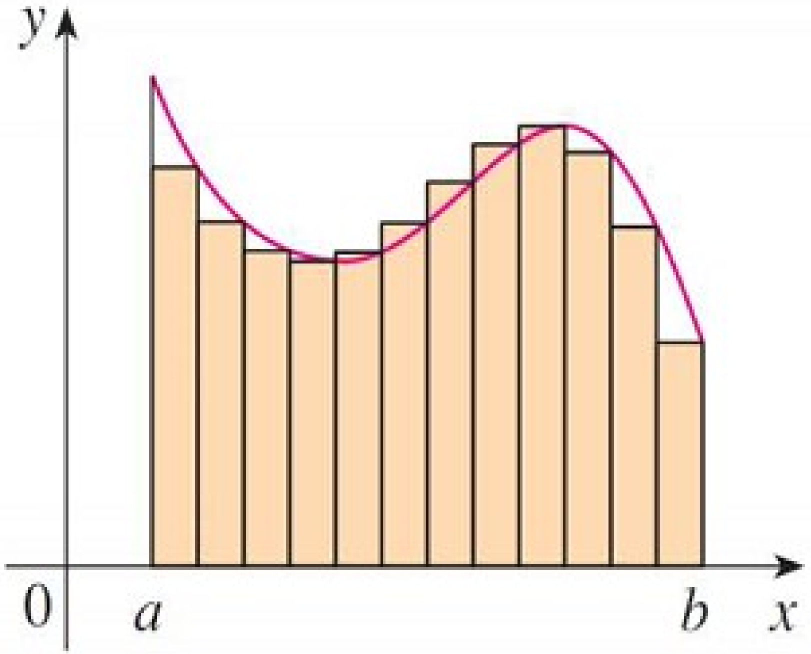
20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^{2}}$ $\quad e$

Nội dung

1. Tích phân
   - Bài toán tính diện tích – Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản của vi tích phân
   - Nguyên hàm
   - Đổi biến và tích phân từng phần – Tính tích phân
2. Tích phân suy rộng
   - Tích phân suy rộng loại I
   - Tích phân suy rộng loại II
   - Các tiêu chuẩn hội tụ
3. Ứng dụng của tích phân
   - Tính diện tích, thể tích vật thể tròn xoay, độ dài đường cong



$n = 4$



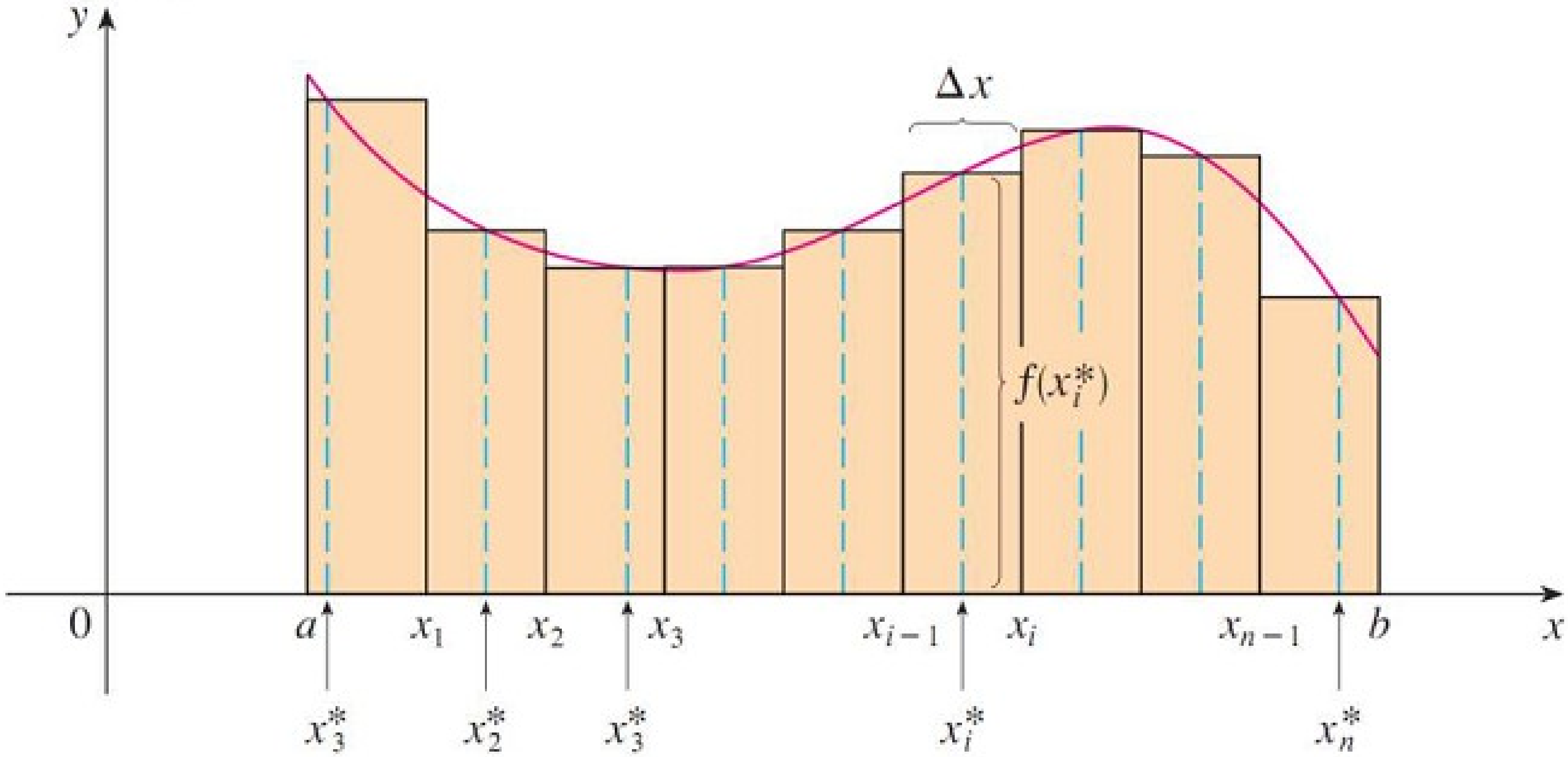
$n = 12$

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \right]$$

Thay vì lấy giá trị của f tại các đầu mút x_i như trên, ta có thể chọn tại điểm bất kỳ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$



Định nghĩa tích phân

Định nghĩa tích phân

Cho f là hàm xác định trên $[a, b]$, ta chia $[a, b]$ thành n khoảng con với độ rộng $\Delta x = (b - a)/n$. Gọi $x_0(= a) < x_1 < x_2 < \cdots < x_n(= b)$ là các đầu mút của của các khoảng con đó. Trên mỗi khoảng con ta lấy $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Thì *tích phân (xác định) của f từ a tới b* được định nghĩa là:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

nếu nó tồn tại.

Nếu tích phân của f tồn tại, ta nói f *khả tích*.

Các tính chất của tích phân

$$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a) \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x; \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Cho f, g khả tích trên $[a, b]$, $k \in \mathbb{R}$ khi đó:

1. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + kg(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
2. Nếu $c \in (a, b)$ thì f cũng khả tích trên các khoảng $[a, c]$ và $[c, b]$. Và khi đó:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

   Suy ra nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

4. Hàm $|f|$ khả tích và $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Định lý cơ bản của vi tích phân

Định lý cơ bản của vi tích phân 1

Cho f liên tục trên $[a, b]$, đặt: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ $(a \leq x \leq b)$. Thì F *liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trên* (a, b) và $F'(x) = f(x)$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của

1. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^2}dt.$

Định lý cơ bản của vi tích phân 2 (Công thức Newton - Leibnitz)

Cho f liên tục trên $[a, b]$, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trong đó F là một *nguyên hàm* bất kỳ của f, nghĩa là $F'(x) = f(x)$.

Nguyên hàm

- F được gọi là *nguyên hàm* của f nếu $F' = f$.
- Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân khẳng định *sự tồn tại nguyên hàm của các hàm liên tục*.
- Nếu F là một nguyên hàm của f thì khi đó mọi nguyên hàm G của f đều có dạng $G(x) = F(x) + C$.

Bảng một số nguyên hàm

1. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, với $a \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \qquad a > 0$$

11. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

12. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \qquad a > 0$$

Đổi biến

Quy tắc đổi biến cho tích phân bất định

Cho $u = g(x)$ là hàm khả vi, miền giá trị của nó là I, và f liên tục trên I. Khi đó:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Nhờ công thức này mà người ta xem dx như là vi phân.

Ví dụ: Tính

1. $\displaystyle\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$
2. $\displaystyle\int x^5 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

Quy tắc đổi biến cho tích phân xác định

Giả sử g' là hàm liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền xác định của $u = g(x)$. Khi đó:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Ví dụ: Tính

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

Tích phân từng phần

Từ công thức đạo hàm một tích, ta có công thức sau.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

hay

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ví dụ: Tính

1. $\displaystyle\int x \sin x \; dx$
2. $\displaystyle\int \ln x \; dx$

Áp dụng công thức Newton-Leibnitz ta được:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

hay

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

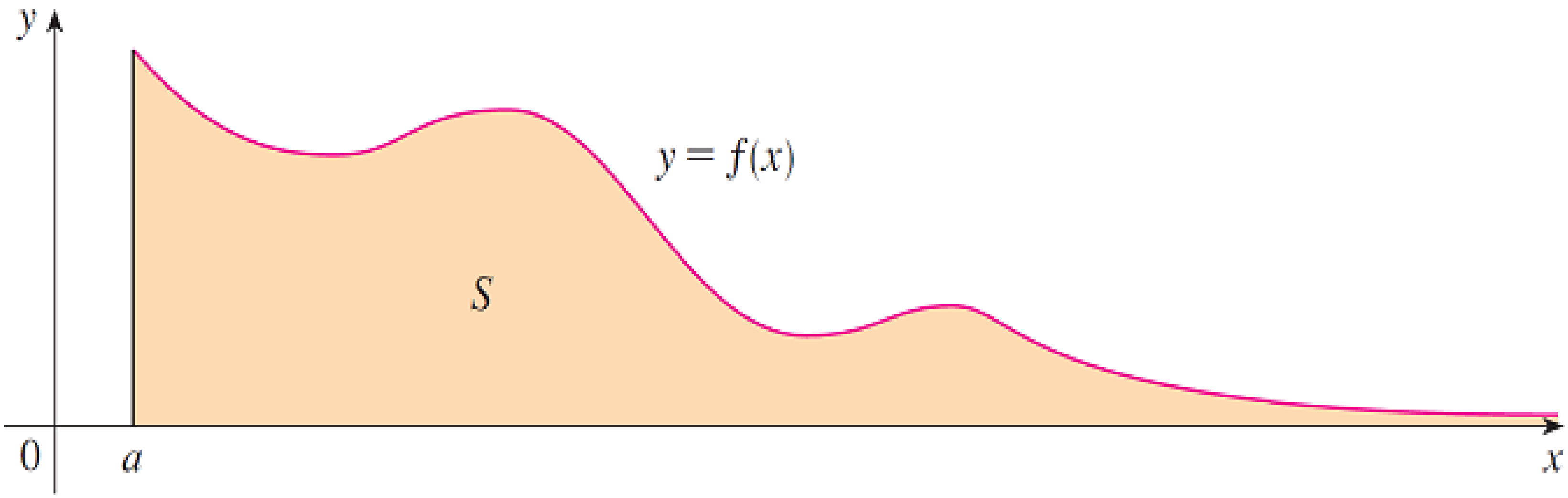
Một số ví dụ.

1. $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$

Tích phân suy rộng loại I

1. Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ thì:
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$
miễn là nó tồn tại (hữu hạn).
2. Nếu $\int_t^b f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ thì:
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$
miễn là nó tồn tại (hữu hạn).

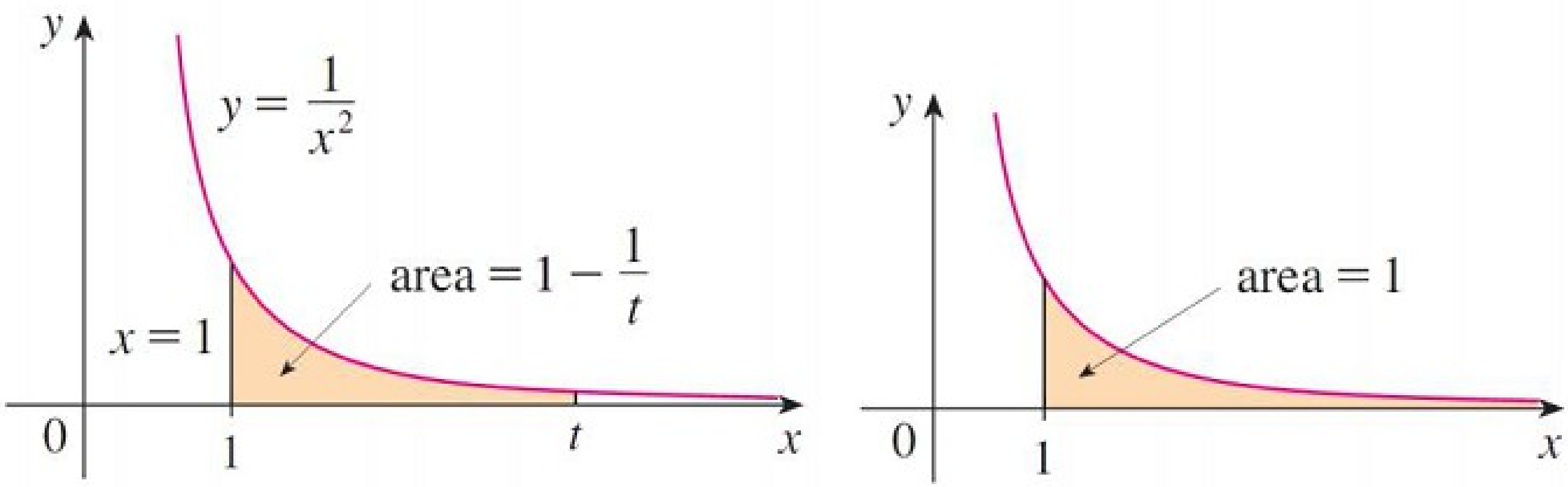
Các *tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ được gọi là *hội tụ* nếu giới hạn nói trên *tồn tại và hữu hạn*. Ngược lại, ta nói nó *phân kỳ*.



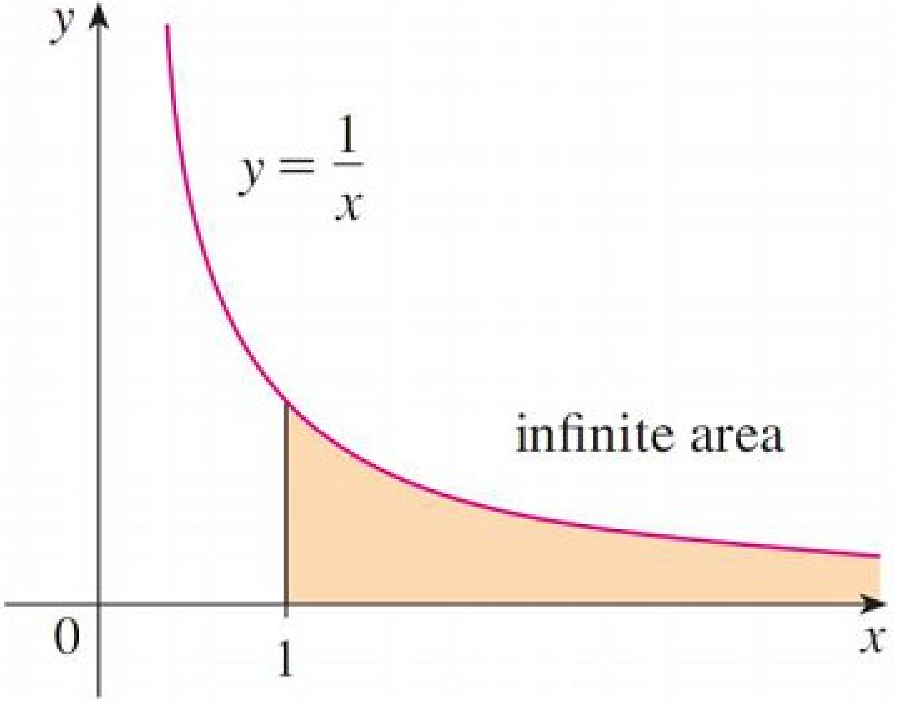
3. Nếu các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ đều hội tụ, ta định nghĩa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ví dụ: 1. Tính $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.



2. Tính $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.



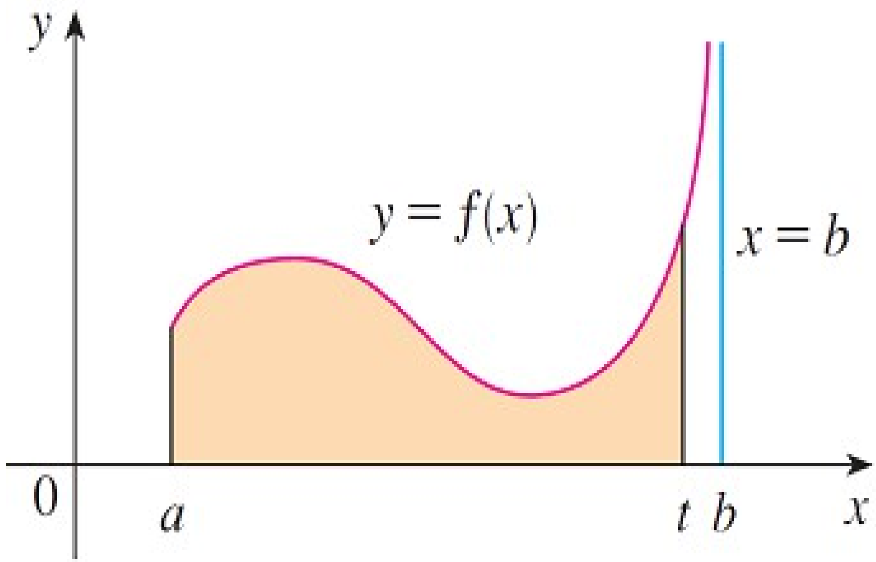
3. Tính $\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$

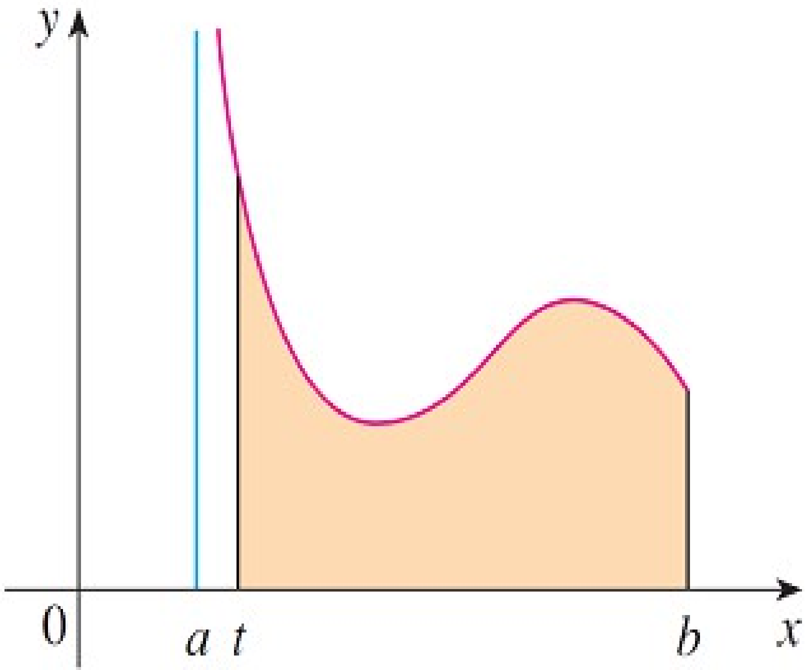
4. Tính $\int_{0}^{+\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} \, dx$

Tích phân suy rộng loại II

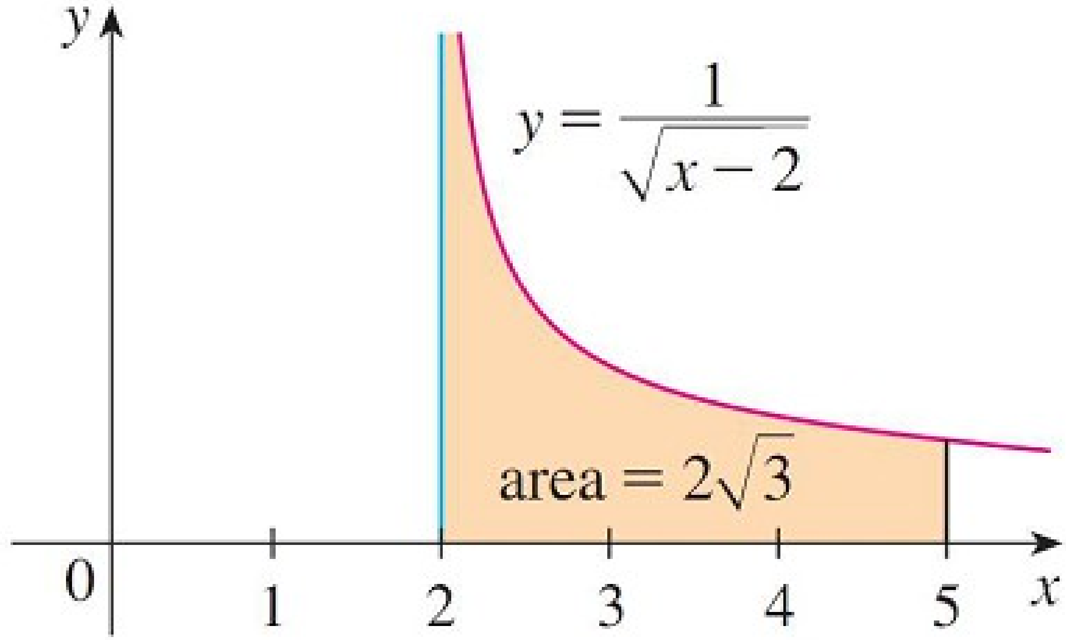
1. Nếu f liên tục trên $[a, b)$ và $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ thì:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$
miễn là nó tồn tại (hữu hạn).
2. Nếu f liên tục trên $(a, b]$ và $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ thì:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$
miễn là nó tồn tại (hữu hạn).

Các *tích phân suy rộng* nói trên được gọi là *hội tụ* nếu giới hạn *tồn tại và hữu hạn*.
Ngược lại, ta nói nó *phân kỳ*.



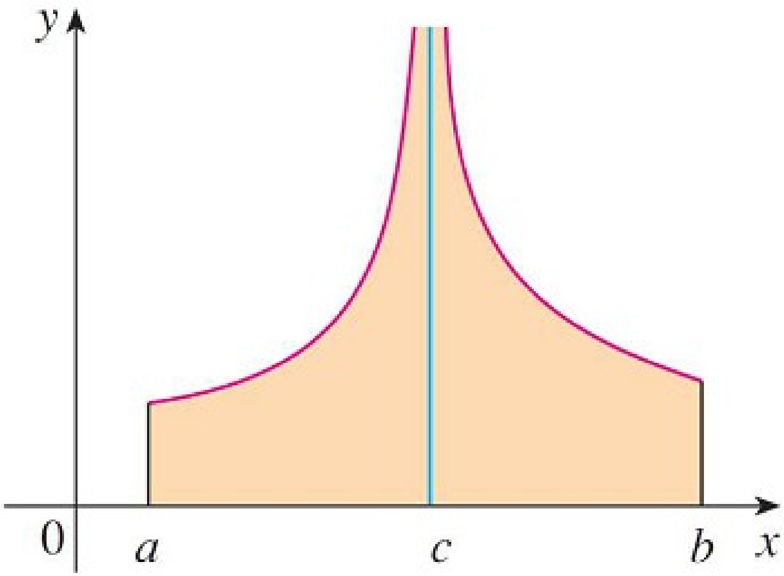


Ví dụ: 1. Tính $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$



2. Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$

3. Tính $\int_0^1 \ln x \, dx$



3. Nếu $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, với $a < c < b$, và cả hai tích phân $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ đều hội tụ, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ví dụ:

4. Tính $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn trị tuyệt đối

1. *Cho f khả tích trên mọi khoảng $[a, x]$, $x > a$. Nếu* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ.*
2. *Cho f khả tích trên mọi khoảng $[a, x]$, $x \in (a, b)$. Nếu* $\displaystyle\int_a^{b} |f(x)|\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ.*

Tương tự cho dạng khác.

Chú ý, chiều ngược lại không đúng. Chẳng hạn $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ hội tụ, nhưng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ không hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho f, g *là các hàm số dương thỏa* $f(x) \leq g(x)$.

1. *Nếu* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ*.

   Nếu $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *phân kỳ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ *phân kỳ*.

2. *Nếu* $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *hội tụ*.

   Nếu $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *phân kỳ thì* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *phân kỳ*.

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sin^2 x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x}\mathrm{d}x$

Tiêu chuẩn so sánh 2

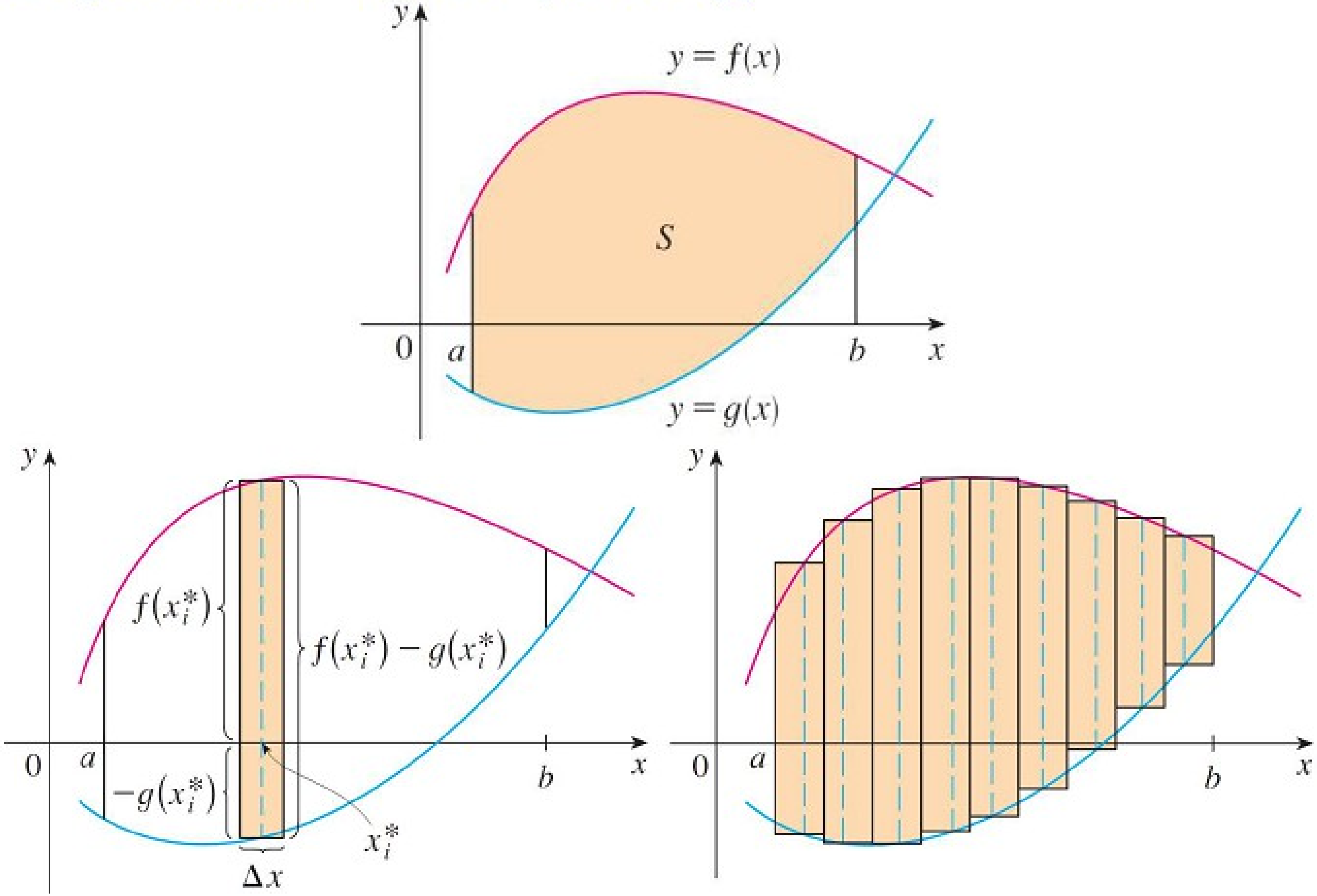
Cho f, g là các hàm số dương.

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in (0, +\infty)$, *thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *và* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*
2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in (0, +\infty)$, *thì* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *và* $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \ln x + 1}{x^5 + 3x^2 + 3}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^4 + x^3 + \sqrt{x^3 + 1} + 2}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2(2 + x)}}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Diện tích hình phẳng



$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x.$$

Như vậy:

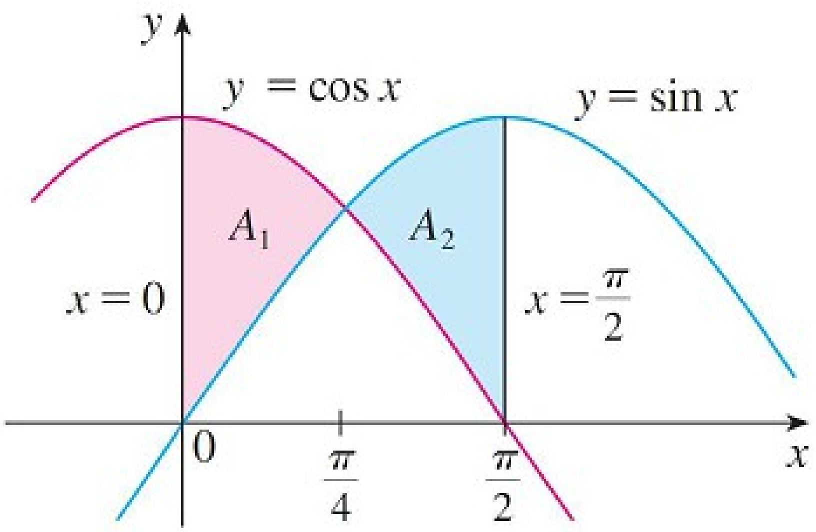
Diện tích của miền *giới hạn bởi các đường cong* $y = f(x)$, $y = g(x)$ và *các đường thẳng* $x = a$, $x = b$, trong đó f, g là các hàm liên tục, $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, là:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Tổng quát, diện tích hình phẳng *giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$* và *nằm giữa $x = a$, $x = b$* là:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

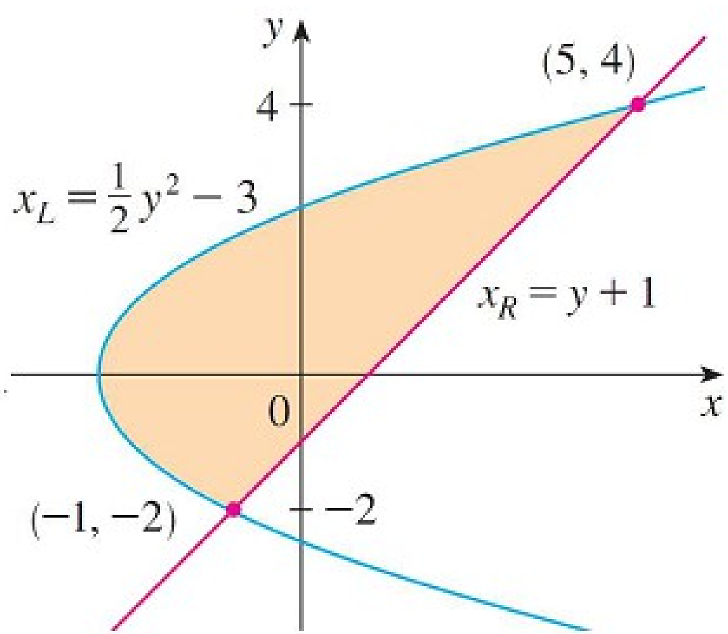
Ví dụ: Tính diện tích giới hạn bởi $y = \sin x$, $y = \cos x$ và $x = 0$, $x = \pi/2$.

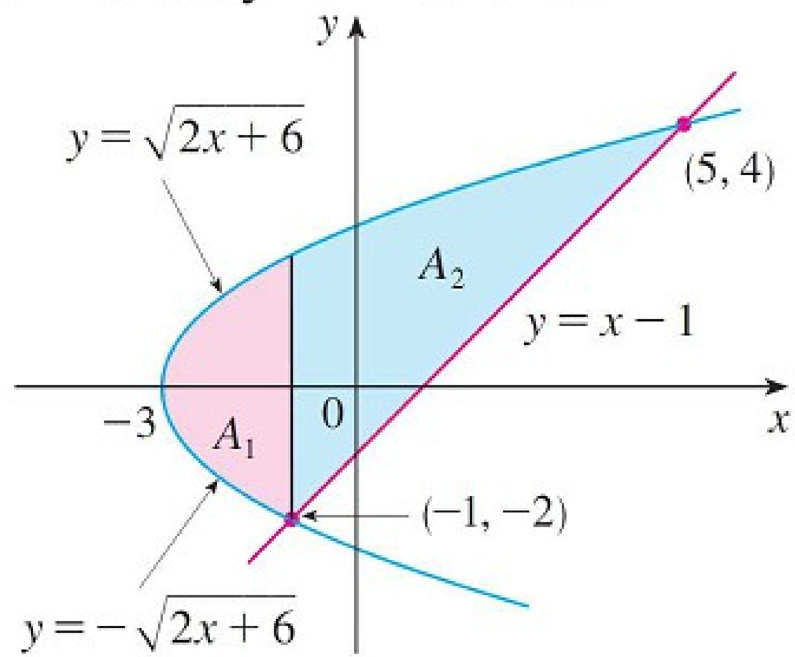


Diện tích hình phẳng *giới hạn bởi* $x = f(y)$, $x = g(y)$, *nằm giữa* $y = c$, $y = d$, với f, g liên tục, $f(y) \geq g(y)$ là:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dx$$

Ví dụ: Tính dt gh bởi $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$.





CHUỖI HÀM

Dãy hàm là một họ *đếm được* các hàm số cùng xác định trên một tập X nào đó được đánh số theo thứ tự tăng dần, ký hiệu là $\{f_n\}$.

Với mỗi $x \in X$ cho trước, tập giá trị của họ hàm này tại x lập thành một *dãy số* $\{f_n(x)\}$. Nếu *dãy số* này là *hội tụ* thì ta nói rằng *dãy hàm* là *hội tụ tại điểm x*.

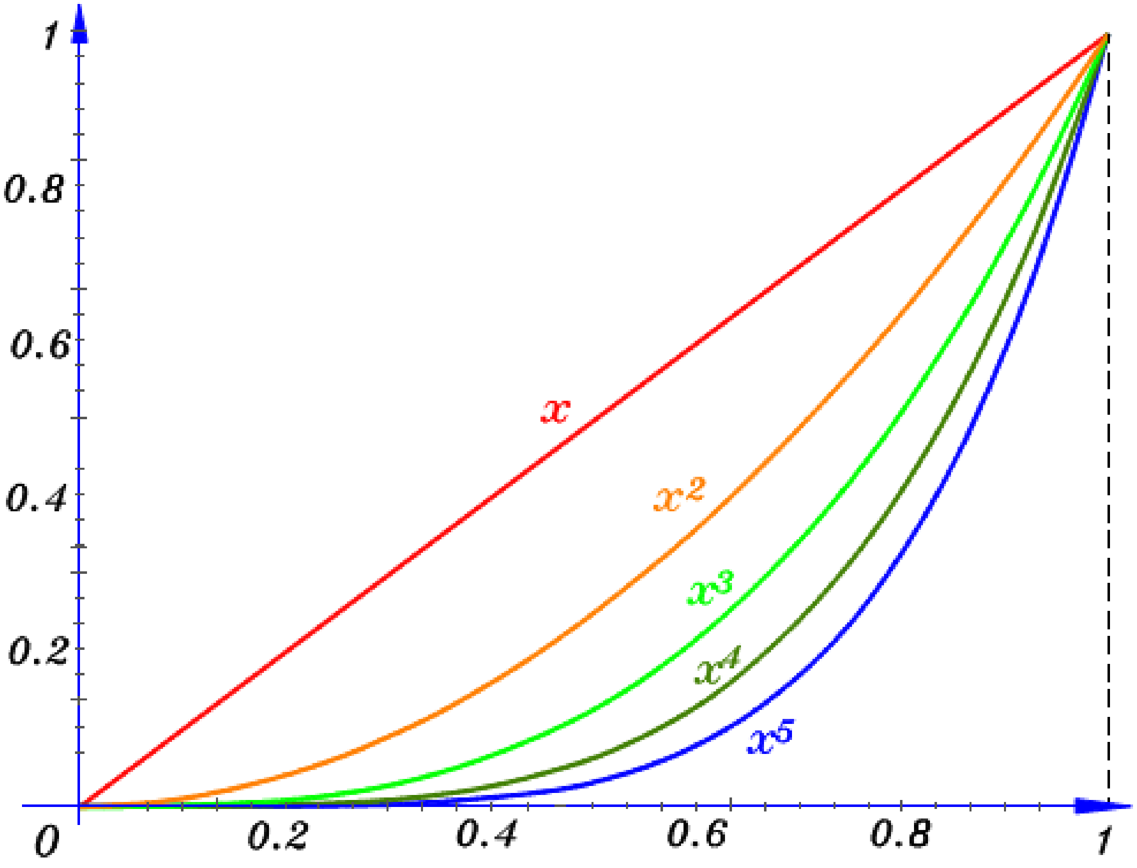
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall x \in X.$$

Ta nói rằng hàm f là *giới hạn của dãy hàm* $\{f_n\}$, hay dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ (điểm) đến hàm f.

Ví dụ :

1. $f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}.$
2. $f_n(x) = n(x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$
3. $f_n(x) = \dfrac{2n^2x^3}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

Cho ví dụ 1:



Cho dãy các hàm số $\{f_n\}$ xác định trên tập X. Với mỗi số tự nhiên k ta thiết lập *tổng riêng*

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Các tổng riêng này cũng lập thành một *dãy hàm*, xác định trên tập X.

- Nếu dãy các tổng riêng $\{S_k\}$ *hội tụ tại điểm* $x_0 \in X$ thì ta nói rằng *chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***hội tụ tại điểm*** x_0.

- Nếu dãy các tổng riêng $\{S_k\}$ *hội tụ tại mỗi điểm* trên tập X thì ta nói rằng *chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***hội tụ*** (hay ***hội tụ điểm***) ***trên tập*** X.

Dãy hàm được gọi là *bị chặn* (hay còn gọi là *bị chặn đều*) nếu như tồn tại số dương M sao cho

$$|f_n(x)| \le M\,, \quad \forall x \in X, \forall n = 1,2,3,...$$

Dãy hàm được gọi là *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*) nếu với mọi n ta có

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad \forall x \in X \qquad (f_n(x) \ge f_{n+1}(x), \quad \forall x \in X)$$

Giới hạn của dãy tổng riêng được gọi là *tổng của chuỗi hàm*, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{k\to\infty} S_k(x) := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x) .$$

(Tiêu chuẩn Cauchy): *Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>*hội tụ đều*</u> *trên tập* X *là, với mỗi số dương* ε *(nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta tìm được số tự nhiên* N *(đủ lớn) sao cho, với mọi số tự nhiên* $k > N$ *và số tự nhiên* m *bất kỳ, bất đẳng thức sau đây luôn được thỏa mãn*

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x)\right| \le \varepsilon , \quad \forall x \in X .$$

Chuỗi hàm hội tụ điểm

Cho dãy hàm $\{u_n\}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó biểu thức có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots$$

được gọi là một *chuỗi hàm*.

- Nếu tại $x_0 \in D$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ thì ta nói x_0 là *điểm hội tụ* của chuỗi hàm đã cho.
- Nếu tại $x_0 \in D$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kỳ thì ta nói chuỗi hàm *phân kỳ* tại x_0.
- Tập các điểm hội tụ được gọi là *miền hội tụ*.

- Gọi U là miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Lấy $x \in U$ và đặt
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$
thì hàm số S được gọi là *hàm tổng* (điểm) của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Tìm miền hội tụ và tính hàm tổng (trong trường hợp có thể) của các chuỗi hàm sau đây

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Chuỗi hàm hội tụ đều

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ gọi là *hội tụ đều trên D* đến hàm $S(x)$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in D : \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon$$

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ đều của

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ trên $(-1, 1)$ và trên $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)}$ trên $[0, \infty)$.

(Weierstrass) *Chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều trên tập X nếu như tồn tại chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và thỏa mãn điều kiện sau*

$$|f_n(x)| \le a_n, \quad \forall x \in X, \forall n = 1,2,3,...$$

Ta dễ dàng nhận ra tính *hội tụ đều* của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ (trên toàn bộ trục số), vì rằng

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \qquad \forall n = 1,2,3,...$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ.

Chuỗi lũy thừa (hay chuỗi lũy thừa tâm tại gốc) là chuỗi có *số hạng tổng* quát là *hàm lũy thừa*, tức là $u_n(x) = a_n x^n$.

Như vậy chuỗi lũy thừa (tâm gốc) có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trong đó a_n là các hằng số (gọi là các *hệ số* của chuỗi). Bằng phép dịch chuyển tọa độ $x \to x - x_0$ ta có chuỗi lũy thừa tâm tại điểm x_0 với dạng sau đây:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

(Abel) *Nếu chuỗi lũy thừa (tâm tại gốc) hội tụ tại một điểm* c *nào đó thì nó hội tụ tuyệt đối trên cả khoảng* $(-|c|,|c|)$.

Nếu chuỗi lũy thừa không hội tụ tại điểm c thì nó cũng không hội tụ tại mọi điểm nằm ngoài đoạn $[-|c|,|c|]$.

<u>Định nghĩa</u> *Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là một số* $R \geq 0$ *xác định như sau*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

trong đó ta quy ước $R = 0$ khi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng *vô cùng*, và R bằng *vô cùng* khi

$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng 0.

Định nghĩa *Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là một số* $R \geq 0$ *xác định như sau*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

trong đó ta quy ước $R = 0$ khi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng *vô cùng*, và R bằng *vô cùng* khi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng 0.

Khi $R \in (0, \infty)$ *thì*

(i) *Chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối và đều trên mỗi đoạn nằm trong khoảng* $(-R, R)$.

(ii) *Chuỗi lũy thừa không hội tụ tại mọi điểm nằm ngoài đoạn* $[-R, R]$.

DẤU HIỆU THƯƠNG (Dấu hiệu D'Alembert) Cho một chuỗi bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(a) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ);

(b) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ;

(c) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, thì không có kết luận gì.

VÍ DỤ 1 Với giá trị nào của x thì chuỗi sau hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

GIẢI Ta sử dụng Dấu hiệu Tỷ lệ. Ta đặt $a_n = n!\, x^n$.

Nếu $x \neq 0$ và cố định, thì ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

Theo Dấu hiệu Tỷ lệ, chuỗi phân kỳ khi $x \neq 0$. Do đó, chuỗi chỉ hội tụ khi $x = 0$.

VÍ DỤ 2 Với giá trị nào của x thì chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

GIẢI Đặt $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(x-3)^n}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \; khi \; n \to \infty$$

Theo Dấu hiệu Tỷ lệ, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, và do đó hội tụ khi $|x-3| < 1$ và phân kỳ khi $|x-3| > 1$ tức là chuỗi đã cho hội tụ khi $2 < x < 4$ và phân kỳ khi $x < 2$ hoặc $x > 4$.

VÍ DỤ 3 Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

GIẢI Đặt $a_n = \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = 3\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}|x| \to 3|x| \text{ khi } n \to \infty$$

Theo Dấu hiệu Tỷ lệ , chuỗi đã cho hội tụ nếu $3|x| < 1$ và phân kỳ nếu $3|x| > 1$. Điều này có nghĩa là bán kính hội tụ là $R = 1/3$.

VÍ DỤ 4 Tính bán kính hội tụ và tìm khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

GIẢI

Đặt $a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$, ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{khi } n \to \infty$$

Sử dụng Dấu hiệu Tỷ lệ, ta thấy rằng chuỗi đã cho hội tụ nếu $\frac{|x+2|}{3} < 1$ và phân kỳ nếu $\frac{|x+2|}{3} > 1$.

Như vậy, chuỗi đã cho hội tụ khi $|x+2| < 3$ và phân kỳ khi $|x+2| > 3$.

Nên bán kính hội tụ là $R = 3$.

(i) *Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm liên tục trong vùng hội tụ của chuỗi;*

(ii) *Tổng của chuỗi lũy thừa là hàm khả vi liên tục cấp vô hạn trong vùng hội tụ và đạo hàm của nó bằng tổng của chuỗi các đạo hàm, cụ thể là được tính bởi công thức*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R). \qquad (*)$$

(iii) *Tích phân của tổng chuỗi lũ thừa bằng tổng chuỗi các tích phân các hàm lũy thừa, tức là ta có công thức*

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c.$$

Giả sử f là một hàm số khả tích trên đoạn $[0,2\pi]$ và tuần hoàn với chu kỳ bằng đoạn này. Khi ấy có thể tính được các dãy số sau đây

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 0,1,2,3,\ldots \ .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

và thiết lập chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)].$$

Chuỗi này có tên gọi là chuỗi Fourier của hàm f và các số a_n, b_n được gọi là các hệ số Fourier. Tổng riêng của chuỗi này là

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)].$$

MỆNH ĐỀ. *Cho hàm f liên tục trên đoạn* $[-\pi, \pi]$ *với* $f(-\pi) = f(\pi)$ *và có khai triển Fourier là*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ .$$

Nếu hàm f là *khả vi từng khúc trên đoạn* $[-\pi, \pi]$ *thì chuỗi Fourier của* f' *bằng chuỗi của đạo hàm các số hạng trong chuỗi Fourier hàm f, nghĩa là*

$$f'(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx).$$