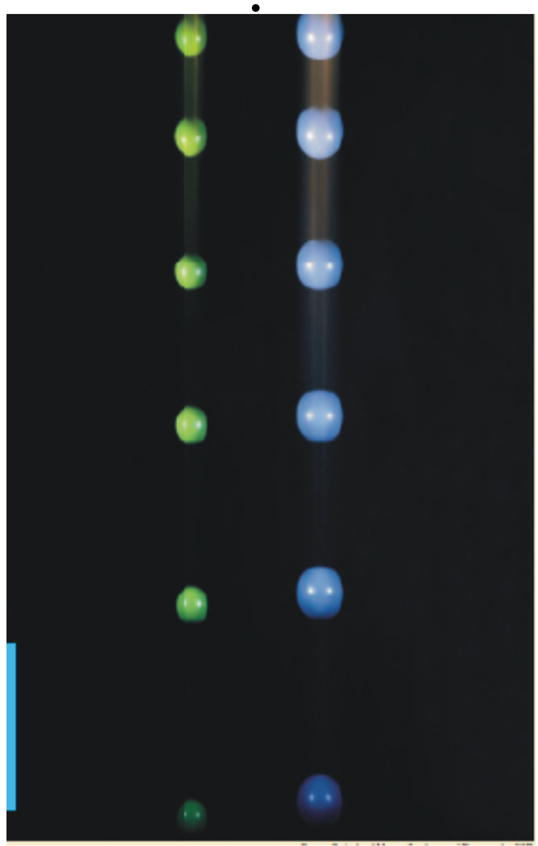
Chương 1

HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN



Một quả bóng rơi ngày càng nhanh. Ông Galileo phát hiện: khoãng đường đi của một quả bóng rơi tỷ lệ với bình phương thời gian nó rơi. Phép tính vi tích phân, dựa vào nhận xét này, giúp chúng ta tính được vận tốc rơi của một quả bóng tại bất kỳ thời điểm nào.

Trong phép tính vi tích phân, chúng ta làm việc với các hàm số. Chúng ta nhấn mạnh rằng một hàm số có thể được diễn tả bằng nhiều cách khác nhau: một phương trình, một bảng số, một đồ thị, hay định nghĩa bằng từ ngữ. Chúng ta quan sát các dạng cơ bản của các hàm số xuất hiện trong phép tính vi tích phân và trình bày quá trình dùng các hàm số để mô hình toán học các hiện tượng thực tế ngoài đời. Trong phần "nhìn qua" khái quát phép tính vi tích phân, chúng ta đã thấy tại sao ý tưởng về giới hạn lại là nền tảng của nhiều ngành khác nhau của phép tính vi tích phân. Do đó thật hợp lý khi khảo sát các giới hạn của hàm số cùng với các tính chất của chúng để bắt đầu nghiên cứu phép tính vi tích phân .

1.1 Bốn cách biểu diễn một hàm số

Hàm số phát sinh khi một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác. Chúng ta xem xét bốn trường hợp sau :

A. Diện tích A của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của hình tròn. Nguyên tắc liên kết r và A được cho bởi phương trình $A = \pi r^2$. Với mỗi số dương r, có tương ứng một giá trị A và chúng ta nói rằng A là một hàm số của r.

B. Dân số của thế giới P phụ thuộc vào thời gian t. Bảng sau cho ta ước lượng dân số thế giới $P(t)$ tại thời điểm t, với năm tương ứng. Ví dụ,

$$P(1950) = 2560000000$$

Thời gian	Dân số (triệu)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

Với mỗi giá trị của thời gian t, tương ứng ta có giá trị của P, và chúng ta nói rằng P là hàm số của t.

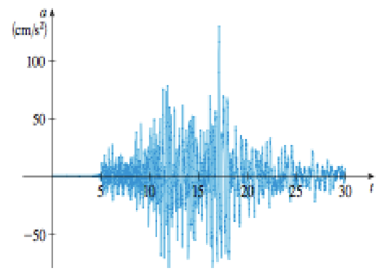
C. Giá C của một bưu kiện phụ thuộc vào cân nặng ω của nó. Mặc dù không có công thức đơn giản liên kết ω và C, bưu điện có quy tắc xác định C khi biết cân nặng ω.

D. Gia tốc a theo chiều dọc của đất được đo bởi một địa chấn trong suốt trận động đất là một hàm số của thời gian t trôi qua. Hình 1.1.1 cho một đồ thị được tạo ra bởi hoạt động địa chấn trong trận động đất Northridge làm rung chuyển Los Angeles vào năm 1994. Với mỗi giá trị t, đồ thị cho ta giá trị tương ứng a.

Mỗi ví dụ trên mô tả một quy tắc mà ở đó một số cho trước ($r, t, \omega,$ hay t), các số khác ($A, P, C,$ hay a) được gán cho. Mỗi trường hợp chúng ta nói rằng đại lượng sau là một hàm số của đại lượng trước.

Một hàm số f là quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x trong tập hợp D chính xác một phần tử, gọi là $f(x)$, trong tập hợp E.

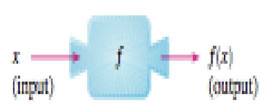
Chúng ta thường xem xét những hàm số mà các tập hợp D và E là tập số thực. Tập hợp D được gọi là miền **xác định** của hàm số. $f(x)$ là giá trị của hàm số f tại



Hình 1.1.1: Gia tốc trong trận động đất Northridge.

x. Miền **giá trị** của f là tập hợp tất cả các giá trị có thể lấy của $f(x)$ khi x lấy giá trị trên miền xác định. Một ký hiệu đại diện một số bất kỳ trong miền xác định của hàm số f được gọi là một biến độc lập. Một ký hiệu biểu diễn một số trong miền giá trị của f được gọi là biến phụ thuộc. Trong ví dụ **A.**, r là biến độc lập và A là biến phụ thuộc.

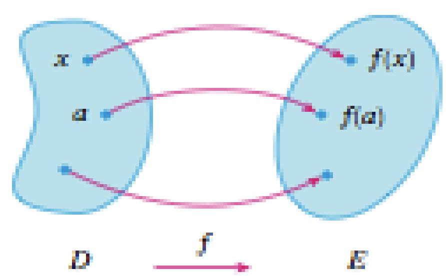
Nó rất dễ hình dung nếu ta nhìn hàm số như là cái "máy" (xem Hình 1.1.2). Nếu lấy x trong miền xác định của hàm f, thì khi x đi vào máy, nó có thể coi là dữ liệu nhập vào (input) và cái máy sẽ sinh ra dữ liệu ra (output) $f(x)$ thông qua quy tắc của hàm số. Vì vậy chúng ta có thể xem miền xác định như là tập hợp của tất cả dữ liệu vào và miền giá trị là tập hợp tất cả dữ liệu ra có thể có.



Hình 1.1.2: "Máy" hàm số.

Hàm số được lập trình sẵn trong máy tính bỏ túi là một ví dụ của hàm số như là cái máy. Ví dụ, nút lấy căn bậc hai trên máy tính bỏ túi sẽ tính toán như là hàm số. Chúng ta nhấn nút $\sqrt{.}$ hay $\sqrt{x}$ và nhập dữ liệu vào x. Nếu $x < 0$ thì x không nằm trong miền xác định của hàm số này, nghĩa là, x không là dữ liệu chấp nhận được, và máy tính bỏ túi sẽ báo lỗi. Nếu $x \geq 0$ thì một xấp xỉ của $\sqrt{x}$ sẽ hiển thị trên màn hình. Do vậy nút $\sqrt{x}$ trên máy tính bỏ túi thì không chính xác như hàm số định nghĩa một cách toán học $f(x) = \sqrt{x}$.

Một cách khác để hình dung một hàm số là sơ đồ mũi tên như trong hình 1.1.3. Mỗi mũi tên nối một phần tử của tập hợp D với một phần tử của tập hợp E. Mũi tên chỉ rằng $f(x)$ thì được tương ứng với x, $f(a)$ thì được tương ứng với a, và tiếp tục như vậy.



Hình 1.1.3: Sơ đồ mũi tên.

Phương pháp phổ biến nhất để hình dung một hàm số là đồ thị của nó. Nếu f là một hàm số với miền xác định D thì đồ thị của nó là tập hợp của những cặp được sắp thứ tự

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

(Chú ý rằng đây là những cặp dữ liệu nhập $-$ ra.) Nói cách khác, đồ thị của hàm số f chứa tất cả những điểm (x, y) trong trục toạ độ phẳng sao cho $y = f(x)$ và x nằm trong miền xác định của f.

Đồ thị của hàm số f cho chúng ta hình ảnh dễ hình dung dáng điệu của hàm số f. Bởi vì toạ độ y của một điểm bất kỳ (x, y) trên đồ thị là $y = f(x)$, chúng ta có thể xem giá trị của $f(x)$ từ đồ thị như là chiều cao của đồ thị tại điểm x (xem hình 1.1.4). Đồ thị của hàm số f cũng cho phép chúng ta vẽ miền xác định của hàm số f trên trục toạ độ x và miền giá trị trên trục toạ độ y như trong hình 1.1.5.

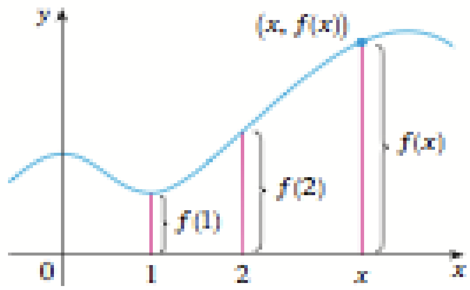
Ví dụ 1. Cho đồ thị của hàm số f như trong hình 1.1.6.

(a) Tìm các giá trị $f(1)$ và $f(5)$?

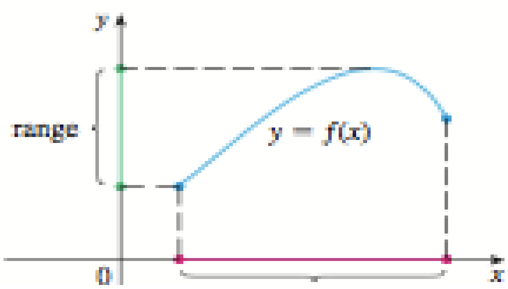
(b) Xác định miền xác định và miền giá trị của hàm số f.

Lời giải.

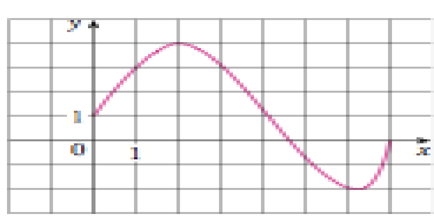
(a) Chúng ta thấy trong hình 1.1.6, điểm $(1, 3)$ nằm trên đồ thị hàm f, vì vậy giá trị của hàm f tại 1 là $f(1) = 3$. Nói cách khác, điểm trên đồ thị đặt trên 1 là 3 đơn



Hình 1.1.4:



Hình 1.1.5: Miền xác định (domain) và miền giá trị (range).



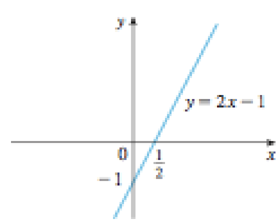
Hình 1.1.6:

vị trên trục toạ độ x.
Khi $x = 5$, đồ thị nằm dưới trục x khoảng 0.7 đơn vị, vì vậy chúng ta xấp xỉ $f(5) = -0.7$.
(b) Chúng ta thấy rằng $f(x)$ được định nghĩa khi $0 \leq x \leq 7$, nên miền xác định của f là khoảng đóng $[0, 7]$. Chú ý rằng f lấy tất cả các giá trị từ -2 đến 4, vì vậy miền giá trị của f là

$$\{y \mid -2 \leq y \leq 4\} = [-2, 4].$$

□

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị và tìm miền xác định, miền giá trị của mỗi hàm số sau.
(a) $f(x) = 2x - 1$.
(b) $g(x) = x^2$.
Lời giải.
(a) Phương trình của đồ thị là $y = 2x - 1$ và chúng ta nhận thấy đồ thị của nó sẽ là đường thẳng với hệ số góc là 2 và chắn trục toạ độ y tại -1. (Xem dạng góc nghiêng-phần bị chắn của phương trình đường thẳng $y = mx + b$ trong "Phụ lục B".) Điều này giúp chúng ta có thể vẽ đồ thị của hàm số f như trong hình 1.1.7. Biểu thức $2x - 1$ được định nghĩa cho tất cả số thực, vì vậy miền giá trị của f là tập toàn bộ tập số thực, được ký hiệu bởi $\mathbb{R}$. Đồ thị chỉ ra rằng miền giá trị cũng là tập $\mathbb{R}$.

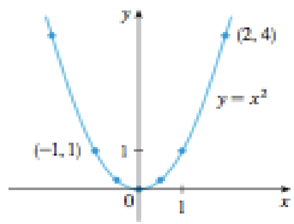


Hình 1.1.7:

(b) Từ $g(2) = 2^2 = 4$ và $g(-1) = (-1)^2 = 1$ chúng ta có thể vẽ các điểm $(2, 4)$ và $(-1, 1)$, cùng với một vài điểm khác của đồ thị, và nối các điểm lại để tạo ra đồ thị của hàm số g (Hình 1.1.8). Phương trình của đồ thị là $y = x^2$, nó biểu diễn một parabol (xem Phụ lục C). Miền xác định của g là $\mathbb{R}$. Miền giá trị của g chứa tất cả các giá trị $g(x)$, nghĩa là, tất cả các số có dạng x^2. Nhưng $x^2 \geq 0$ với mọi giá trị thực x và mọi số thực dương đều là một bình phương. Vì vậy, miền giá trị của g là $\{y \mid 0 \leq y \leq \infty\} = [0, \infty)$. Nó cũng có thể được nhìn thấy qua hình 1.1.8.

□

Ví dụ 3. Cho $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ và $h \neq 0$, tính $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Lời giải.
Trước hết chúng ta tính $f(a + h)$ bằng cách thay x bởi $a + h$ trong biểu thức của



Hình 1.1.8:

$f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1. \end{aligned}$$

Thay vào biểu thức cần tính và đơn giản ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5. \end{aligned}$$

□

CÁC CÁCH BIỂU DIỄN HÀM SỐ

Có thể có bốn cách biểu diễn một hàm số

- Bằng từ ngữ (bằng cách mô tả bằng lời)
- Bằng số (bằng bảng các giá trị)
- Bằng hình ảnh (bằng đồ thị)
- Bằng một cách đại số (bằng một công thức)

Nếu một hàm đơn giản thì có thể được biểu diễn bởi tất cả bốn cách trên, nó sẽ hữu ích nếu ta chuyển từ cách biểu diễn này qua cách kia để thu được những cái nhìn khác của hàm số. (Trong ví dụ 2, chúng ta bắt đầu với công thức đại số và sau đó thu được các đồ thị.) Nhưng với một số hàm số được mô tả theo một cách nào đó sẽ tự nhiên hơn bởi những cách khác. Với suy nghĩ đó, chúng ta hãy kiểm tra lại bốn trường hợp mà ta đã xem xét ở phần đầu của chương này.

(**A**) Một biểu diễn thông dụng của diện tích hình tròn như một hàm số của bán kính là công thức đại số $A(r) = \pi r^2$, mặc dù nó còn có thể được biểu diễn qua một bảng giá trị hay vẽ đồ thị (một nửa parabol). Một hình tròn phải có bán kính dương, nên

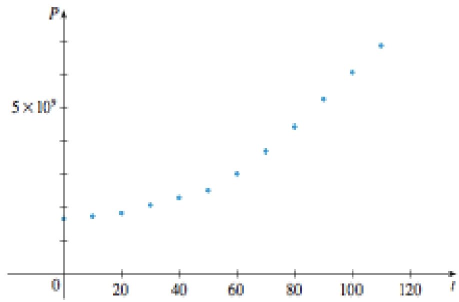
miền xác định là $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, và miền giá trị cũng là $(0, \infty)$.
(**B**) Chúng ta cho một mô tả hàm số bằng lời : $P(t)$ là dân số thế giới tại thời điểm t. Tính t để cho $t = 0$ tương đương với năm 1900. Bảng dân số thế giới cung cấp một biểu diễn thuận lợi của hàm số này. Nếu chúng ta vẽ những giá trị này, ta được đồ thị (được gọi là đồ phân tán) trong Hình 1.1.9. Nó là một cách biểu diễn rất hữu dụng, đồ thị cho phép ta nhìn thấy tất cả dữ liệu cùng lúc. Một công thức thì như thế nào? Tất nhiên không thể nào đưa ra một công thức chính xác cho dân số thế giới $P(t)$ với bất kỳ t. Nhưng chúng ta có thể tìm một biểu thức của hàm số mà nó xấp xỉ $P(t)$. Thực vậy, sử dụng phương pháp được giảng giải trong phần 1.2 chúng ta có một xấp xỉ

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t.$$

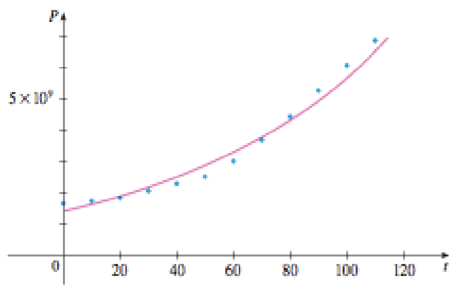
Hình 1.1.10 chỉ ra rằng xấp xỉ trên tương đối hợp lý. Hàm số f được gọi là mô hình toán học cho sự tăng trưởng dân số. Nói một cách khác, nó là một hàm số với công thức cụ thể mà nó xấp xỉ dáng điệu của hàm số ta cho trước. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy rằng những ý tưởng của phép vi tích phân có thể được áp dụng cho một bảng những giá trị; một công thức cụ thể thì không cần thiết.

t	dân số (triệu)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

P là một hàm số cá biệt trong những hàm số xuất hiện khi chúng ta áp dụng phép tính vi tích phân vào đời sống. Chúng ta bắt đầu bằng mô tả lời nói cho một hàm số. Sau đó chúng ta có thể xây dựng một bảng các giá trị của nó, có lẽ từ kết quả của những thí nghiệm khoa học. Mặc dù không có đầy đủ tất cả các giá trị của hàm số, chúng ta sẽ thấy xuyên suốt trong sách này rằng ta vẫn có thể dùng các chức năng của phép tính vi tích phân cho những hàm số như thế.
(**C**) Hàm số được mô tả bằng lời: Cho $C(\omega)$ là giá tiền cho bưu kiện có khối lượng ω. Quy tắc của dịch vụ bưu điện ở Mỹ được sử dụng năm 2010 như sau: giá 88 cents cho bưu kiện nặng đến 1oz, cộng với 17 cents cho mỗi ounce nhiều hơn (hay ít hơn) dành cho bưu kiện nặng đến 13 oz. Bảng giá trị dưới cho ta sự thuận lợi



Hình 1.1.9:



Hình 1.1.10:

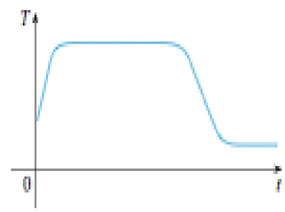
để mô tả hàm số này, mặc dù nó cũng có thể được vẽ bằng một đồ thị (xem Ví dụ 10).

Cân nặng (ounce)	Giá $C(\omega)$ (đô la)
$0 < \omega \leq 1$	0.88
$1 < \omega \leq 2$	1.05
$2 < \omega \leq 3$	1.22
$3 < \omega \leq 4$	1.39
$4 < \omega \leq 5$	1.56
.	.
.	.
.	.

(**D**) Đồ thị trong hình 1.1.1 là một biểu diễn tự nhiên nhất của hàm gia tốc theo chiều dọc $a(t)$. Nó thì hiển nhiên rằng một bảng giá trị có thể được thiết lập, nó thậm chí có thể tìm ra một công thức xấp xỉ. Nhưng những thứ mà các nhà địa chất muốn biết là biên độ và những mô hình có thể được nhìn một cách dễ dàng từ đồ thị. (Cũng giống như những mô hình được nhìn trong điện tim đồ và đa đồ thị cho máy phát hiện nói dối.)

Trong ví dụ tiếp theo chúng ta vẽ đồ thị của một hàm số mà nó được định nghĩa bằng lời.

Ví dụ 4. Khi bạn bật vòi nước nóng, nhiệt độ T của nước sẽ phụ thuộc vào khoảng thời gian mà nước được mở ra. Hãy vẽ đồ thị của T như là một hàm số của thời gian t trôi qua khi vòi được mở.
Lời giải.



Hình 1.1.11:

Nhiệt độ ban đầu khi vòi bắt đầu chảy thì gần bằng nhiệt độ phòng bởi vì nước đang trong ống. Khi nước từ bình nước nóng bắt đầu chảy ra từ vòi, T sẽ tăng nhanh chóng. Trong khoảng tiếp theo, T là hằng số tại nhiệt độ của bình nước nóng. Khi bình nước nóng cạn dần, T sẽ giảm dần đến nhiệt độ nước cung cấp. Điều này giúp chúng ta vẽ sơ lược đồ thị hàm T của thời gian t như trong Hình 1.1.11. □

Trong ví dụ dưới đây chúng ta bắt đầu với một mô tả bằng lời cho một hàm số trong một hiện tượng vật lý và thu được một biểu thức đại số tường minh. Kinh nghiệm từ việc làm trên giúp ta có kỹ năng để giải quyết các bài toán trong phép tính vi tích phân liên quan đến tìm giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của một số đại lượng.

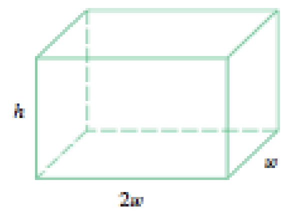
Ví dụ 5. Một thùng chứa hình hộp chữ nhật trống trên mặt đỉnh có thể tích $10m^3$. Chiều dài mặt đáy gấp đôi chiều rộng mặt đáy. Nguyên liệu cho mặt đáy giá 10 đô la Mỹ trên một m^2; nguyên liệu cho những mặt khác có giá 6 đô một m^2. Tìm biểu thức cho giá của nguyên liệu cần dùng theo chiều rộng của mặt đáy.
Lời giải. Ta vẽ hình như hình 1.1.12 and gọi chiều dài, chiều rộng mặt đấy lần lượt là $2w, w$ và chiều cao của hộp là h.

Diện tích mặt đáy là $(2w)w = 2w^2$, giá nguyên liệu cho mặt đáy là $10(2w^2)$. Hình hộp có hai mặt có diện tích wh và hai mặt có diện tích $2wh$, vì vậy giá nguyên liệu của các mặt bên là $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Tổng giá nguyên liệu là

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh.$$

Để tìm biểu thức giá C là hàm số của chiều rộng w, ta cần triệt tiêu h, ta dùng dữ liệu thể tích hình hộp là $10m^3$. Vì vậy,

$$w(2w)h = 10$$



Hình 1.1.12:

suy ra

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Thay vào biểu thức của C, ta có

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{18}{w}.$$

Vậy ta có hàm số $C(w)$:

$$C(w) = 20w^2 + \frac{18}{w}, \quad w > 0.$$

□

Ví dụ 6. Tìm miền xác định của các hàm số sau:
(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$
(b) $g(x) = \frac{1}{x^2-x}$.
Lời giải.
(a) Bởi vì căn bậc hai của một số âm không được định nghĩa trong tập số thực nên miền giá trị của f chứa tất cả giá trị của x sao cho $x+2 \geq 0$. Điều này tương đương với $x \geq -2$, miền xác định là khoảng $[-2, \infty)$.
(b) Từ

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

and phép chia cho 0 không được phép, ta thấy hàm số g không được định nghĩa tại $x = 0$ hoặc $x = 1$. Vì vậy, miền xác định của g là

$$\{x \mid x \neq 0\,,\, x \neq 1\}$$

nó còn có thể viết dưới dạng sau

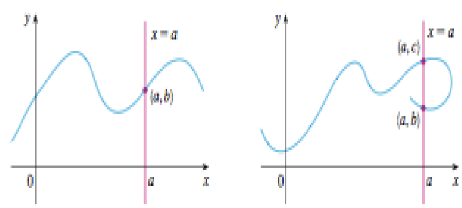
$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

□

Đồ thị của một hàm số là một đường cong trong mặt phẳng Oxy. Nhưng những đường cong như thế nào trong mặt phẳng Oxy là đồ thị của các hàm số? Câu trả lời bởi quy tắc sau:

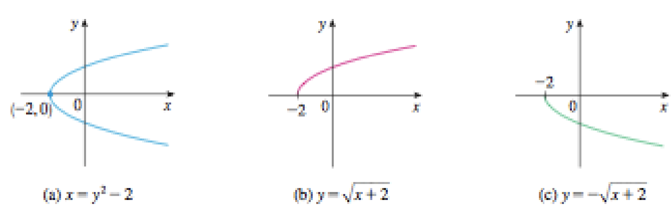
Quy tắc theo trục dọc *Một đường cong trong mặt phẳng Oxy là đồ thị của một hàm số của x khi và chỉ khi không có trục dọc nào giao với đường cong đó nhiều hơn một điểm.*

Lý do cho tính đúng đắn của quy tắc trên có thể được nhìn thấy qua hình 1.1.13. Nếu mỗi trục dọc $x = a$ cắt đường cong tại đúng một điểm (a, b) thì có chính xác một giá trị định nghĩa hàm số $f(a) = b$. Nhưng nếu trục $x = a$ cắt đường cong hai lần tại (a, b) và (a, c) thì ta không thể biểu diễn một hàm số bởi vì một hàm số không thể nhận hai giá trị phân biệt tại a.



Hình 1.1.13: Quy tắc trục dọc.

Chẳng hạn, parabol $x = y^2 - 2$ trong hình 1.1.14(a) thì không phải là đồ thị của một hàm số của x bởi vì ta thấy có những trục dọc cắt parabol hai lần. Tuy nhiên, parabol chứa hai đồ thị của hai hàm số tương ứng của x. Chú ý rằng từ $x = y^2 - 2$ suy ra $y^2 = x + 2$, $y = \pm\sqrt{x+2}$. Vì vậy nửa trên và nửa dưới của parabol là những đồ thị của hàm số $f(x) = \sqrt{x+2}$ (từ ví dụ 6a) và hàm số $g(x) = -\sqrt{x+2}$. [Xem hình 1.1.14(b) và 1.1.14(c).] Chúng ta thấy rằng nếu đổi vai trò của x, y khi đó phương trình $x = h(y) = y^2 - 1$ định nghĩa x là hàm số của y (y là biến độc lập và x là biến phụ thuộc) và parabol trong hình 1.1.14(a) là đồ thị của hàm số h.



Hình 1.1.14: Đồ thị hàm số.

Những hàm số định nghĩa trên từng khoảng

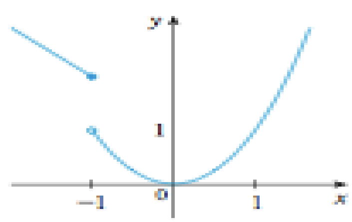
Những hàm số ở bốn ví dụ dưới đây được định nghĩa bằng những công thức khác nhau trên những phần của miền xác định. Những hàm số như thế được gọi là các hàm số định nghĩa trên từng khoảng.

Ví dụ 7. Hàm số f được định nghĩa như sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{nếu } x \leq -1 \\ x^2 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$

Tính $f(-2)$, $f(-1)$ và $f(0)$; Vẽ đồ thị hàm số.
Lời giải.
Nhắc lại một hàm số là một quy tắc. Đối với hàm số cụ thể cho trên, quy tắc như sau : đầu tiên xem xét các giá trị của dữ liệu vào x. Nếu $x \leq -1$ thì giá trị của $f(x)$ là $1 - x$. Nếu $x > -1$ thì giá trị của $f(x)$ là x^2.
Vì $-2 \leq -1$ nên $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.
Vì $-1 \leq -1$ nên $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.
Vì $0 > -1$ nên $f(0) = 0^2 = 0$.

Ta vẽ đồ thị hàm số trên bằng cách nào? Nhận thấy rằng khi $x \leq -1$ thì $f(x) = 1 - x$, vì vậy một phần đồ thị của hàm số f nằm bên trái của đường thẳng $x = -1$, nó trùng với đường thẳng $y = 1 - x$ có hệ số góc -1 và cắt trục y tại 1. Khi $x > -1$ một phần đồ thị sẽ nằm bên phải của đường thẳng $x = -1$, nó trùng với parabol $y = x^2$. Điều này giúp ta vẽ đồ thị hàm số f như trong hình 1.1.15. Điểm in đậm $(-1, 2)$ cũng nằm trên đồ thị, trong khi đó điểm $(-1, 1)$ không nằm trên đồ thị. □



Hình 1.1.15: Đồ thị hàm số f.

Ví dụ tiếp theo của hàm định nghĩa trên từng khoảng là hàm số giá trị tuyệt đối. Nhắc lại rằng giá trị tuyệt đối của một số a, ký hiệu là $|a|$, là khoảng cách từ a đến 0. Khoảng cách luôn luôn dương hay là 0, vì vậy

$$|a| \geq 0 \text{ với mọi số } a.$$

Ví dụ:

$$|3| = 3, \ |-3| = 3, \ |0| = 0, \ |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1, \ |3 - \pi| = \pi - 3.$$

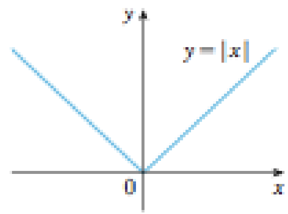
Tổng quát ta có

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 8. Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = |x|$.
Lời giải. Ta có

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

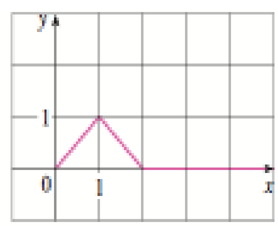
Sử dụng phương pháp tương tự như trong ví dụ 7, ta thấy rằng đồ thị của hàm số



Hình 1.1.16: Đồ thị hàm số giá trị tuyệt đối.

f trùng với đường thẳng $y = x$ bên phải trục toạ độ y và trùng với đường thẳng $y = -x$ nằm bên trái trục toạ độ y (xem Hình 1.1.16). □

Ví dụ 9. Tìm công thức của hàm số f có đồ thị như trong hình 1.1.17.



Hình 1.1.17:

Lời giải. Đường thẳng đi qua $(0,0), (1,1)$ có hệ số góc là $m = 1$ và cắt trục y tại $b = 0$, nên nó có phương trình là $y = x$. Vậy phần đồ thị nối điểm $(0,0)$ với điểm $(1,1)$ có phương trình của hàm số là

$$f(x) = x \text{ nếu } 0 \leq x \leq 1.$$

Đường thẳng đi qua $(1,1)$ và $(2,0)$ có hệ số góc $m = -1$, vì vậy nó có dạng

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \text{ hay } y = 2 - x$$

vậy ta có

$$f(x) = 2 - x \text{ nếu } 1 < x \leq 2.$$

Với $x > 2$, đồ thị hàm số trùng với trục x. Vậy công thức cho hàm số f gồm ba phần như sau

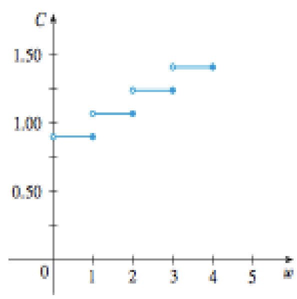
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{nếu } 2 < x\,. \end{cases}$$

□

Ví dụ 10. Trong ví dụ (**C**) ở phần đầu chương này, chúng ta xem xét giá của bưu kiện $C(\omega)$ gửi qua bưu điện với khối lượng ω. Từ bảng giá trị trong phần trước, ta có hàm số C là hàm được định nghĩa trên từng khoảng như sau :

$$C(\omega) = \begin{cases} 0.88 & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 1.05 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ 1.22 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 1.39 & \text{nếu } 3 < x \leq 4 \\ ... \end{cases}$$

Đồ thị như trong Hình 1.1.18. Ta thấy tại sao những hàm tương tự như hàm này



Hình 1.1.18: Hàm bậc thang.

được gọi là hàm bậc thang, hàm số nhảy từ giá trị này sang giá trị khác. Những hàm số như thế sẽ được nghiên cứu trong chương 2.

ĐỐI XỨNG

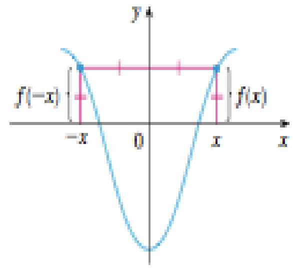
Nếu một hàm số f thoả mãn $f(-x) = f(x)$ với mọi số x trong miền xác định, thì hàm số f được gọi là *hàm chẵn*. Ví dụ, hàm số $f(x) = x^2$ là hàm chẵn bởi vì

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

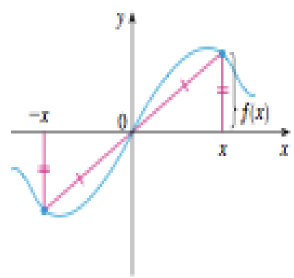
Tính chất hình học quan trọng của hàm chẵn là đồ thị của nó đối xứng qua trục toạ độ y. Điều này có nghĩa là ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm f cho $x \geq 0$, sau đó lấy đối xứng qua trục y để thu được toàn bộ đồ thị của hàm số f. (Xem hình 1.1.19.)
Nếu một hàm số f thoả mãn $f(-x) = -f(x)$ với mọi số x trong miền xác định, thì hàm số f được gọi là *hàm lẻ*. Ví dụ, hàm số $f(x) = x^3$ là hàm chẵn bởi vì

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Đồ thị hàm lẻ thì đối xứng qua tâm của trục toạ độ (Xem Hình 1.1.20.). Nếu chúng ta có đồ thị của hàm số f cho $x \leq 0$, chúng ta sẽ thu được toàn bộ đồ thị hàm số f qua phép đối xứng tâm.



Hình 1.1.19: Hàm chẵn.



Hình 1.1.20: Hàm lẻ.

Ví dụ 11. Xác định các hàm số sau là hàm chẵn hay hàm lẻ hay không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ:
(a) $f(x) = x^5 + x$
(b) $g(x) = 1 - x^4$
(c) $h(x) = 2x - x^2$.
Lời giải.
(a) Ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 - x \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Vậy f là hàm lẻ.
(b)

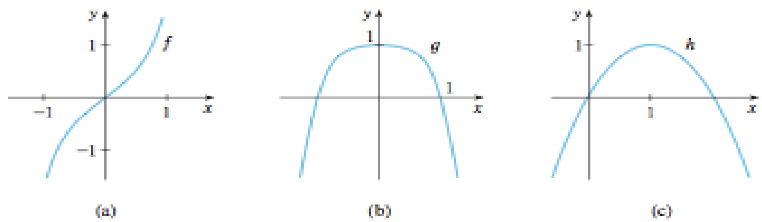
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x).$$

Vậy g là hàm chẵn.
(c)

$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2.$$

Vì $h(-x) \neq h(x)$ and $h(-x) \neq -h(x)$, nên hàm số h không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ. $\square$

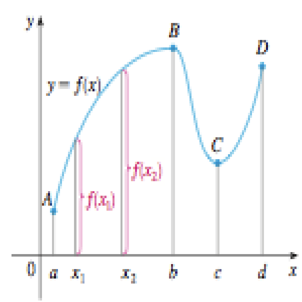
Đồ thị các hàm số trong ví dụ 11 được vẽ trong hình 1.1.21. Chú ý rằng đồ thị của hàm số h thì không đối xứng qua trục y cũng không đối xứng qua tâm trục toạ độ.



Hình 1.1.21:

Hàm tăng và hàm giảm
Đồ thị trong hình 1.1.22 đi lên từ A đến B và đi xuống từ B đến C, và lại đi lên từ C đến D. Hàm số f được gọi là tăng trên khoảng $[a, b]$, giảm trên $[b, c]$, và lại tăng trên $[c, d]$. Chú ý rằng nếu x_1, x_2 là hai điểm bất kỳ giữa a và b sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$. Ta dùng tính chất này để định nghĩa một hàm tăng.

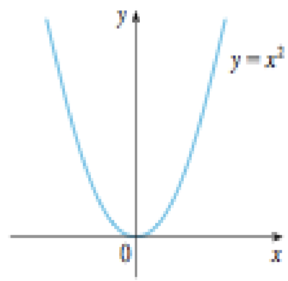
Một hàm số được gọi là hàm tăng trên khoảng I nếu
$f(x_1) < f(x_2)$ với mọi $x_1 < x_2$ trên I.
Một hàm số được gọi là hàm giảm trên khoảng I nếu
$f(x_1) > f(x_2)$ với mọi $x_1 < x_2$ trên I.



Hình 1.1.22:

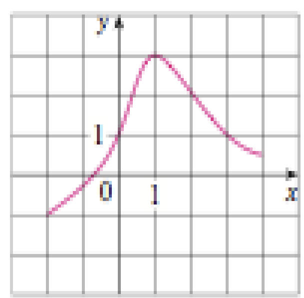
Trong định nghĩa của hàm tăng, tính chất quan trọng là bất đẳng thức $f(x_1) < f(x_2)$ với bất kỳ cặp số $x_1 < x_2$ nằm trong I. Ta có thể nhìn thấy trong Hình 1.1.23 hàm số $f(x) = x^2$ là hàm giảm trên khoảng $(-\infty, 0]$ và là hàm tăng trên khoảng $[0, \infty)$.

Bài tập 1.1.
1. Nếu $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ và $g(u) = u + \sqrt{2-u}$, phát biểu $f = g$ có đúng hay không?



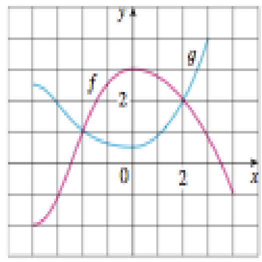
Hình 1.1.23:

2. Nếu
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \text{ và } g(x) = x$$
phát biểu $f = g$ có đúng hay không?
3. Cho đồ thị của hàm số f như sau:
(a) Tìm $f(1)$.



Hình 1.1.24: Bài tập 3.

(b) Ước lượng giá trị của $f(-1)$.
(c) Tìm x để $f(x) = 1$.
(d) Ước lượng giá trị của x để $f(x) = 0$.
(e) Tìm miền xác định và miền giá trị của f.
(f) Hàm số tăng trên khoảng nào?
4. Đồ thị của f, g được cho trong hình dưới
(a) Tìm $f(-4)$ và $g(3)$.
(b) Tìm x để $f(x) = g(x)$.
(c) Ước lượng nghiệm của phương trình $f(x) = -1$.
(d) Hàm số giảm trên khoảng nào?
(e) Tìm miền xác định và miền giá trị của f.
(f) Tìm miền xác định và miền giá trị của g.
5. Hình 1.1.1 được ghi lại bởi một dụng cụ được điều hành bởi khoa khai thác trắc địa thuộc trường đại học y tế, Đại học California, LA. Sử dụng hình này để ước

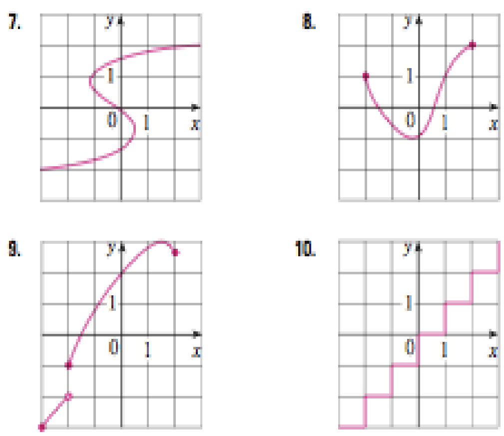


Hình 1.1.25: Bài tập 4.

lượng miền giá trị của hàm gia tốc theo chiều dọc đo địa chấn trong trận động đất Northridge.

6. Trong phần này chúng ta đã thảo luận ba ví dụ rất đời thường, dân số thế giới theo thời gian, giá bưu kiện theo khối lượng, nhiệt độ nước theo thời gian. Hãy tìm ba ví dụ về hàm số khác trong đời sống hằng ngày của bạn mà nó được mô tả bằng lời. Bạn có thể mô tả miền xác định và miền giá trị của các hàm số đó? Nếu có thể, bạn hãy vẽ sơ lược đồ thị các hàm số đó?

7-10. Xác định đường cong nào là đồ thị của một hàm số trong các hình sau:

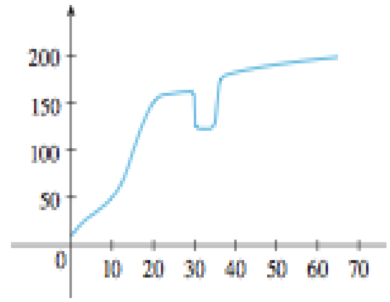


11. Đồ thị dưới đây mô tả cân nặng của một người theo tuổi của họ. Mô tả bằng lời cân nặng của người này thay đổi như thế nào theo tuổi? Bạn nhận xét gì về cân nặng của người này khi 30 tuổi?

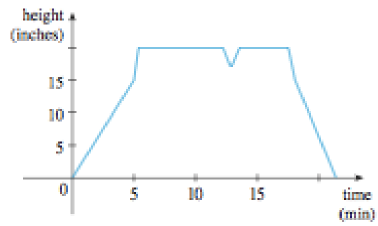
12. Đồ thị trong hình dưới mô tả chiều cao của mực nước trong bồn tắm như là một hàm số theo thời gian. Hãy mô tả bằng lời những gì bạn nghĩ về hình này?

13. Bạn đặt các cục đá khối vào trong cốc, đổ nước lạnh vào cốc, sau đó để cốc trên bàn. Mô tả sự thay đổi nhiệt độ của nước khi thời gian trôi qua. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị nhiệt độ của nước như là một hàm số theo thời gian.

14. Ba vận động viên tranh tài trên đường đua 100 mét. Đồ thị dưới mô tả quảng

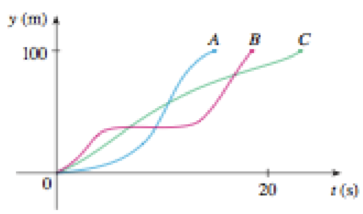


Hình 1.1.26: Bài tập 11



Hình 1.1.27: Bài tập 12.

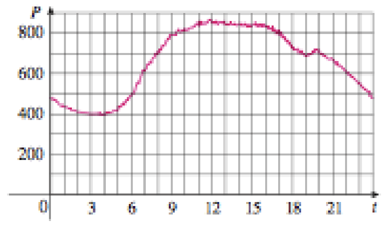
đường chạy của mỗi vận động viên như là một hàm số của thời gian. Mô tả bằng lời những gì đồ thị này biểu diễn về cuộc đua này? Ai chiến thắng cuộc đua này? Những ai hoàn thành cuộc đua?



Hình 1.1.28: Bài tập 14

15. Đồ thị dưới mô tả lượng năng lượng sử dụng trong một ngày tháng chín ở San Francisco. (P được đo bằng megawatts; t được đo theo giờ bắt đầu từ $0h$ khuya.)
(a) Tính năng lượng đã sử dụng lúc 6 giờ sáng, lúc 6 giờ chiều.
(b) Khi nào năng lượng sử dụng là thấp nhất? cao nhất? Thời gian này có hợp lý không?

16. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị của số giờ trời sáng như là một hàm số theo thời gian trong năm.
17. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị của nhiệt độ ngoài trời như là một hàm số theo thời gian trong suốt một ngày cụ thể mùa xuân.



Hình 1.1.29: Bài tập 15.

18. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị của giá cả thị trường của một xe hơi mới như là một hàm số của thời gian trong khoảng 20 năm. Giả sử xe được bảo trì rất tốt.
19. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị của lượng cà phê của một thương hiệu được bán tai một cửa hàng như là một hàm số của giá cả cà phê.
20. Đặt một cái bánh đông lạnh trong lò và nướng trong một giờ. Sau đó lấy nó ra, để nó mát trước khi ăn. Hãy mô tả sự thay đổi nhiệt độ của cái bánh khi thời gian trôi qua. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị của nhiệt độ của cái bánh như là một hàm số của thời gian.
21. Một người cắt cỏ trên bãi cỏ nhà mình mỗi chiều thứ 4. Vẽ phát thảo sơ lược đồ thị chiều cao của cỏ như là hàm số của thời gian trong khoảng 4 tuần.
22. Một máy bay cất cánh từ một sân bay và đáp xuống một sân bay khác cách 400 dặm sau một giờ. Nếu xem t chỉ thời gian theo phút từ khi rời sân bay của máy bay, xét hàm $x(t)$ là khoảng cách theo chiều ngang và $y(t)$ là độ cao của máy bay.
(a) Vẽ đồ thị có thể có của $x(t)$.
(b) Vẽ đồ thị có thể có của $y(t)$.
(c) Vẽ đồ thị có thể có của hàm tốc độ trên mặt đất của máy bay.
(d) Vẽ đồ thị có thể có của hàm gia tốc theo chiều dọc.
23. Số lượng N (theo đơn vị triệu) thuê bao di động tại Mỹ được cho trong hình dưới

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

(a) Vẽ phát thảo đồ thị của hàm số N theo thời gian t.
(b) Sử dụng đồ thị trên để ước lượng số thuê bao di động trong năm 2001 và 2005.
24. Nhiệt độ T (theo độ F) được ghi lại trong mỗi khoảng $2h$ từ giữa đêm đến 2 giờ chiều tại Phoenix vào 10/09/2008. Nhiệt độ đó được ghi lại theo thời gian được cho như bảng sau:

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

(a) Vẽ phát thảo đồ thị của hàm số T như là một hàm số của t.
(b) Dùng đồ thị trên ước lượng nhiệt độ lúc 9 giờ sáng.

25. Nếu $f(x) = 3x^2 - x + 2$, tìm $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $[f(a)]^2$, $f(a+h)$.

26. Một quả bóng hình cầu bán kính r có thể tích $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Tìm hàm số biểu diễn lượng không khí bơm vào bóng để tăng bán kính bóng lên $r+1$.

27 – **30** Rút gọn biểu thức của phép chia ứng với mỗi hàm cho trước.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

28. $f(x) = x^3$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

29. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

30. $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

31 – **37** Tìm miền xác định của các hàm số sau:

31. $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$.

32. $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$.

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t-1}$

34. $g(t) = \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$.

35. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$.

36. $f(u) = \frac{u+1}{1+\frac{1}{u+1}}$.

37. $F(p) = \sqrt{2-\sqrt{p}}$.

38. Tìm miền xác dịnh, miền giá trị và vẽ đồ thị của hàm số

$$h(x) = \sqrt{4-x^2}.$$

39 – **50** Tìm miền xác định và vẽ đồ thị của các hàm số sau

39. $f(x) = 2 - 0.4x$.

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$.

41. $f(t) = 2t + t^2$.

42. $H(t) = \frac{4-t^2}{2-t}$.

43. $g(x) = \sqrt{x-5}$.

44. $F(x) = |2x+1|$.

45. $G(x) = \frac{3x+|x|}{x}$.

46. $g(x) = |x| - x$.

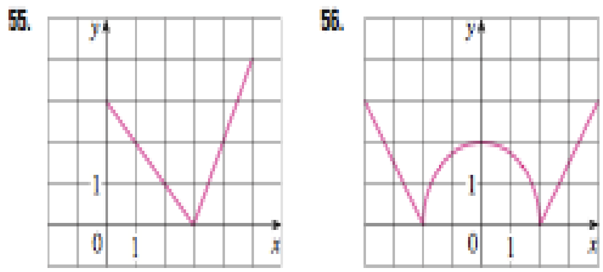
47.
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x < 0 \\ 1-x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

48.
$$f(x) = \begin{cases} 3-\frac{x}{2} & \text{nếu } x \leq 2 \\ 2x-5 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

49.
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x \leq -1 \\ x^2 & \text{nếu } x > -1 \end{cases}$$

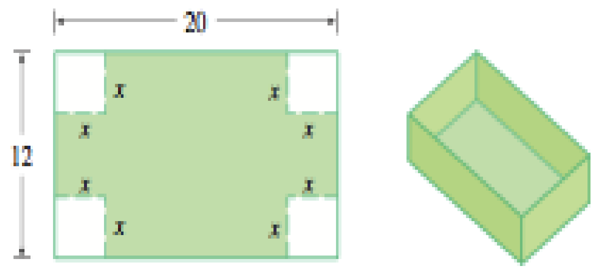
50.
$$f(x) = \begin{cases} x+9 & \text{nếu } x < -3 \\ -2x & \text{nếu } |x| \leq 3 \\ -6 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

51 – **56** Tìm biểu thức cho hàm số được mô tả bằng đồ thị sau
51. Đường thẳng nối hai điểm $(1, -3)$ và $(5, 7)$.
52. Đường thẳng nối hai điểm $(-5, 10)$ và $(7, -10)$.
53. Nửa dưới của parabol $x + (y-1)^2 = 0$.
54. Nửa trên của đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 4$.
55 – **56**.



57 – **61** Tìm công thức cho các hàm số được mô tả như sau và tìm miền xác định
57. Một hình chữ nhật có chu vi $20\,m$. Tìm công thức diện tích của hình chữ nhật đó theo độ dài của một trong các cạnh của nó.
58. Một hình chữ nhật có diện tích $16\,m^2$. Tìm công thức chu vi hình chữ nhật đó theo độ dài của một trong các cạnh của nó.
59. Tìm công thức diện tích của một tam giác đều theo chiều dài cạnh của nó.
60. Tìm diện tích bề mặt của một khối lập phương theo thể tích của nó.
61. Một khối hình hộp chữ nhật mở nắp có thể tích $2\,m^3$ có mặt đáy là hình vuông. Tìm diện tích bề mặt của hộp như là một hàm số của độ dài cạnh mặt đáy.
62. Một cánh cửa 'Norman' hình chữ nhật được trang trí bởi nửa hình tròn như trong hình dưới. Biết chu vi của nó là $30\,ft$, tìm công thức diện tích A của cánh cửa này theo chiêù rộng x của cánh cửa.

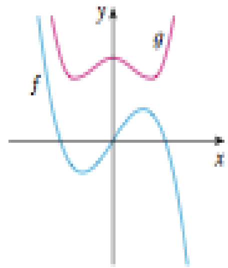
63. Một cái hộp mở nắp trên đỉnh được làm từ miếng giấy các tông hình chữ nhật với độ đo chiều dài rộng là 20, 12 và được cắt bốn hình vuông ở bốn góc như trong hình. Tìm thể tích của cái hộp theo x.



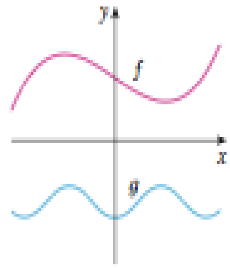
64. Một gói cước cho điện thoại với mức phí hàng tháng là 35 đô la. Gói cước gồm 400 phút miễn phí và trả thêm 10 xu cho một phút sử dụng ngoài số phút miễn phí. Tìm hàm số giá tiền C phải trả như là hàm số của số phút x và vẽ đồ thị của hàm số với $0 \leq x \leq 600$.
65. Một bang ở US quy định tốc độ tối đa và tối thiểu trên đường cao tốc lần lượt là 65 và 40 dặm một giờ. Nếu vi phạm tốc độ trên, nghĩa là chạy trên tốc độ tối đa và chạy dưới tốc độ tối thiểu, thì phải nộp phạt 15 đô la mỗi dặm trên giờ. Tìm số tiền phạt F như là một hàm số của tốc độ xe x và vẽ đồ thị hàm số $F(x)$ với $0 \leq x \leq 100$.
66. Một công ty điện thu phí cơ bản 10 đô la mỗi tháng với người dùng, và 6 xu cho một kilo oát (kWh) cho 1200 kWh đầu tiên, 7 xu/kWh cho người dùng trên 1200kWh. Tìm hàm số giá tiền hàng tháng C như là một hàm số của lượng điện x tiêu thụ. Vẽ đồ thị của hàm số $F(x)$ khi $0 \leq x \leq 2000$.
67. Ở một đất nước, thuế thu nhập cá nhân được tính như sau : không tính thuế cho người có thu nhập dưới 10000 đô la; tỉ lệ thuế 10 phần trăm cho mức thu nhập trên 10000 đô la cho đến 20000 đô la. Vơi mức trên 20000 đô la thì tỉ lệ thuế thu nhập là 15 phần trăm.
(a) Vẽ đồ thị tỉ lệ thuế thu nhập R như là một hàm số của thu nhập I.
(b) Ta phải nộp thuế bao nhiêu nếu thu nhập 14000 đô la, 26000 đô la.
(c) Vẽ đồ thị của hàm số T tổng thuế nộp như là một hàm số của thu nhập I.
68. Những hàm số trong ví dụ 10 và bài tập 67 được gọi là *hàm bậc thang* bởi vì nó có dạng như bậc thang. Tìm thêm hai ví dụ trong thực tế hàng ngày về hàm bậc thang.
69 – 70 Cho đồ thị của hàm số f và g. Tìm tính chẵn lẻ của các hàm số đó, giải thích vì sao?

71.
(a) Nếu điểm $(5, 3)$ nằm trên đồ thị hàm chẵn thì điểm nào phải cũng nằm trên đồ thị đó?
(b) Nếu điểm $(5, 3)$ nằm trên đồ thị hàm lẻ thì điểm nào phải cũng nằm trên đồ thị đó?

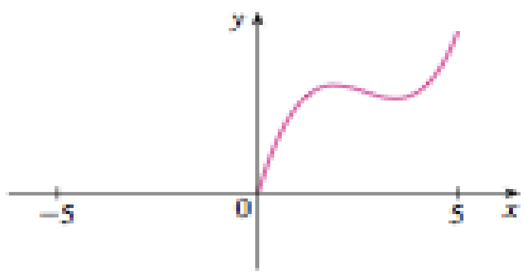
69.



70.



72. Một hàm số f có miền xác định $[-5, 5]$, và một phần đồ thị như trong hình dưới đây:
(a) Hoàn thành đồ thị hàm số nếu f là hàm chẵn.



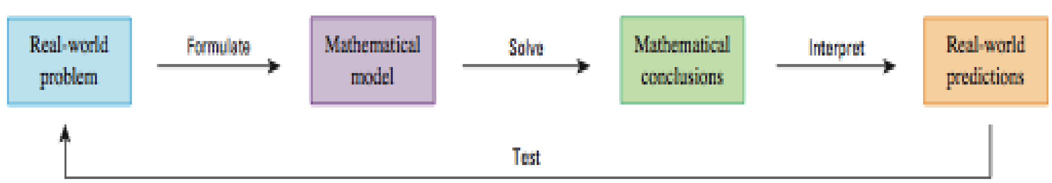
(b) Hoàn thành đồ thị hàm số nếu f là hàm lẻ.
73 – **78** Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau:
73.
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$
74.
$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$$
75.
$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$
76.
$$f(x) = x|x|$$
77.
$$f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$$
78.
$$f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$$
79. Nếu f, g là các hàm chẵn, hỏi hàm số $f + g$ có là hàm chẵn không? Nếu f, g là các hàm lẻ, hỏi hàm số $f + g$ có là hàm lẻ không? Nếu f là hàm chẵn, g là hàm lẻ thì $f + g$ là hàm gì?

80. Nếu f, g là các hàm chẵn, hỏi hàm số fg có là hàm chẵn không? Nếu f, g là các hàm lẻ, hỏi hàm số fg có là hàm lẻ không? Nếu f là hàm chẵn, g là hàm lẻ thì fg là hàm gì?

1.2 Các mô hình toán học: những hàm số quan trọng

Một **mô hình toán học** là một mô tả bằng toán học (theo nghĩa của một hàm số hay một phương trình) của một hiện tượng trong thế giới thực như là số lượng dân số thế giới, nhu cầu của một sản phẩm, tốc độ của một vật thể đang rơi, sự tập trung của một sản phẩm trong một phản ứng hoá học, dự đoán ngày sinh, hay giá cả của việc làm giảm chất phóng xạ. Mục đích của các mô hình là để hiểu được hiện tượng và có lẽ để đánh giá dự đoán cho tương lai.

Hình 1.2.1 minh hoạ quá trình của mô hình toán học. Cho trước một bài toán thực tế, câu hỏi đầu tiên là tìm công thức của mô hình toán học bằng cách nhận dạng, đặt tên cho các biến độc lập, phụ thuộc và đặt những giả thiết mà nó đủ làm đơn giản hiện tượng để xử lý bằng toán học. Chúng ta sử dụng sự hiểu biết về hiện tượng vật lý và kỹ năng toán học để thu được các phương trình mà chúng liên quan đến các biến. Trong một số trường hợp, chúng ta không có các định luật vật lý thì phải thu thập dữ liệu (từ thư viện hay Internet hay từ thí nghiệm) và tạo bảng dữ liệu để phân biệt các mẫu mô hình. Từ biểu diễn số của một hàm số, ta có thể thu được biểu diễn hình học bằng cách vẽ các dữ liệu trên sơ đồ. Đồ thị có thể đề xuất một công thức đại số trong một số trường hợp.



Hình 1.2.1: Quá trình mô hình toán.

Bước thứ hai là áp dụng toán học mà ta biết (như phép tính vi tích phân) vào các mô hình toán học để thu được các kết luận một cách toán học. Sau đó, bước thứ ba, chúng ta sử dụng những kết luận này và xem chúng như những thông tin về thế giới thực bằng cách đưa ra những giải thích hay tạo ra các dự đoán. Bước cuối cùng là kiểm tra các dự đoán bằng các dữ liệu mới trong thực tế của hiện tượng. Nếu dự đoán không phù hợp với thực tế thì chúng ta cần làm tốt mô hình hay tạo ra mô hình mới và bắt đầu lại chu trình như trên.

Một mô hình toán học không bao giờ là một biểu diễn chính xác của một hiện tượng vật lý – nó gọi là *sự lý tưởng hoá*. Một mô hình tốt là nó đủ thực tế để chấp nhận một mô hình toán học và đủ chính xác để cung cấp các kết luận có giá trị. Nó rất quan trọng để thấy rằng các mô hình toán học có các hạn chế.

Có nhiều hàm số khác nhau mà nó có thể được sử dụng để mô hình các mối quan hệ được quan sát trong thế giới thực. Chúng ta sẽ thảo luận dáng điệu và đồ thị của những hàm số này và cho các ví dụ của các hiện tượng thích hợp được mô hình bởi những hàm như thế.

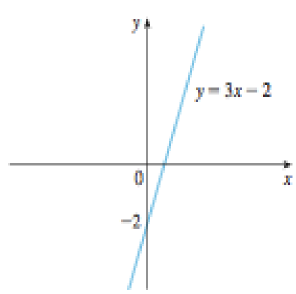
MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH

Khi chúng ta nói rằng y là một hàm số tuyến tính của x, nó có nghĩa rằng đồ thị của hàm số là một đường thẳng, vì vậy chúng ta sử dụng dạng hệ số góc−điểm giao của phương trình đường thẳng để viết công thức cho hàm số như sau

$$y = f(x) = mx + b$$

ở đây m là hệ số góc và b là điểm giao với trục y.

Tính chất đặc trưng của một hàm tuyến tính là nó 'phát triển' với một tỉ lệ hằng số. Ví dụ, hình 1.2.2 cho ta đồ thị của hàm số $f(x) = 3x - 2$ và một bảng của các giá trị mẫu. Chú ý rằng khi x tăng 0.1 thì giá trị $f(x)$ tăng 0.3. Vậy f tăng nhanh gấp 3 lần x, và độ nghiêng của đồ thị là 3 có thể được giải thích như là tỉ lệ thay đổi của y so với x.



Hình 1.2.2:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x) = 3x - 2$	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5

Ví dụ 12. (a) Khi không khí khô di chuyển lên trên, nó giãn nở và nguội đi. Nếu nhiệt độ ngoài trời là 20 độ C và nhiệt độ tại độ cao 1km là 10 độ C, tìm công thức

cho hàm nhiệt độ T theo độ cao h (km) biết rằng mô hình tuyến tính là phù hợp.
(b) Vẽ đồ thị của hàm số trên. Độ nghiêng hay hệ số góc của đồ thị nói lên điều gì?
(c) Tìm nhiệt độ tại độ cao 2.5 km?
Lời giải.
(a) Ta có thể viết

$$T(h) = mh + b.$$

Khi $T = 20$ thì $h = 0$ nên

$$20 = m.0 + b = b.$$

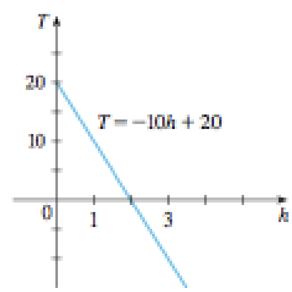
Khi $T = 10$ thì $h = 1$ nên

$$10 = m + b = m + 20.$$

Do vậy hệ số góc là $m = -10$ và hàm tuyến tính cần tìm là

$$T = -10h + 20.$$

(b) Đồ thị được vẽ trong hình 1.2.3. Hệ số góc là $m = -10C^o/km$ biểu diễn tỉ lệ thay đổi của nhiệt độ so với độ cao.



Hình 1.2.3:

(c) Tại độ cao $h = 2.5$ km, nhiệt độ là

$$T = -10(2.5) + 20 = -5.$$

□

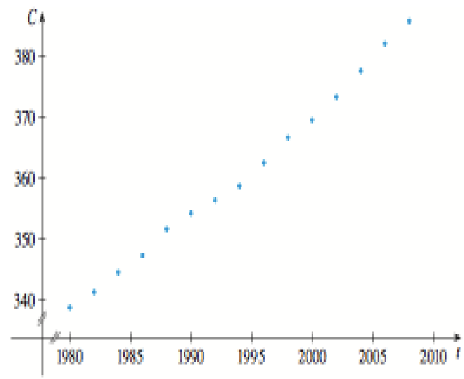
Nếu không có các định luật và quy tắc giúp ta tạo ra một mô hình, chúng ta sẽ xây dựng một **mô hình thực nghiệm** mà nó dựa hoàn toàn vào việc thu thập dữ liệu. Chúng ta tìm một đường cong phù hợp với dữ liệu theo nghĩa nó xấp xỉ các điểm dữ liệu.

Ví dụ 13. Bảng dưới liệt kê mức CO_2 trung bình trong khí quyển, được đo bằng đơn vị ppm ở Mỹ từ năm 1980 đến 2008. Sử dụng bảng để tìm mô hình cho mức CO_2 trong khí quyển.
Lời giải.

Năm	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Mực CO_2 (ppm)	338.7	341.2	344.4	347.2	351.5	354.2	356.3	358.6

Năm	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Mực CO_2 (ppm)	362.4	366.5	369.4	373.2	377.5	381.9	385.6

Sử dụng dữ liệu trong bảng để vẽ đồ thị như trong hình 1.2.4, ở đây t biểu diễn cho thời gian và C biểu diễn cho mức CO_2 (theo ppm).



Hình 1.2.4:

Chú ý rằng các điểm dữ liệu xuất hiện gần với một đường thẳng, vì vậy rất tự nhiên nếu ta chọn mô hình tuyến tính cho trường hợp này. Nhưng có nhiều đường thẳng xấp xỉ các điểm dữ liệu này, vậy ta chọn đường thẳng nào? Một lựa chọn là đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối trong các điểm dữ liệu. Hệ số góc là

$$\frac{385.6 - 338.7}{2008 - 1980} = \frac{46.9}{28} = 1.675$$

và phương trình là

$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980)$$

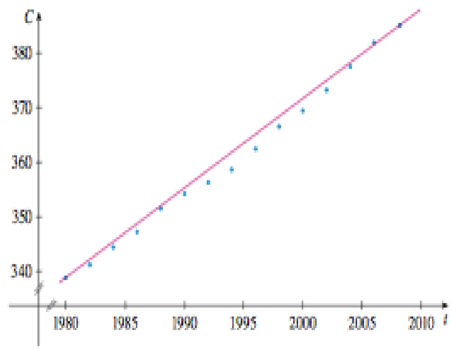
hay

$$C = 1.675t - 2977.8.$$

Phương trình trên cho ta một mô hình tuyến tính của mức CO_2 trong khí quyển, đồ thị của nó như trong hình 1.2.5.

Chú ý rằng mô hình của chúng ta cho những giá trị cao hơn hầu hết các mức CO_2 thực tế. Một mô hình tuyến tính tốt hơn được đề xuất bằng một phương pháp trong thống kê, đó là hồi quy tuyến tính. Nếu ta sử dụng một máy tính có chức năng vẽ hình, ta nhập dữ liệu như trong bảng sau đó chọn nút 'hồi quy tuyến tính' (ví dụ Maple, sử dụng lệnh fit[leastsquare], in Mathematica húng ta dùng lệnh Fit.). Máy tính sẽ cho kết quả hệ số góc và điểm giao với trục y là

$$m = 1.65429, \quad b = -2938.07.$$



Hình 1.2.5: Mô hình tuyến tính nối điểm đầu và cuối.

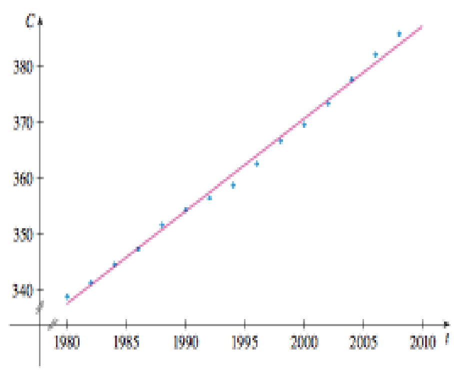
Vì vậy mô hình hồi quy tuyến tính của mức CO_2 là

$$C = 1.65429t - 2938.07.$$

□

Một máy tính hay máy tính bỏ túi sẽ tìm đường thẳng hồi quy bằng phương pháp bình phương bé nhất nghĩa là làm nhỏ nhất tổng bình phương khoảng cách theo chiều dọc từ điểm dữ liệu đến đường thẳng. Chi tiết được giải thích trong phần 14.7.

Trong hình 1.2.6 chúng ta vẽ cả đường thẳng hồi quy tuyến tính và điểm dữ liệu. So sánh với hình 1.2.5, hình này cho kết quả xấp xỉ tốt hơn.



Hình 1.2.6: Đường hồi quy tuyến tính.

Ví dụ 14. Sử dụng mô hình tuyến tính bởi phương trình hồi quy tuyến tính trên để ước lượng mức CO_2 trung bình cho năm 1987 và dự đoán mức CO_2 cho năm 2015. Thông qua mô hình này, khi nào mức CO_2 vượt qua 420 ppm?

Lời giải.
Sử dụng phương trình hồi quy tuyến tính ta có với $t = 1987$ và $t = 2015$ là

$$C(1987) = (1.65429)(1987) - 2938.07 \approx 349$$

$$C(2015) = (1.65429)(2015) - 2938.07 \approx 395.32.$$

Thực tế, kết quả đo được vào năm 1987 là 348.93 ppm, so với kết quả trên thì mô hình chúng ta khá chính xác. Chúng ta thấy rằng, mức CO_2 trung bình vượt quá 420 ppm khi

$$1.65429t - 2938.07 > 420$$

hay

$$t > \frac{3358.07}{1.65429} \approx 2029.92.$$

Vì vậy chúng ta dự đoán mức CO_2 sẽ vượt quá 420 ppm vào năm 2030. Dự đoán này khá không chắc chắn vì thực tế qua quan sát. Trong Hình 1.2.6, lượng CO_2 tăng nhanh trong những năm gần đây, vì vậy nó có thể vượt qua mức 420 ppm trước năm 2030. □

ĐA THỨC

Một hàm số P được gọi là một đa thức nếu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ở đây n là một số tự nhiên và các số $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ là các hằng số và được gọi là các **hệ số** của đa thức. Miền xác định của đa thức là $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Nếu hệ số $a_n \neq 0$ thì **bậc** của đa thức là n. Ví dụ hàm số

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

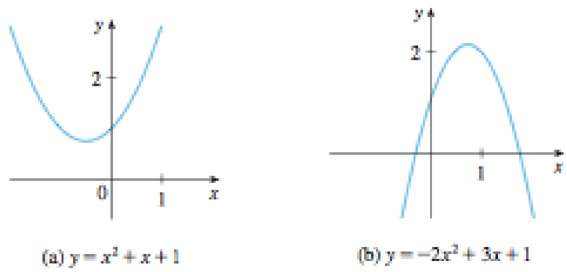
là một đa thức bậc 6.

Một đa thức bậc 1 sẽ có dạng $P(x) = mx + b$, vì vậy nó là một hàm tuyến tính. Một đa thức bậc 2 sẽ có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ và được gọi là hàm bậc hai. Đồ thị của nó là hình parabol thu được bằng cách chuyển parabol $y = ax^2$ như ta sẽ thấy trong phần tiếp theo. Parabol mở hướng lên nếu $a > 0$, úp xuống nếu $a < 0$. (Xem hình 1.2.7.)

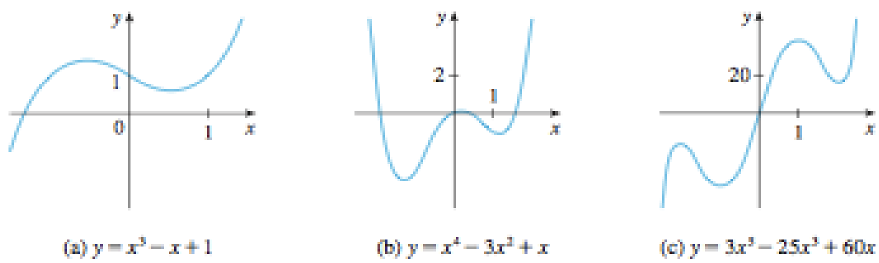
Một đa thức bậc 3 sẽ có dạng

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

được gọi là hàm bậc ba. Hình 1.2.8 là đồ thị của một hàm bậc ba trong phần (a), và đồ thị của đa thức bậc $4, 5$ trong phần $(b), (c)$. Chúng ta sẽ nghiên cứu vì sao các đồ thị có hình dạng như thế trong các phần tiếp theo.



Hình 1.2.7: Đồ thị hàm bậc hai.



Hình 1.2.8: Đồ thị hàm đa thức.

Đa thức được sử dụng phổ biến để mô hình các đại lượng khác nhau xảy ra trong khoa học tự nhiên và xã hội. Ví dụ trong phần 2.7 chúng ta sẽ giải thích tại sao các nhà kinh tế thường sử dụng đa thức $P(x)$ để biểu diễn giá cả của một số lượng sản phẩm x. Trong ví dụ sau, ta sử dụng hàm bậc hai để mô hình sự rơi xuống của một quả bóng.

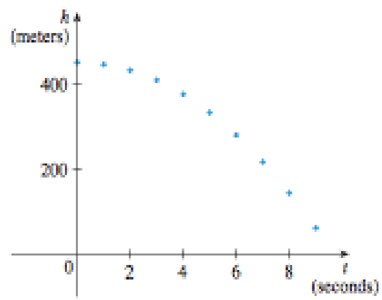
Ví dụ 15. Một quả bóng được thả xuống từ một đài quan sát có độ cao 450 mét so với mặt đất. Độ cao h của quả bóng được ghi lại theo từng giây bóng rơi trong bảng sau. Tìm một mô hình phù hợp với dữ liệu thu được và dự đoán thời gian bóng chạm đất.

Thời gian (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Độ cao (m)	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

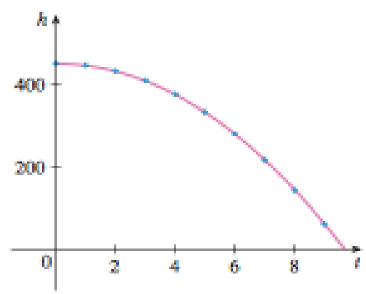
Lời giải.
Chúng ta vẽ các điểm dữ liệu trên hình 1.2.9, quan sát rằng mô hình tuyến tính không phù hợp. Nhưng hình dáng gần giống với parabol, vì vậy ta thử sử dụng mô hình bậc hai cho dữ liệu này. Sử dụng máy tính hay phần mềm có phương pháp hồi quy bậc hai, ta thu được mô hình bậc hai như sau

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2.$$

Trong hình 1.2.10, ta vẽ đồ thị hàm số trên và các điểm dữ liệu của ta. Quan sát hình ta thấy mô hình khá phù hợp với dữ liệu. Quả bóng chạm đất khi $h = 0$ chúng



Hình 1.2.9: Đồ thị dữ liệu.



Hình 1.2.10: Hồi quy bậc hai.

ta giải phương trình

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

thu được

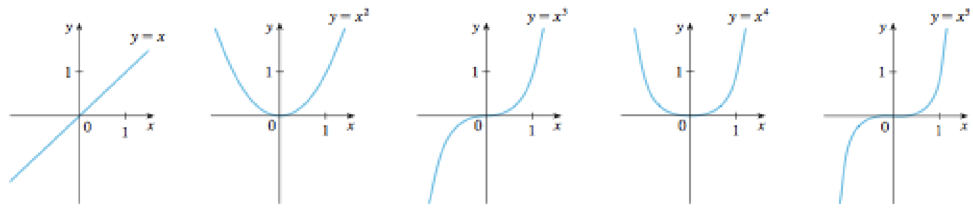
$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4.(-4.90)(449.36)}}{2.(-4.90)}.$$

Nghiệm dương $t \approx 9.67$, vì vậy ta dự đoán thời gian bóng chạm đất là 9.7 giây. $\square$

HÀM LUỸ THỪA

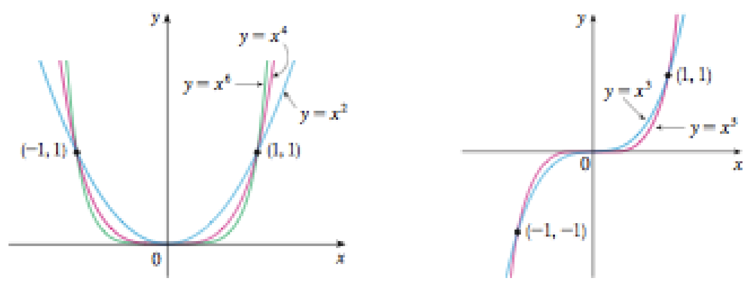
Một hàm số có dạng $f(x) = x^a$, với a là một hằng số, được gọi là **hàm luỹ thừa**. Chúng ta xem xét các trường hợp sau.
(i) $a = n$ **với** n **là số nguyên dương.**

Đồ thị của hàm số $f(x) = x^n$, với $n = 1, 2, 3, 4$ và 5 được vẽ trong hình 1.2.11. Chúng ta đã nghiên cứu đồ thị của hàm số $y = x$ (đường thẳng qua gốc toạ độ và có hệ số góc 1) và đồ thị parabol $y = x^2$ (Ví dụ 2(b) trong phần 1.1).



Hình 1.2.11: Đồ thị hàm số $f(x) = x^n$.

Hình dạng tổng quát của hàm số $f(x) = x^n$ phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n. Nếu n chẵn, thì hàm số $f(x) = x^n$ là hàm chẵn và đồ thị của nó tương tự như parabol $y = x^2$. Nếu n lẻ thì hàm số $f(x) = x^n$ là hàm lẻ và đồ thị của nó tương tự như đồ thị của hàm số $y = x^3$. Chú ý rằng từ hình 1.2.12, khi n tăng lên, đồ thị hàm số $y = x^n$ trở nên tẹt ra hơn và dốc hơn khi $|x| \geq 1$. (Nếu x nhỏ thì x^2 nhỏ hơn, x^3 nhỏ hơn nữa và x^4 nhỏ hơn nhiều,...)



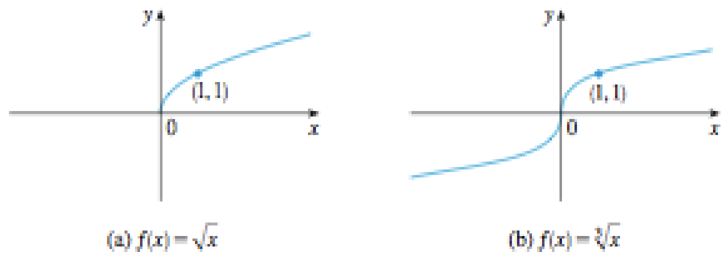
Hình 1.2.12: Họ hàm luỹ thừa.

(ii) $a = 1/n$ **với** n **là số nguyên dương.**

Hàm số $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ là **hàm căn thức**. Với $n = 2$, hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ là hàm căn bậc hai, có miền giá trị là $[0, \infty)$ và đồ thị của nó là nửa trên của parabol $x = y^2$. (Xem hình 1.2.13(a).) Đối với những giá trị chẵn khác của n, đồ thị hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ thì tương tự với đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$. Với $n = 3$, ta có hàm căn bậc ba $f(x) = \sqrt[3]{x}$ và đồ thị của nó trong hình 1.2.13(b). Đồ thị của hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ với n lẻ thì tương tự như đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$.

(iii) $a = -1$**.**

Đồ thị của hàm nghịch đảo $f(x) = x^{-1}$ được vẽ trong hình 1.2.14. Đồ thị có phương trình $y = 1/x$ hay $xy = 1$, và là một hyperbol tiệm cận về hai trục của nó. Hàm số này được đưa ra từ vật lý và hoá học bởi định luật Boyle, định luật nói rằng

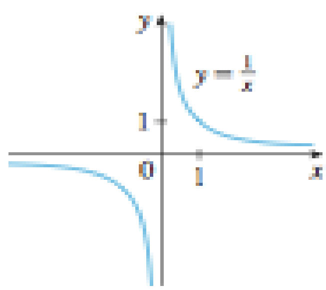


Hình 1.2.13: Hàm lấy căn.

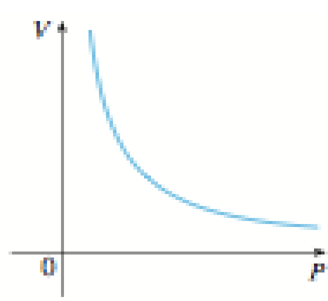
khi nhiệt độ là một hằng số thể tích V của ga tỉ lệ nghịch với áp suất P

$$V = \frac{C}{P}$$

với C là một hằng số. Đồ thị của V là một hàm số của P như trong hình 1.2.15 có hình dạng tương tự như nửa phải của hình 1.2.14.



Hình 1.2.14: Hàm nghịch đảo.



Hình 1.2.15: Thể tích là hàm số theo áp suất.

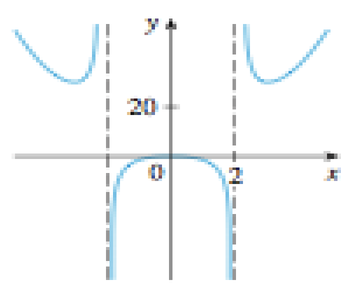
Hàm luỹ thừa cũng được mô hình các mối tương tác các loài trong vùng sinh thái (Bài tập $26, 27$), độ chiếu sáng như là một hàm theo khoảng cách đến nguồn chiếu sáng (Bài tập 25), chu kỳ quay vòng của các hành tinh như là một hàm số của khoảng cách đến mặt trời (Bài tập 28).

HÀM PHÂN THỨC

Một **hàm phân thức** là tỉ số của hai đa thức

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

với P và Q là các đa thức. Miền xác định là các giá trị của x sao cho $Q(x) \neq 0$. Một ví dụ đơn giản của hàm phân thức là $f(x) = 1/x$ với miền xác định là $\{x : x \neq 0\}$, là hàm nghịch đảo được cho trong hình 1.2.14. Hàm số



Hình 1.2.16: $f(x) = \frac{2x^4-x^2+1}{x^2-4}$.

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

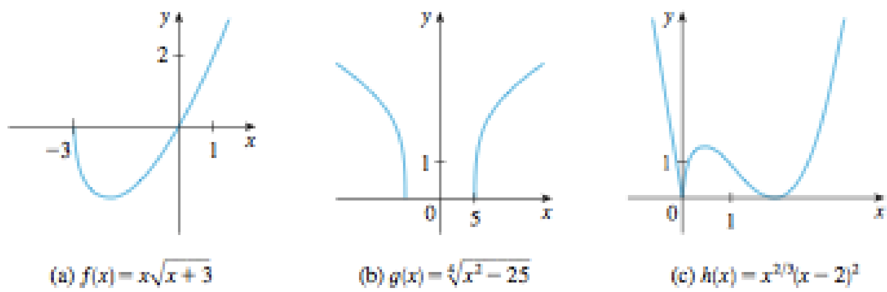
là một hàm phân số với miền xác định là $\{x : x \neq \pm 2\}$. Đồ thị của nó như trong hình 1.2.16.

HÀM ĐẠI SỐ

Một hàm số được gọi là **hàm đại số** nếu nó được tạo thành từ các phép tính đại số (như cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn) của các đa thức. Bất kỳ hàm phân thức nào cũng là hàm đại số. Ví dụ về hàm đại số

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}\ ,\ g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}.$$

Khi vẽ các đồ thị của hàm đại số trong Chương 3, chúng ta sẽ thấy đồ thị của nó có nhiều hình dạng khác nhau. Hình 1.2.17 minh hoạ một vài hình dạng có thể của hàm đại số.



Hình 1.2.17: $f(x)$.

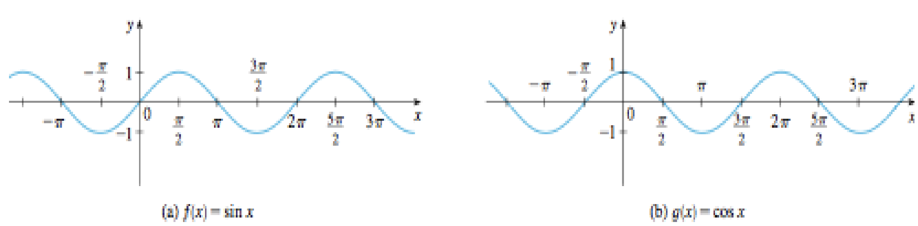
Một ví dụ của một hàm đại số xảy ra trong lý thuyết tương đối. Khối lượng của một phân tử với vận tốc v là

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ở đây m_0 là khối lượng nghỉ của phân tử và $c = 3.0 \times 10^5$ km/s là tốc độ ánh sáng trong chân không.

HÀM LƯỢNG GIÁC

Tính chất lượng giác và các hàm số lượng giác được xem xét trong phần phụ lục D. Trong phép tính vi tích phân thông thường độ đo góc được tính bằng radian (π *radian* $= 180^0$, các trường hợp khác thì sẽ được đề cập). Ví dụ, khi sử dụng hàm số $f(x) = \sin x$ thì ta hiểu là góc x được tính theo đơn vị radian. Vì vậy đồ thị của các hàm sin, cos được vẽ như trong hình 1.2.18.



Hình 1.2.18: Hàm sin, cos.

Nhận xét rằng cả hai hàm sin, cos có miền xác định là $(-\infty, \infty)$ và miền giá trị là khoảng đóng $[-1, 1]$. Vì vậy với mọi x ta có

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

hay

$$|\sin x|, |\cos x| \leq 1.$$

Hơn nữa,

$$\sin x = 0 \quad \text{khi } x = n\pi, \quad n \text{ là số nguyên.}$$

Một tính chất quan trọng của hàm sin, cos là tính tuần hoàn, chu kỳ 2π. Nghĩa là, với mọi giá trị của x

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Sự tuần hoàn tự nhiên của những hàm số này thích hợp làm mô hình cho các hiện tượng lặp đi lặp lại như triều cường, dao động lò xo, sóng âm. Trong ví dụ 20 ở phần 1.3 ta sẽ xem xét một mô hình thích hợp cho số giờ trời sáng trong một ngày ở Philadelphia là một hàm số theo số ngày t sau ngày 1/1

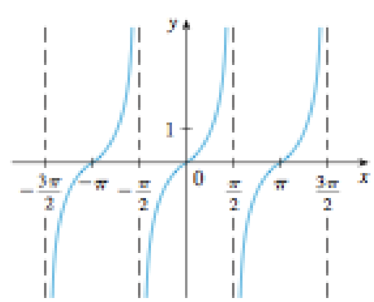
$$L(t) = 12 + 2.8 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right].$$

Hàm tan liên quan đến hàm sin và cos bởi phương trình

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

và đồ thị của nó như trong hình 1.2.19. Nó không được định nghĩa tại $\cos x = 0$, nghĩa là khi $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$ Miền giá trị của nó là $(-\infty, \infty)$. Chú ý rằng hàm tan là hàm tuần hoàn chu kỳ π:

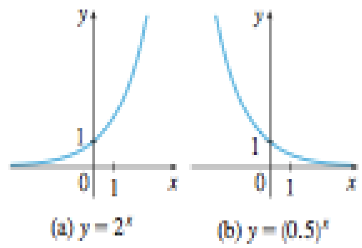
$$\tan(x + \pi) = \tan x \text{ với mọi } x.$$



Hình 1.2.19: Hàm $y = \tan x$.

Ba hàm số lượng giác khác $(\csc, \sec, \cot)$ là hàm nghịch đảo của các hàm số $\sin, \cos, \tan$. Đồ thị của chúng được vẽ trong Phụ lục D.

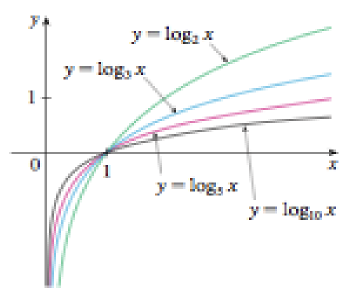
HÀM MŨ



Hình 1.2.20: Hàm $y = a^x$.

Hàm số mũ là hàm số có dạng $f(x) = a^x$, ở đây cơ số a là một hằng số dương. Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ và $y = (0.5)^x$ được vẽ trong hình 1.2.20. Cả hai hàm số có miền xác định là $(-\infty, \infty)$ và miền giá trị $(0, \infty)$.

Hàm số mũ được nghiên cứu trong Chương 6 và nó rất hữu ích cho mô hình các hiện tượng tự nhiên như sự phát triển dân số (nếu $a > 1$) và sự phân rã phóng xạ (nếu $a < 1$).



Hình 1.2.21: Hàm $y = \log$.

HÀM LOGARIT

Hàm logarit $f(x) = \log_a x$ ở đây cơ số a là một hằng số dương, là một hàm ngược của hàm số mũ. Chúng được nghiên cứu trong Chương 6. Hình 1.2.21 chỉ ra bốn đồ thị của hàm số logarit với các cơ số khác nhau. Trong mỗi trường hợp miền xác định là $(0, \infty)$ và miền giá trị là $(-\infty, \infty)$, hàm số tăng một cách chậm rãi khi $x > 1$.

Ví dụ 16. Phân loại các hàm số sau:
(a)

$$f(x) = 5^x$$

(b)

$$g(x) = x^5$$

(c)

$$h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$$

(d)

$$u(t) = 1 - t + 5t^4$$

Lời giải.
(a) Hàm số $f(x) = 5^x$ là hàm mũ.
(b) Hàm số $g(x) = x^5$ là hàm luỹ thừa.
(c) Hàm số h là hàm số đại số.
(d) Hàm số u là hàm đa thức bậc 4. □

Bài tập 1.2.
1 − 2 Phân loại các hàm số sau (nếu là hàm đa thức tìm bậc của đa thức đó)
1.
(a)

$$f(x) = \log_2 x.$$

(b)

$$g(x) = \sqrt[4]{x}.$$

(c)

$$h(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}.$$

(d)

$$u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2.$$

(e)

$$v(t) = 5^t.$$

(f)

$$\omega(\delta) = \sin\delta\cos^2\delta.$$

2.
(a)

$$y = \pi^x.$$

(b)

$$y = x^\pi.$$

(c)

$$y = x^2(2 - x^3).$$

(d)

$$y = \tan t - \cos t.$$

(e)

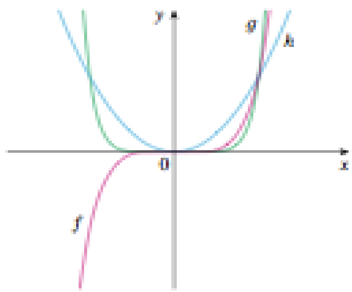
$$y = \frac{s}{1+s}.$$

(f)

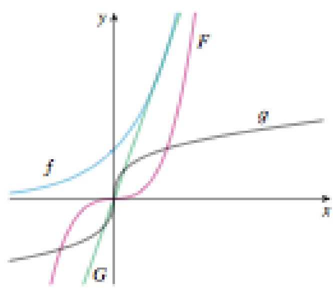
$$y = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

3 – **4** Tìm phương trình phù hợp với đồ thị sau và giải thích vì sao:

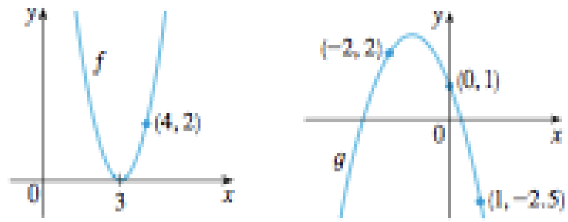
3. $a.\ y = x^2,\quad b.\ y = x^5,\quad c.\ y = x^8.$



4. $a.\ y = 3x,\quad b.\ y = 3^x,\quad c.\ y = x^3,\quad d.\ y = \sqrt[3]{x}.$



5.
(a) Tìm một phương trình cho họ các hàm tuyến tính có hệ số góc là 2 và vẽ đồ thị một vài hàm số trên.
(b) Tìm một phương trình cho họ các hàm tuyến tính thoả mãn $f(2) = 1$ và vẽ đồ thị một vài hàm số trên.
(c) Tìm những hàm số thoả mãn cả hai tính chất trong câu a và b.
6. Nêu tính chất chung của họ các hàm số tuyến tính có dạng $f(x) = 1 + m(x + 3)$. Vẽ đồ thị một vài hàm số trên.
7. Nêu tính chất chung của họ các hàm số tuyến tính có dạng $f(x) = c - x$. Vẽ đồ thị một vài hàm số trên.
8. Tìm biểu thức hàm bậc hai có đồ thị như hình sau:
9. Tìm biểu thức hàm bậc ba sao cho $f(1) = 6$ và $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.
10. Một nghiên cứu gần đây chỉ ra rằng nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất tăng lên một cách đều đặn. Các nhà khoa học đã mô hình nhiệt độ đó bằng hàm số tuyến tính $T = 0.02t + 8.50$, với T là nhiệt độ theo độ C, t là số năm kể từ năm

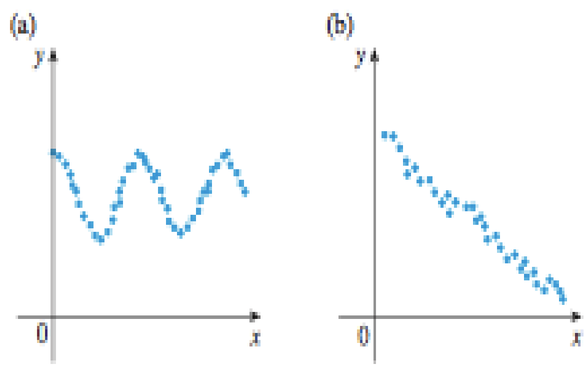


Hình 1.2.22: Bài tập 8.

1900.
(a) Tìm hệ số góc và điểm giao với trục T.
(b) Sử dụng phương trình này để dự đoán nhiệt độ bề mặt trái đất trong năm 2100.
11. Nếu gọi liều lượng thuốc dùng cho người lớn là D (mg), thì để xác định liều lượng c cho trẻ em a tuổi thì bác sỹ sử dụng công thức $c = 0.0417D(a+1)$. Giả sử liều lượng thuốc cho người lớn là 200 mg.
(a) Tìm hệ số góc của đồ thị hàm số c theo a. Nó nói lên điều gì?
(b) Tìm liều lượng thuốc cho trẻ sơ sinh.
12. Nhà quản lý của một khu chợ ngoài trời cuối tuần thông qua kinh nghiệm quản lý nhận thấy rằng nếu ông ta thu phí x đô la cho một nơi bán trong chợ (kiot) thì số lượng y kiot được cho bởi phương trình $y = 200 - 4x$.
(a) Vẽ đồ thị của hàm số này.
(b) Hệ số góc, giao điểm với trục y, giao điểm với trục x nói lên điều gì?
13. Mối quan hệ giữa độ F (Fahrenheit) và độ C (Celsius) được cho bởi phương trình $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Vẽ đồ thị hàm số này.
(b) Tìm hệ số góc của đồ thị hàm số và nêu ý nghĩa của nó. Tìm giao điểm với trục F và nêu ý nghĩa của nó.
14. Jason rời Detroit lúc 2 giờ chiều và chạy với vận tốc không đổi. Anh ấy tới AnnaArbor cách Detroit 40 dặm vào lúc $2h50$ chiều.
(a) Tìm quảng đường đi được của Jason theo thời gian đi được.
(b) Vẽ đồ thị hàm số trên.
(c) Tìm hệ số góc và ý nghĩa của nó.
15. Các nhà nghiên cứu sinh học nhận thấy rằng tiếng kêu của loài dế thì liên quan đến nhiệt độ của nó và mối quan hệ này gần tuyến tính. Một con dế kêu 117 tiếng trên phút tại 70 độ F và kêu 173 tiếng tại 80 độ F.
(a) Tìm phương trình tuyến tính mô tả nhiệt độ T như là một hàm số của số tiếng kêu của dê trên một phút N.
(b) Tìm hệ số góc và ý nghĩa của nó.
(c) Nếu một con dế kêu 150 tiếng trên phút, tìm nhiệt độ của nó.
16. Một quản lý của một nhà máy sản xuất đồ gỗ nhận thấy rằng cần bỏ ra 2200 đô la để sản xuất 100 cái ghế, 4800 đô la để sản xuất 300 cái ghế.
(a) Tìm giá tiền như là một hàm số của số lượng ghế cần sản xuất biết nó là một

hàm tuyến tính. Vẽ đồ thị hàm số.
(b) Tìm hệ số góc và ý nghĩa của nó.
(c) Tìm giao điểm trục y và nêu ý nghĩa của nó.
17. Tại bề mặt đại dương, áp suất nước thì bằng áp suất khí quyển trên mặt nước đó và là 15 lb/in^2. Bên dưới mặt nước áp suất nước tăng lên $4.34\,lb/in^2$ cho mỗi $10\,ft$ sâu xuống.
(a) Tìm áp suất nước như là một hàm số của độ sâu dưới mặt nước.
(b) Với độ sâu nào thì áp suất là $100\,lb/in^2$.
18. Giá tiền hàng tháng cho một chiếc xe hơi phụ thuộc vào quảng đường (theo dặm) đã đi. Lynn nhận thấy rằng trong tháng 5 cô ấy tốn 380 đô la cho quảng đường 480 dặm, trong tháng 6 tốn 460 đô la cho 800 dặm.
(a) Tìm biểu thức giá tiền C như là một hàm số theo quảng đường đã đi d, giả sử rằng mô hình tuyến tính là phù hợp.
(b) Tìm giá tiền cho quảng đường 1500 dặm đi được.
(c) Vẽ đồ thị và nêu ý nghĩa của hệ số góc.
(d) Nêu ý nghĩa của giao điểm với trục C.
(e) Tại sao mô hình tuyến tính thì phù hợp với trường hợp này.
19 – **20**. Với mỗi đồ thị rời rạc sau, xác định loại hàm số mà bạn chọn để mô hình dữ liệu. Giải thích cách chọn của bạn.

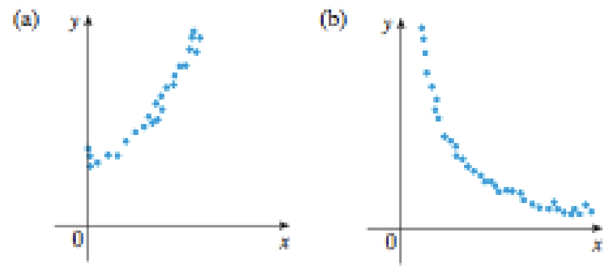
19.



Hình 1.2.23: Bài tập 19.

20.

21. Bảng dưới chỉ tỉ lệ loét đường tiêu hoá (trên 100 người) cho các gia đình có thu nhập khác nhau.



Hình 1.2.24: Bài tập 20.

Thu nhập (đô la)	tỉ lệ bệnh
4000	14.1
6000	13.0
8000	13.4
12000	12.5
16000	12.0
20000	12.4
30000	10.5
45000	9.4
60000	8.2

(a) Vẽ đồ thị rời rạc của dữ liệu và xem xét mô hình tuyến tính có phù hợp hay không?
(b) Tìm và vẽ đồ thị đường thẳng nối điểm đầu và cuối dữ liệu.
(c) Tìm đồ thị bằng phương pháp hồi quy tuyến tính.
(d) Ước lượng tỉ lệ loét đường tiêu hoá cho gia đình thu nhập 25000 đô la bằng mô hình tuyến tính trong câu c.
(e) Khả năng nào cho người có thu nhập 80000 đô la bị viêm loét đường tiêu hoá.
(f) Bạn có nghĩ rằng nó phù hợp để sử dụng mô hình này cho người có thu nhập 200000 đô la.
22. Các nhà sinh học quan sát được rằng tỉ lệ tiếng kêu của dế liên quan đến nhiệt độ. Bảng sau chỉ ra mối quan hệ đó.

Nhiệt độ (F)	tỉ lệ tiếng dế kêu	Nhiệt độ (F)	tỉ lệ tiếng dế kêu
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

(a) Vẽ các điểm dữ liệu đó.
(b) Vẽ đường hồi quy tuyến tính của nó.

(c) Ước lượng tiếng kêu của dế tại 100 độ F.
23. Bảng dưới cho ta chiều cao để chiến thắng ở giải nhảy sào ở các kỳ Olympic cho đến năm 2004.

Năm	Chiều cao (m)	Năm	Chiều cao (m)
1896	3.30	1960	4.70
1900	3.30	1964	5.10
1904	3.50	1968	5.40
1908	3.71	1972	5.64
1912	3.95	1976	5.64
1920	4.09	1980	5.78
1924	4.20	1984	5.75
1928	4.20	1988	5.90
1932	4.31	1992	5.87
1936	4.35	1996	5.92
1948	4.30	2000	5.90
1952	4.55	2004	5.95
1956	4.56		

(a) Vẽ đồ thị rời rạc của các điểm dữ liệu và xem xét liệu mô hình tuyến tính có phù hợp hay không?
(b) Tìm vẽ đồ thị đường hồi quy tuyến tính.
(c) Sử dụng mô hình trên để dự đoán chiều cao để chiến thắng ở Olympic 2008 và so sánh với thực tế 5.96 mét.
(d) Có hợp lý hay không nếu ta dùng mô hình dự đoán chiều cao chiến thắng cho Olympic năm 2100.
24. Bảng dưới chỉ tỉ lệ phần trăm dân số sống ở nông thôn của Argentina từ năm 1955 đến năm 2000. Tìm một mô hình cho dữ liệu và ước lượng tỉ lệ phần trăm cho năm 1988 và năm 2002.

Năm	tỉ lệ dân nông thôn	Năm	tỉ lệ dân nông thôn
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. Rất nhiều đại lượng vật lý có mối liên hệ với nghịch đảo bậc hai, nghĩa là có dạng $y = kx^{-2}$. Độ sáng của một vật thể bởi một nguồn chiếu sáng thì tỉ lệ thuận với nghịch đảo bình phương khoảng cách đến nguồn chiếu sáng. Trong phòng tối có một cái đèn, bạn muốn đọc sách nhưng quá mờ. Nếu bạn di chuyển lại gần đèn một nửa khoảng cách ban đầu, hỏi độ sáng sẽ tốt hơn như thế nào?

26. Một nơi rộng lớn thì sẽ có nhiều loài sinh sống. Các nhà sinh thái học đã mô hình mối quan hệ môi trường-loài bằng một hàm luỹ thừa, số lượng loài S của dơi sống trong hang ở trung tâm Mexico thì liên quan với diện tích bề mặt A của hang bởi phương trình $S = 0.7A^{0.3}$.
(a) Có bao nhiêu loài sinh sống tại bề mặt có diện tích $A = 60\,m^2$.
(b) Nếu bạn tìm thấy có 4 loài dơi sinh sống trong hang, hỏi diện tích bề mặt hang?
27. Bảng dưới chỉ số lượng N loài bò sát và lưỡng cư sinh sống ở quần đảo Caribbean và diện tích A của quần đảo theo dặm bình phương.

Đảo	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3459	40
Jamaica	4411	39
Hispaniola	29418	84
Cuba	44218	76

(a) Sử dụng hàm luỹ thừa để mô hình N là một hàm số của A.
(b) Đảo Caribbean của Dominica có diện tích 291 m^2. Hỏi có bao nhiêu loài bò sát và lưỡng cư sinh sống trên đó.
28. Bảng dưới cho ta khoảng cách trung bình d của các hành tinh từ mặt trời (đơn vị là khoảng cách từ trái đất đến mặt trời) và chu kỳ T (thời gian theo năm).

Hành tinh	d	T
Sao Thuỷ	0.387	0.241
Sao Kim	0.723	0.615
Trái đất	1.000	1.000
Sao Hoả	1.523	1.881
Sao Mộc	5.203	11.861
Sao Thổ	9.541	29.457
Sao Thiên Vương	19.190	84.008
Sao Hải Vương	30.086	164.784

(a) Tìm một mô hình hàm luỹ thừa phù hợp với dữ liệu.
(b) Định luật ba của Kepler về sự dịch chuyển các hành tinh nói rằng "Bình phương chu kỳ tiến hoá của một hành tinh thì tỉ lệ thuận với bậc ba của khoảng cách trung bình của nó từ mặt trời". So sánh mô hình của bạn với định luật này.

1.3 Một số cách tạo một hàm số

Trong phần này ta bắt đầu với những hàm số cơ bản mà ta đã thảo luận trong phần 1.2 và thu được những hàm số mới bằng cách dịch chuyển, co giãn và chiếu đồ thị của chúng. Chúng ta cũng nghiên cứu cách liên kết hai hàm số bằng những thuật toán chuẩn và bằng phép hợp.

Biến đổi hàm số

Bằng cách áp dụng những phép biến đổi cho đồ thị của một hàm số cho trước, chúng ta có thể thu được những đồ thị của các hàm số liên quan. Điều này cho ta khả năng vẽ đồ thị các hàm số một cách nhanh chóng. Nó cũng có thể giúp ta viết được phương trình cho các đồ thị cho trước. Đầu tiên, ta xem xét phép tịnh tiến. Cho c là một số dương, khi đó đồ thị của hàm số $y = f(x) + c$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được dịch chuyển lên trên một khoảng c. Tương tự là đồ thị hàm số $g(x) = f(x - c)$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ dịch chuyển qua phải c đơn vị theo trục x (xem hình 1.3.1).

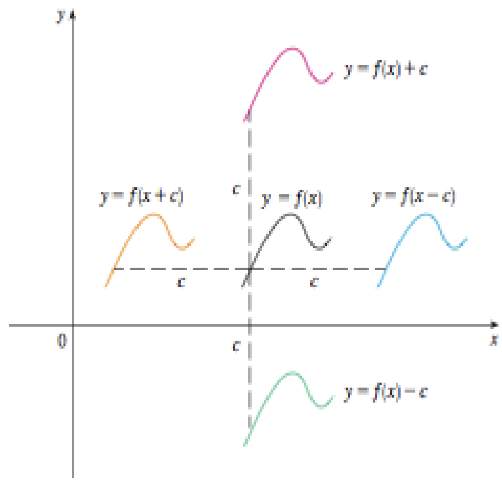
Dịch chuyển theo chiều dọc và ngang: Giả sử $c > 0$, ta thu được đồ thị của
$y = f(x) + c$ bằng cách dịch chuyển đồ thị của $y = f(x)$ lên trên theo chiều dọc c đơn vị,
$y = f(x) - c$ bằng cách dịch chuyển đồ thị của $y = f(x)$ xuống dưới theo chiều dọc c đơn vị,
$y = f(x - c)$ bằng cách dịch chuyển đồ thị của $y = f(x)$ qua phải theo chiều ngang c đơn vị,
$y = f(x + c)$ bằng cách dịch chuyển đồ thị của $y = f(x)$ qua trái theo chiều ngang c đơn vị.

Tiếp theo ta xem xét phép co giãn và phép chiếu. Nếu $c > 1$ thì đồ thị hàm số $y = cf(x)$ là đồ thị của $y = f(x)$ được giãn ra bởi hệ số nhân (còn gọi là thừa số nhân) c theo chiều dọc. Đồ thị của hàm số $y = -f(x)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ chiếu qua trục x bởi vì điểm (x, y) được thay thế bởi điểm $(x, -y)$ (xem hình 1.3.2 và tóm tắt).

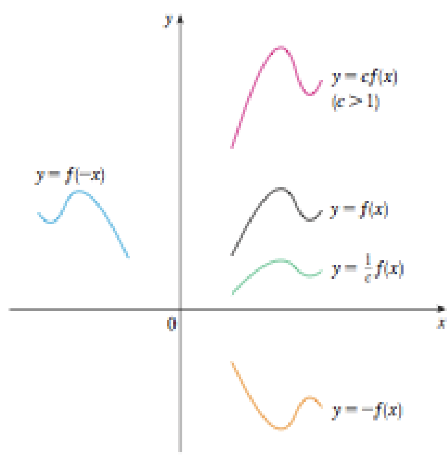
Phép co giãn và chiếu theo chiều dọc và ngang
Giả sử $c > 1$ Ta thu được đồ thị của
$y = cf(x)$ bằng cách giãn đồ thị của $y = f(x)$ theo chiều dọc bởi thừa số nhân c,
$y = (1/c)f(x)$ bằng cách co đồ thị của $y = f(x)$ theo chiều dọc bởi thừa số nhân c,
$y = f(cx)$ bằng cách co đồ thị của $y = f(x)$ theo chiều ngang bởi thừa số nhân c,
$y = f(x/c)$ bằng cách giãn đồ thị của $y = f(x)$ theo chiều ngang bởi thừa số nhân c,
$y = -f(x)$ bằng cách chiếu đồ thị của $y = f(x)$ qua trục x,
$y = f(-x)$ bằng cách giãn đồ thị của $y = f(x)$ qua trục y.

Hình 1.3.3 minh hoạ những phép co giãn cho hàm cos với $c = 2$. Ví dụ để có đồ thị của hàm số $y = 2\cos x$ ta nhân đôi toạ độ y của mỗi điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$. Điều này có nghĩa là đồ thị hàm số $y = \cos x$ được giãn ra theo chiều dọc bởi thừa số nhân 2.

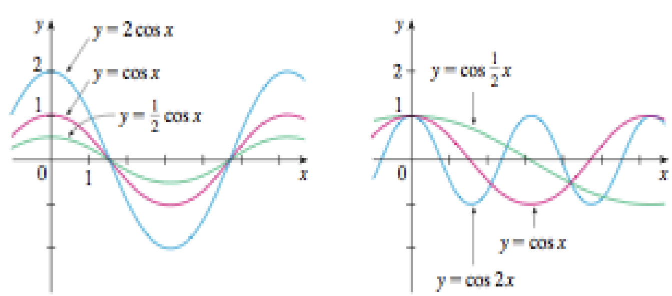
Ví dụ 17. Cho đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$, dùng các phép biến đổi để vẽ đồ thị



Hình 1.3.1: Phép tịnh tiến.



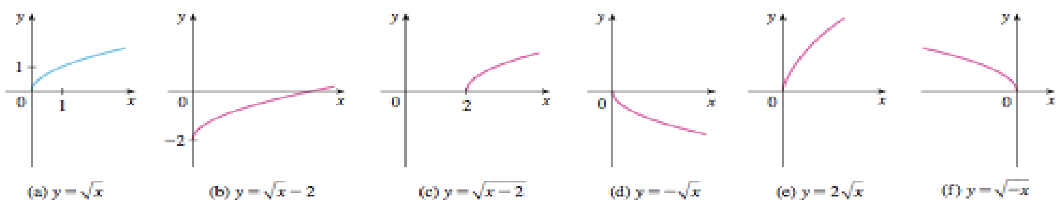
Hình 1.3.2: Phép co giãn và đối xứng.



Hình 1.3.3: Phép co giãn và đối xứng cho hàm cos

hàm số $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$.

Lời giải. Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ trong hình 1.3.4(a). Ta vẽ các đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x} - 2$ bằng cách dịch chuyển đồ thị trong hình 1.3.4(a) xuống dưới 2 đơn vị, của $y = \sqrt{x-2}$ bằng cách dịch chuyển qua phải 2 đơn vị, của $y = -\sqrt{x}$ bằng cách chiếu đối xứng qua trục x, của $y = \sqrt{-x}$ bằng cách chiếu đối xứng qua trục y. □



Hình 1.3.4: Hình

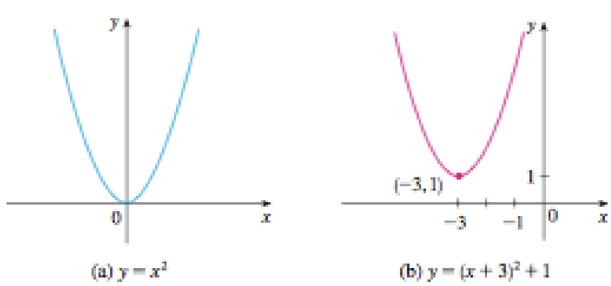
Ví dụ 18. Vẽ đồ thị của hàm số sau

$$f(x) = x^2 + 6x + 10.$$

Lời giải. Ta viết phương trình dưới dạng

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1.$$

Đầu tiên ta vẽ parabol $y = x^2$, sau đó ta dịch chuyển đồ thị này qua trái 3 đơn vị. Cuối cùng ta dịch chuyển đồ thị vừa thu được lên trên 1 đơn vị, ta có đồ thị cần tìm. (xem hình 1.3.5) □



Hình 1.3.5: Parabol

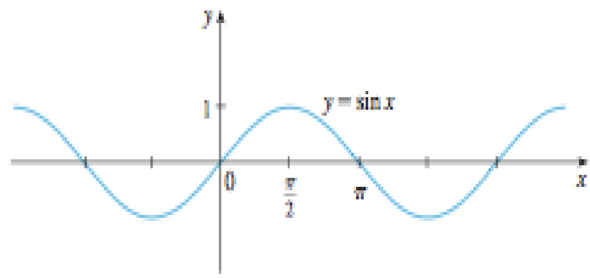
Ví dụ 19. Vẽ đồ thị các hàm số sau

$$a.\ y = \sin 2x. \quad b.\ y = 1 - \sin x.$$

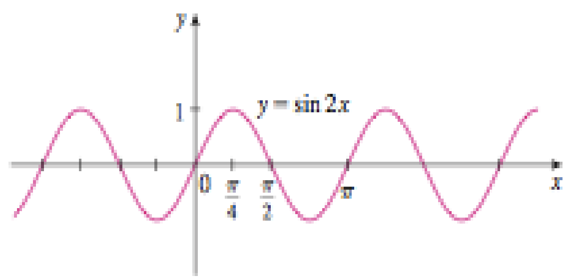
Lời giải.

(a) Ta thu được đồ thị của hàm số $y = \sin 2x$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng phép co theo chiều ngang với hệ số nhân là 2. (Xem hình 1.3.6 và 1.3.7) Chu kỳ của hàm số $y = \sin x$ là 2π thì chu kỳ của hàm số $y = \sin 2x$ là π.

(b) Để thu được đồ thị của hàm số $y = 1 - \sin x$, ta dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$.

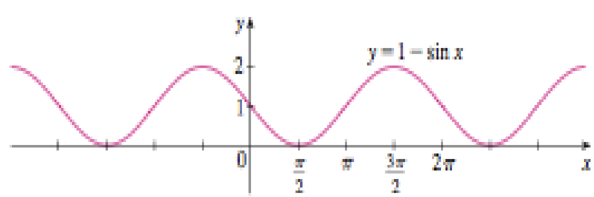


Hình 1.3.6: $y = \sin x$



Hình 1.3.7: $y = \sin 2x$

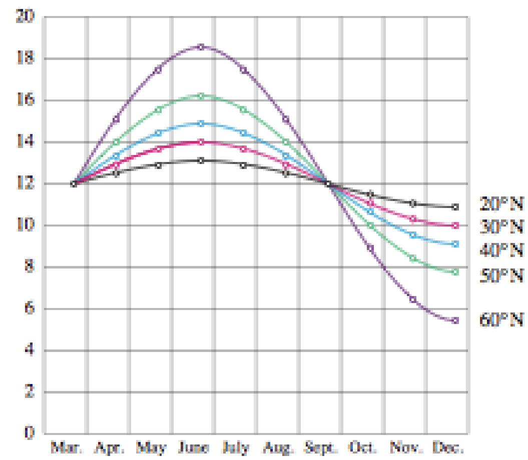
Đầu tiên ta chiếu đối xứng qua trục x để thu được đồ thị hàm số $y = -\sin x$, sau đó ta dich chuyển đồ thị lên trên 1 đơn vị để có đồ thị hàm số $y = 1 - \sin x$. (xem hình 1.3.8) □



Hình 1.3.8: $y = 1 - \sin x$

Ví dụ 20. Hình 1.3.9 vẽ đồ thị các hàm số của số giờ sáng trong ngày như là hàm số theo thời gian của năm tại một vài vĩ tuyến. Philadelphia được xác định gần 40 độ N vĩ tuyến, tìm một hàm số mô hình độ dài của ngày sáng ở Philadelphia tại một ngày trong năm.

Lời giải.



Hình 1.3.9: Số giờ sáng trong ngày tại các vĩ tuyến khác nhau.

Nhận thấy rằng mỗi đường cong trên hình giống như đồ thị hàm sin được dịch chuyển, co giãn. Xem xét đường nằm giữa trong 5 đường trên hình, số giờ sáng vào ngày 21/6 là 14.8 giờ và vào ngày 21/12 là 9.2 giờ, vì vậy độ rộng của đường cong (hệ số nhân ta cần co giãn hàm sin theo chiều dọc) là $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$. Thừa số (hệ số nhân) chúng ta cần co giãn hàm sin theo chiều ngang là bao nhiêu nếu ta giả sử thời gian t là số ngày sau ngày bắt đầu của mô hình? Một năm có 365 ngày, vì vậy chu kỳ của mô hình này là 365. Nhưng chu kỳ của hàm sin là 2π, vì vậy hệ số nhân của phép co giãn theo chiều ngang là $c = 2\pi/365$. Ta cũng chú ý rằng đường cong bắt đầu từ ngày 21/3 là ngày thứ 80 của năm, vì vậy ta dịch chuyển đường cong qua phải 80 đơn vị. Hơn nữa, ta dịch chuyển đường cong lên trên 12 đơn vị, vì vậy mô hình cho số giờ sáng của ngày thứ t của năm ở Philadelphia là

$$L(t) = 12 + 2.8 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right].$$

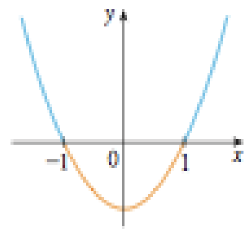
□

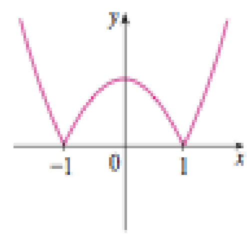
Một phép biến đổi khác của một hàm số là hàm số giá trị tuyệt đối. Nếu $y = |f(x)|$, theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối thì $y = f(x)$ nếu $f(x) \geq 0$ và $y = -f(x)$ nếu $f(x) < 0$. Điều này cho phép ta vẽ đồ thị hàm giá trị tuyệt đối từ đồ thị hàm số $y = f(x)$. Ta giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ nằm phía trên trục x, đối với phần nằm dưới ta sẽ dùng phép chiếu đối xứng qua trục x.

Ví dụ 21. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$.
Lời giải. Đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ như trong hình 1.3.10(a) bằng cách dịch chuyển parabol $y = x^2$ xuống dưới 1 đơn vị. Phần đồ thị nằm dưới trục x tương ứng với giá trị $-1 < x < 1$, ta lấy đối xứng qua trục x được đồ thị hàm số

cần vẽ như trong hình 1.3.10(b).

□





Hình 1.3.10: Đồ thị hàm giá trị tuyệt đối.

Sự kết hợp các hàm số

Hai hàm số f và g có thể được kết hợp lại để hình thành nên hàm số mới dạng $f+g$, $f-g$, fg, f/g bằng các phép tính cộng trừ nhân chia như trong phép tính các số thực. Tổng và hiệu các hàm số được định nghĩa bởi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Nếu miền xác định của f, g lần lượt là A, B thì miền xác định của $f+g$ là phần giao của hai tập hợp đó $A \cap B$. Ví dụ miền xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ là $A = [0, \infty)$, miền xác định của hàm số $g(x) = \sqrt{2-x}$ là $B = (-\infty, 2]$, khi đó miền xác định của hàm số $f+g$ là $A \cap B = [0, 2]$.
Tương tự, tích và thương của hai hàm số được định nghĩa như sau

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Miền xác định của fg là $A \cap B$. Vì ta không thể chia cho 0 nên miền xác định của f/g là $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Ví dụ cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 1$ thì miền xác định của hàm thương f/g là $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

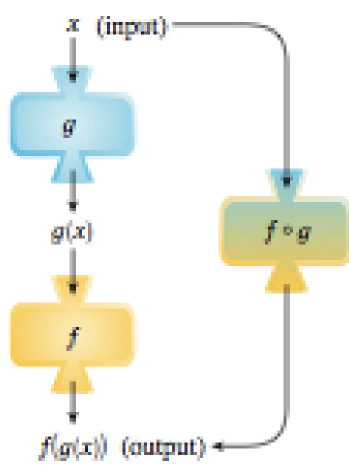
Có một cách khác để kết hợp hai hàm số để thu được một hàm số mới. Ví dụ $y = f(u) = \sqrt{u}$ và $u = g(x) = x^2 + 1$. Từ y là một hàm số của u và u là một hàm số của x, kéo theo y là một hàm số của x. Tính toán bằng cách thay thế ta có

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Quá trình trên được gọi là **hợp** bởi vì hàm mới được kết hợp từ hai hàm cho trước. Tổng quát cho trước hai hàm số f, g, ta bắt đầu từ x trong miền xác định của g và tìm ảnh của hàm số $g(x)$. Nếu $g(x)$ nằm trong miền xác định của f thì ta tính $f(g(x))$. Chú ý rằng dữ liệu ra của một hàm số là dữ liệu vào của hàm số còn lại. Kết quả là một hàm số $h(x) = f(g(x))$ thu được bằng cách thay g vào f. Nó được gọi là hàm hợp của f và g và được ký hiệu là $f \circ g$.

Định nghĩa
Cho trước hai hàm số f và g, hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa bởi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Miền xác định của $f \circ g$ là tập hợp tất cả giá trị của x trong miền xác định của g sao cho $g(x)$ nằm trong miền xác định của f. Nghĩa là $(f \circ g)(x)$ được định nghĩa nếu cả hai $g(x)$ và $f(g(x))$ đều được định nghĩa. Hình 1.3.11 mô tả hình ảnh cách hoạt động của hàm hợp.



Hình 1.3.11: Công thức hoạt động cho hàm hợp.

Ví dụ 22. Nếu $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 3$, tính hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$.
Lời giải. Ta có

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3.$$

□

Chú thích : Qua ví dụ 22, tổng quát ta có $f\circ g \neq g\circ f$. Khi ta nói $f\circ g$, nghĩa là ta tác động vào g trước, sau đó ta tác động vào f. Trong ví dụ 22, $f\circ g$ là hàm số mà ta đầu tiên trừ đi 3 rồi lấy bình phương, còn hàm số $g\circ f$ thì ta lấy bình phương trước sau đó trừ đi 3.

Ví dụ 23. Cho $f(x)=\sqrt{x}$ và $g(x)=\sqrt{2-x}$. Tìm các hàm số sau và miền xác định của chúng.
a. $f\circ g$ *b.* $g\circ f$ *c.* $f\circ f$ *d.* $g\circ g$.
Lời giải.
(*a*) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{2-x})=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x}$.
Miền xác định của $f\circ g$ là $\{x \mid 2-x\geq 0\}=(-\infty,2]$.
(*b*) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{2-\sqrt{x}}$.
Để $\sqrt{x}$ có nghĩa thì $x\geq 0$ và để $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ có nghĩa thì $2-\sqrt{x}\geq 0$ hay $x\leq 4$. Vậy miền xác định của hàm số $g\circ f$ là $[0,4]$.
(*c*) $(f\circ f)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$.
Miền xác định của $f\circ f$ là $[0,\infty)$.
(*d*) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(\sqrt{2-x})=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$.
Biểu thức trên có nghĩa khi $2-x\geq 0$ và $2-\sqrt{2-x}\geq 0$. Bất đẳng thức đầu tiên cho ta $x\leq 2$ và bất đẳng thức thứ hai cho ta $-2\leq x$. Vậy miền xác định của $g\circ g$ là $[-2,2]$. □

Chú ý rằng chúng ta có thể lấy hàm hợp của ba hàm số hay nhiều hàm số hơn nữa. Ví dụ hàm hợp $f\circ g\circ h$ được xác định bằng cách tính áp dụng vào h trước nhất, sau đó là g và cuối cùng là f:

$$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x))).$$

Ví dụ 24. Tìm $f\circ g\circ h$ biết $f(x)=x/(x+1)$, $g(x)=x^{10}$, $h(x)=x+3$.
Lời giải.

$$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=f(g(x+3))=f((x+3)^{10})=\frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}.$$

□

Chúng ta đã sử dụng hàm hợp để xây dựng các hàm phức tạp từ những hàm đơn giản. Nhưng trong phép tính vi tích phân, chúng ta thường phân rã các hàm phức tạp thành các hàm đơn giản như ví dụ sau.

Ví dụ 25. Cho hàm số $F(x)=\cos^2(x+9)$, tìm các hàm số f,g,h sao cho $F=f\circ g\circ h$.
Lời giải. Từ công thức $F(x)=[\cos(x+9)]^2$, mô tả bằng lời hàm số F ta nói trước hết ta cộng 9, sau đó lấy cos của kết quả đó và cuối cùng lấy bình phương. Vì vậy ta đặt

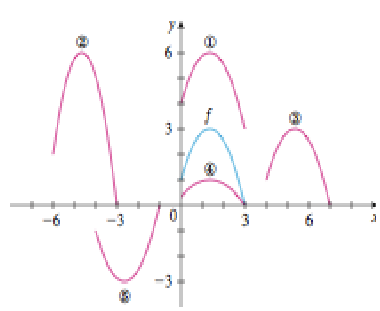
$$h(x)=x+9,\quad g(x)=\cos x,\quad f(x)=x^2$$

khi đó ta có

$$f(g(h(x))) = f(g(x+9)) = f(\cos(x+9) = [\cos(x+9)]^2 = F(x).$$

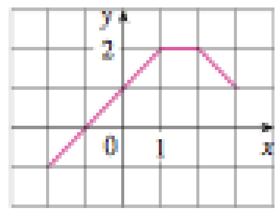
$\square$

Bài tập 1.3.
1. Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho trước. Tìm phương trình cho các đồ thị được mô tả như sau:
(a) Dịch chuyển đồ thị đã cho lên trên 3 đơn vị.
(b) Dịch chuyển đồ thị đã cho xuống dưới 3 đơn vị.
(c) Dịch chuyển đồ thị đã cho qua phải 3 đơn vị.
(d) Dịch chuyển đồ thị đã cho qua trái 3 đơn vị.
(e) Chiếu đối xứng qua trục x.
(f) Chiếu đối xứng qua trục y.
(g) Giãn đồ thị theo chiều dọc với thừa số nhân 3.
(h) Co đồ thị theo chiều dọc với thừa số nhân 3.
2. Giải thích các đồ thị sau từ đồ thị hàm số $y = f(x)$.
(a) $y = f(x) + 8$.
(b) $y = f(x + 8)$.
(c) $y = 8f(x)$.
(d) $y = f(x + 8)$.
(e) $y = -f(x) - 1$.
(f) $y = 8f(\frac{x}{8})$.
3. Cho đồ thị hàm số f như trong hình dưới, tìm tương ứng phương trình với đồ thị vẽ trên hình.
(a) $y = f(x - 4)$.



Hình 1.3.12: Bài tập 3.

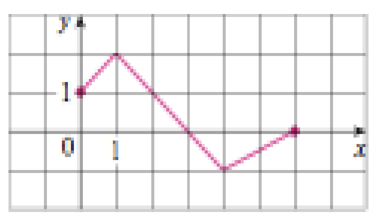
(b) $y = f(x) + 3$.
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$.
(d) $y = -f(x + 4)$.
(e) $y = 2f(x + 6)$.



Hình 1.3.13: Bài tập 4.

4. Cho đồ thị hàm số f như hình dưới, vẽ đồ thị các hàm số sau:
(a) $y = f(x) - 2$.
(b) $y = f(x - 2)$.
(c) $y = -2f(x)$.
(d) $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$.

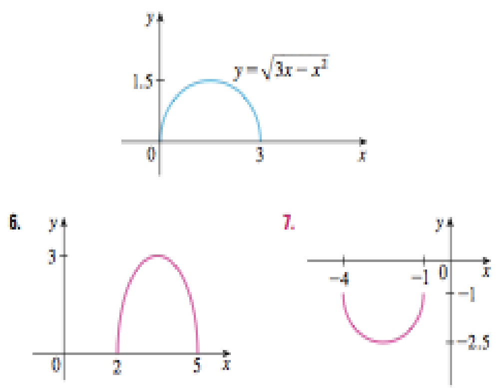
5. Cho đồ thị hàm số f như hình dưới, vẽ đồ thị các hàm số sau:
(a) $y = f(2x)$.
(b) $y = f(\frac{1}{2}x)$.
(c) $y = f(-x)$.
(d) $y = -f(-x)$.



Hình 1.3.14: Bài tập 5.

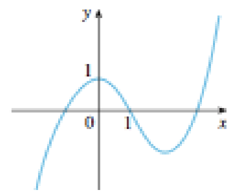
6 – 7. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x - x^2}$ được cho trong hình dưới. Sử dụng các phép biến đổi để tạo ra các hàm số có đồ thị như sau

8.
(a) Đồ thị hàm số $y = 2\sin x$ thì như thế nào so với đồ thị hàm số $y = \sin x$. Vẽ đồ thị hàm số $y = 2\sin x$.
(b) Đồ thị hàm số $y = 1 + \sqrt{x}$ thì như thế nào so với đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$. Vẽ đồ thị hàm số $y = 1 + \sqrt{x}$.
9 – 24. Vẽ các đồ thị sau dựa trên các hàm số cơ bản đã xem xét trong phần 1.2 và các phép biến đổi.



Hình 1.3.15: Bài tập 6 − 7.

9. $y = \frac{1}{x+2}$.
10. $y = (x-1)^3$.
11. $y = -\sqrt[3]{x}$.
12. $y = x^2 + 6x + 4$.
13. $y = \sqrt{x-2} - 1$.
14. $y = 4\sin 3x$.
15. $y = \sin(\frac{1}{2}x)$.
16. $y = \frac{2}{x} - 2$.
17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$.
18. $y = 1 - 2\sqrt{x+3}$.
19. $y = 1 - 2x - x^2$.
20. $y = |x| - 2$.
21. $y = |x - 2|$.
22. $y = \frac{1}{4}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
23. $y = |\sqrt{x} - 1|$.
24. $y = |\cos \pi x|$.
25. Thành phố New Orleans có vĩ tuyến $30N$. Dùng hình 1.3.9 để tìm một hàm số mô tả số giờ sáng trong một ngày trong năm ở New Orleans (hàm số theo ngày trong năm). Để kiểm tra mô hình này, ta biết thực tế là ngày 31/3, mặt trời mọc lúc 5 : 51 sáng và lặn lúc 6 : 18 tối.
26. Một ngôi sao có thể thay đổi độ sáng tăng giảm. Ngôi sao Delta Cephei có khoảng thời gian giữa thời điểm sáng nhất là 5.4 ngày, độ sáng trung bình của ngôi sao là 4.0 và độ sáng thay đổi bởi ± 0.35. Tìm một hàm số mà nó là mô hình cho độ sáng của ngôi sao trên như là một hàm số của thời gian.
27.
(a) Đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ thì như thế nào so với đồ thị hàm số $y = f(x)$.
(b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin|x|$.
(c) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{|x|}$.

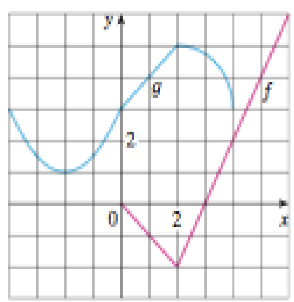


Hình 1.3.16: Bài tập 28.

28. Sử dụng đồ thị hàm số f cho trên hình để vẽ đồ thị hàm số $y = 1/f(x)$. Đặc điểm nào quan trọng nhất cần chú ý khi ta vẽ đồ thị hàm số $y = 1/f(x)$? Giải thích những đặc điểm đó.
29 – **30**. Tìm *a.* $f + g$, *b.* $f - g$, *c.* fg, *d.* f/g và tìm miền xác định của chúng.
29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$.
30. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
31 – **36**. Tìm *a.* $f \circ g$, *b.* $g \circ f$, *c.* $f \circ f$, *d.* $g \circ g$ và tìm miền xác định của chúng.
31. $f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = 2x + 1$.
32. $f(x) = x - 2 \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$.
33. $f(x) = 1 - 3x \quad g(x) = \cos x$.
34. $f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$.
35. $f(x) = x + 1/x \quad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
36. $f(x) = \frac{x}{x+1} \quad g(x) = \sin 2x$.
37 – **40**. Tìm $f \circ g \circ h$.
37. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$.
38. $f(x) = |x - 4|$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sqrt{x}$.
39. $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 2$.
40. $f(x) = \tan x$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.
41 – **46**. Tìm hàm số có dạng $f \circ g$.
41. $F(x) = (2x + x^2)^4$.
42. $F(x) = \cos^2 x$.
43. $F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.
44. $G(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$.
45. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$.
46. $u(t) = \frac{\tan t}{1+\tan t}$.
47 – **49**. Tìm hàm số có dạng $f \circ g \circ h$.
47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$.
48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$.
49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$.
50. Sử dụng bảng để tính giá trị các biểu thức sau:

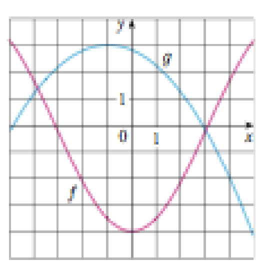
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

(a) $f(g(1))$.
(b) $g(f(1))$.
(c) $f(f(1))$.
(d) $g(g(1))$.
(e) $(g \circ f)(3)$.
(f) $(f \circ g)(6)$.
51. Sử dụng đồ thị hàm số f, g trên hình dưới để tính giá trị các biểu thức sau:
(a) $f(g(2))$.



Hình 1.3.17: Bài tập 51.

(b) $g(f(0))$.
(c) $(f \circ g)(0)$.
(d) $(g \circ f)(6)$.
(e) $(g \circ g)(-2)$.
(f) $(f \circ f)(4)$.
52. Sử dụng đồ thị hàm số f, g dưới đây để tính $f(g(x))$ tại $x = -5, -4, -3, \cdots, 5$. Vẽ đồ thị hàm số $f \circ g$.



Hình 1.3.18: Bài tập 52.

53. Một hòn đá được ném vào trong hồ tạo thành một đợt gợn sóng tròn có tốc độ

hướng ra ngoài là 60 cm/s.
(a) Tìm hàm số bán kính của hình tròn này theo thời gian t.
(b) Nếu gọi A là diện tích hình tròn này tính theo bán kính r, tính $A \circ r$ và nêu ý nghĩa.
54. Một quả bóng hình cầu được thổi phồng và bán kính tăng theo tỉ lệ 2 cm/s.
(a) Tìm hàm số bán kính quả cầu này theo thời gian t.
(b) Nếu V là thể tích của hình cầu này theo r, tính $V \circ r$ và nêu ý nghĩa.
55. Một tàu di chuyển với tốc độ 30 km/h song song với đường bờ biển thẳng. Tàu cách bờ 6 km và nó đi ngang qua ngọn hải đăng lúc giữa trưa.
(a) Gọi s là khoảng cách giữa thuyền và ngọn hải đăng và là một hàm số theo d, d là khoảng cách tàu đi được từ giữa trưa , tìm f sao cho $s = f(d)$.
(b) Hàm số d theo thời gian trôi qua tính từ trưa, tìm g sao cho $d = g(t)$.
(c) Tìm $f \circ g$ và nêu ý nghĩa của nó.
56. Một máy bay đang bay với tốc độ 350 dặm/h tại độ cao một dặm và đi qua trạm radar tại thời điểm $t = 0$.
(a) Tìm khoảng cách d theo chiều ngang mà máy bay đã bay được theo thời gian t.
(b) Gọi s là khoảng cách giữa máy bay và trạm radar, tìm hàm số s theo d.
(c) Tìm hàm số s theo t.
57. Hàm **Heaviside** được định nghĩa bởi

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

Nó được dùng trong vi mạch điện tử để mô tả sự tăng lên của dòng điện khi công tắc được mở.
(a) Vẽ đồ thị hàm số Heaviside.
(b) Vẽ đồ thị của hàm số điện áp $V(t)$ trong một mạch biết khi $t = 0$ thì mạch mở công tắc dùng dòng điện 120 volts. Viết hàm số V theo h.
(c) Vẽ đồ thị điện áp $V(t)$ tại $t = 5$ giây và dùng dòng điện 240 volts. Viết công thức hàm số V theo H.
58. Hàm Heaviside trong bài tập 57 có thể dùng trong **hàm dốc** $y = ctH(t)$ mô tả sự tăng lên từ từ điện áp trong một mạch điện.
(a) Vẽ đồ thị hàm số dốc với $c = 1$.
(b) Vẽ đồ thị hàm số điện áp $V(t)$, biết tại $t = 0$ thì mở công tắc để điện áp tăng dần dần đến 120 volts sau 60 giây. Tìm hàm số $V(t)$ theo hàm số $H(t)$ với $t \leq 60$.
(c) Vẽ đồ thị hàm số điện áp $V(t)$ nếu mạch mở công tắc tại $t = 7$ để tăng điện áp dần dần đến 100 volts sau 25 giây. Tìm công thức $V(t)$ theo $H(t)$ với $t \leq 32$.
59. Cho $f(x) = m_1x + b_1$ và $g(x) = m_2x + b_2$ là hai hàm tuyến tính. Hỏi hàm số $f \circ g$ có là hàm tuyến tính? Nếu phải thì hệ số góc của đồ thị của nó là bao nhiêu.
60. Nếu bạn đầu tư x đô la và thu lời 4% một năm thì lượng tiền đầu tư $A(x)$ sau một năm là $A(x) = 1.04x$. Tìm $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ và $A \circ A \circ A \circ A$. Ý nghĩa của những hàm hợp này là gì? Tìm công thức tổng quát sau n lần hàm hợp của A.
61.
(a) Nếu $g(x) = 2x + 1$ và $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, tìm hàm số f sao cho $f \circ g = h$.

(b) Nếu $f(x) = 3x + 5$ và $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, tìm hàm số g sao cho $f \circ g = h$.
62. Nếu $f(x) = x + 4$ và $h(x) = 4x - 1$ tìm hàm số g sao cho $g \circ f = h$.
63. Giả sử g là hàm chẵn, đặt $h = f \circ g$. Có phải h luôn là gàm chẵn?
64. Giả sử g là hàm lẻ, đặt $h = f \circ g$. Có phải h luôn là hàm lẻ? Như thế nào nếu f là hàm lẻ hoặc hàm chẵn?

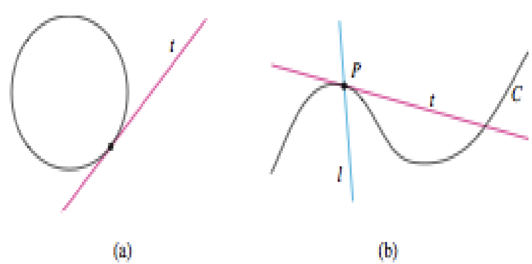
1.4 Tiếp tuyến và bài toán vận tốc

Trong phần này ta thấy giới hạn được nêu lên như thế nào khi ta nỗ lực tìm đường tiếp tuyến cho một đường cong hay vận tốc của một vật thể.

Bài toán tiếp tuyến

Từ tiếp tuyến có từ tiếng Latin "tangens" nghĩa là tiếp xúc. Vì vậy một tiếp tuyến với một đường cong là một đường thẳng tiếp xúc với đường cong đó. Nói một cách khác đường tiếp tuyến cùng hướng với đường cong tại điểm tiếp xúc. Ý tưởng này được mô tả bằng toán học như thế nào?

Đối với đường tròn thì tiếp tuyến là đường thẳng giao với đường tròn đúng một điểm như trong hình 1.4.1(a). Đối với các đường cong phức tạp hơn thì định nghĩa trên không đủ. Hình 1.4.1(b) chỉ ra hai đường thẳng l và t qua điểm P trên đường cong C. Đường l giao với C đúng một điểm nhưng nhìn hình thì không có vẻ gì là tiếp xúc. Đường thẳng t tiếp xúc với C nhưng cắt C tại hai điểm.



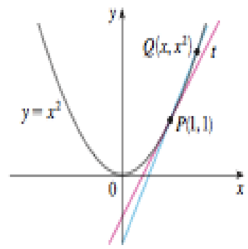
Hình 1.4.1:

Cụ thể hơn, ta sẽ tìm đường tiếp tuyến cho parabol $y = x^2$ trong ví dụ sau.

Ví dụ 26. Tìm phương trình đường tiếp tuyến cho parabol $y = x^2$ tại điểm $P(1, 1)$.
Lời giải. Ta sẽ phải tìm hệ số góc m của đường tiếp tuyến. Ta đã biết một điểm trên đường thẳng cần tìm, nhưng muốn tìm hệ số góc thì cần ít nhất hai điểm. Ta tìm một xấp xỉ của m bằng cách chọn điểm $Q(x, x^2)$ trên parabol gần điểm P (khác

P) và tìm hệ số góc của đường thẳng PQ (được gọi là cát tuyến PQ) :

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$



Hình 1.4.2:

Ví dụ tại điểm $Q(1.5, 2.25)$ thì $m_{PQ} = 2.5$. Ta lập bảng giá trị như bên dưới cho giá trị x gần 1. Khi Q càng gần P, x càng gần 1 thì hệ số góc càng gần 2. Từ điều này ta đề xuất hệ số góc của tiếp tuyến là 2.

x	m_{PQ}	x	m_{PQ}
2	3	0	1
1.5	2.5	0.5	1.5
1.1	2.1	0.9	1.9
1.01	2.01	0.99	1.99
1.001	2.001	0.999	1.999

Ta nói rằng hệ số góc của tiếp tuyến là giới hạn của những hệ số của các đường cát tuyến và viết như sau

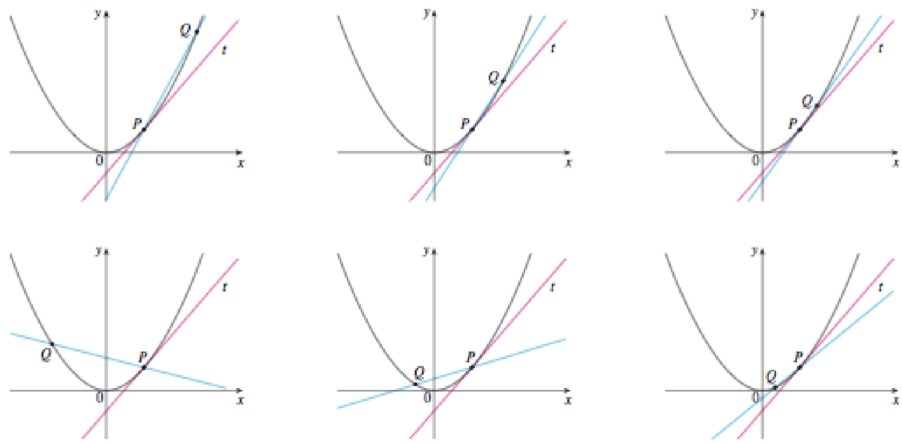
$$\lim_{Q \to P} = m \text{ và } \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Giả sử rằng hệ số góc của tiếp tuyến là 2, (xem phụ lục B) ta viết phương trình đường thẳng có hệ số góc 2 đi qua điểm $(1, 1)$ như sau

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad y = 2x - 1.$$

Hình 1.4.3 minh họa ví dụ trên. Khi Q tiến đến P trên parabol thì cát tuyến tương ứng quay quanh điểm P và tiếp cận tiếp tuyến t.

Nhiều hàm số trong khoa học không được mô tả bởi phương trình cụ thể, chúng được định nghĩa bởi dữ liệu thực nghiệm. Ví dụ tiếp theo chỉ ra cách ước lượng hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị những hàm số như thế.

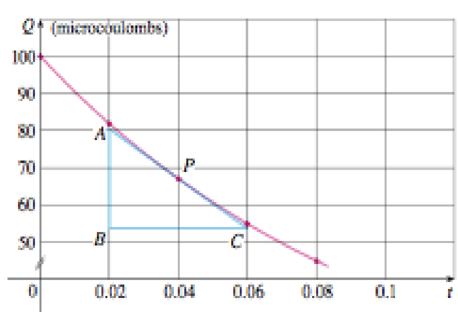


Hình 1.4.3: Q tiến về P từ bên trái và phải.

Ví dụ 27. Tia sáng trên máy chụp ảnh hoạt động bởi tích trữ điện tích và giải phóng nó một cách đột ngột khi đèn flash được bật lên. Dữ liệu trong bảng dưới mô tả điện tích Q còn lại trong vật chứa (đo theo microcoulombs) tại thời điểm t (theo giây) sau khi đèn flash được bật lên. Sử dụng dữ liệu này vẽ đồ thị của hàm số này và ước lượng hệ số góc của đường tiếp tuyến tại điểm $t = 0.04$.

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

Lời giải. Trong hình 1.4.4, ta vẽ các điểm dữ liệu đã cho và vẽ xấp xỉ đồ thị hàm số điện tích Q.



Hình 1.4.4: Hàm số điện tích.

Với điểm $P(0.04, 67.03)$ và điểm $R(0.00, 100.00)$ trên đồ thị, ta có hệ số góc của cát tuyến PR là

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25.$$

Bảng dưới là một số kết quả cho hệ số góc của một số cát tuyến khác. Từ bảng này, ta mong đợi hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $t = 0.04$ nằm giữa -742 và -607.5.

R	(0.00,100.00)	(0.02,81.87)	(0.06,54.88)	(0.08,44.93)	(0.10,36.76)
m_{PQ}	-824.25	-742.00	-607.50	-552.50	-504.50

Thực vậy, hệ số góc trung bình của hai cát tuyến gần tiếp tuyến nhất là

$$\frac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75.$$

Vì vậy ta ước lượng hệ số góc của tiếp tuyến là -675.
Một cách xấp xỉ khác là ta đo cạnh của tam giác ABC như trong hình 1.4.4. Nó sẽ cho ta một ước lượng cho hệ số góc của tiếp tuyến tại P là :

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{-80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670.$$

□

Bài toán vận tốc
Nếu bạn nhìn bảng đo vận tốc của một xe hơi khi đi trong thành phố, bạn sẽ thấy rằng nó thay đổi liên lục, nghĩa là vận tốc xe hơi không là hằng số. Chúng ta giả sử rằng mỗi khi ta nhìn bảng đo vận tốc thì xe hơi có vận tốc tại mỗi thời điểm nhưng vận tốc tức thời được định nghĩa như thế nào? Ta xem xét ví dụ sau.

Ví dụ 28. Giả sử một quả bóng được thả rơi từ một đài quan sát ở Toronto cách mặt đất 450 mét. Tìm vận tốc của quả bóng sau 5 giây.
Lời giải. Bằng thực nghiệm cách đây bốn thế kỷ, Galileo nhận thấy rằng quảng đường bóng rơi tỉ lệ thuận với bình phương thời gian bóng rơi. Gọi $s(t)$ là quảng đường bóng rơi sau t giây, khi đó theo định luật của Galileo

$$s(t) = 4.9t^2.$$

Khó khăn khi ta tìm vận tốc bóng rơi sau 5 giây là ta phải xử lý với một thời điểm nhất thời $t = 5$, ta không có khoảng thời gian nào cả. Tuy nhiên ta có thể xấp xỉ đại lượng cần tính bằng cách tính vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian cụ thể từ 5 đến 5.1 giây:

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{khoảng cách thay đổi}}{\text{thời gian trôi qua}} = \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} = 49.49\ m/s.$$

Bảng dưới cho ta những kết quả tương tự về vận tốc trung bình trên khoảng thời gian nhỏ dần.

Khoảng thời gian	Vận tốc trung bình
$5 \le t \le 6$	53.9
$5 \le t \le 5.1$	49.49
$5 \le t \le 5.05$	49.245
$5 \le t \le 5.01$	49.049
$5 \le t \le 5.001$	49.0049

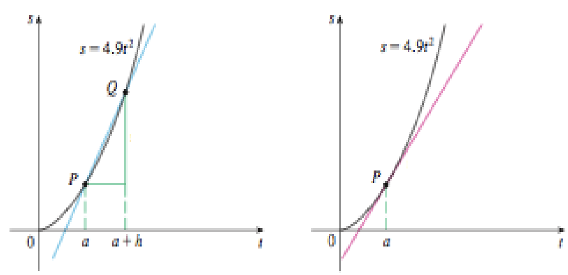
Khi ta làm ngắn khoảng thời gian thì vận tốc trung bình tiến gần hơn đến 49 m/s. **Vận tốc tức thời** khi $t = 5$ được định nghĩa là giá trị giới hạn của những vận tốc trung bình trên những khoảng thời gian ngắn bắt đầu từ $t = 5$. Vận tốc tức thời sau 5 giây là

$$v = 49 \ m/s.$$

Bạn có thể cảm thấy rằng những tính toán được sử dụng trong ví dụ trên tương tự như tính toán tìm tiếp tuyến trong phần này. Thật sự có một liên kết khá mật thiết giữa bài toán vận tốc và bài toán tìm tiếp tuyến. Nếu ta vẽ một đồ thị của hàm số quảng đường bóng rơi trong hình 1.4.5 và xem xét điểm $P(a, 4.9a^2)$ và điểm $Q(a+h, 4.9(a+h)^2)$ trên đồ thị, khi đó hệ số góc của cát tuyến PQ là

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a+h)^2 - a.9a^2}{(a+h) - a}$$

sẽ chính là vận tốc trung bình trên khoảng $[a, a+h]$. Do vậy vận tốc tại thời điểm $t = a$ (giới hạn của các vận tốc trung bình khi h gần 0) sẽ bằng hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm P (giới hạn của các hệ số góc của những cát tuyến).



Hình 1.4.5: Hệ số góc cát tuyến bằng vận tốc trung bình, hệ số tiếp tuyến bằng vận tốc tức thời.

Ví dụ 26 và 28 chỉ ra rằng để giải bài toán tìm tiếp tuyến và vận tốc, chúng ta phải tìm các giới hạn. Sau khi nghiên cứu những phương pháp tính các giới hạn trong bốn phần tiếp theo, chúng ta sẽ trở lại bài toán tìm tiếp tuyến và vận tốc trong chương 2.

Bài tập 1.4.

1. Một thùng chứa 1000 gallons nước chảy hết ra từ vòi dưới đáy trong nửa giờ. Bảng dưới là thể tích V nước còn lại của bình chứa sau t phút.

t (phút)	5	10	15	20	25	30
V (gallons)	694	444	250	111	28	0

(a) Nếu điểm $P(15, 250)$ nằm trên đồ thị hàm số V, tìm hệ số góc của cát tuyến PQ khi Q nằm trên đồ thị tương ứng với thời điểm $t = 5, 10, 20, 25, 30$.

(b) Ước lượng hệ số góc của tiếp tuyến tại P bằng trung bình của hệ số góc của hai cát tuyến.
(c) Sử dụng đồ thị hàm số để ước lượng hệ số góc của tiếp tuyến tại P.
2. Một máy đo nhịp tim của bệnh nhân sau phẫu thuật. Nó đếm số lần tim đập sau t phút. Bảng dưới là dữ liệu ghi lại được, hệ số góc của đường tiếp tuyến là nhịp tim của bệnh nhân theo số lần đập trên phút.

t (phút)	36	38	40	42	44
Số nhịp tim	2530	2661	2806	2948	3080

Sử dụng dữ liệu để ước lượng nhịp tim của của bệnh nhân sau 42 phút bằng cách sử dụng cát tuyến giữa những điểm có thời gian cho như sau
(a) $t = 36$ và $t = 42$.
(b) $t = 38$ và $t = 42$.
(c) $t = 40$ và $t = 42$.
(d) $t = 42$ và $t = 44$.
Kết luận của bạn là gì?
3. Điểm $P(2, -1)$ nằm trên đường cong $y = 1/(1 - x)$.
(a) Nếu $Q(x, 1/(1 - x))$, sử dụng máy tính bỏ túi tính chính xác đến sáu chữ số thập phân hệ số góc của cát tuyến PQ với

$$x = 1.5,\ 1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ 2.5,\ 2.1,\ 2.01,\ 2.001.$$

(b) Sử dụng kết quả trong câu a để tìm giá trị của hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm P.
(c) Tìm phương trình tiếp tuyến trong câu b.
4. Điểm $P(0.5, 0)$ nằm trên đường cong $y = \cos \pi x$.
(a) Nếu $Q(x, \cos \pi x)$, sử dụng máy tính bỏ túi tính chính xác đến sáu chữ số thập phân hệ số góc của cát tuyến PQ với

$$x = 0,\ 0.4,\ 0.49,\ 0.499,\ 1,\ 0.6,\ 0.51,\ 0.501.$$

(b) Sử dụng kết quả trong câu a để tìm giá trị của hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm P.
(c) Tìm phương trình tiếp tuyến trong câu b.
(d) Vẽ đường cong, hai đường cát tuyến và đường tiếp tuyến trên cùng đồ thị.
5. Một quả bóng được ném vào không khí với vận tốc 40 feet/s, độ cao của nó theo feet sau t giây được cho bởi phương trình $y = 40t - 16t^2$.
(a) Tìm vận tốc trung bình cho khoảng thời gian bắt đầu từ $t = 2$ và kết thúc sau $0, 5$, 0.1, 0.05, 0.01 giây.
(b) Ước lượng vận tốc tức thời tại $t = 2$.
6. Nếu một hòn đá được ném lên ở Sao Hoả với vận tốc $10\,m/s$, chiều cao của nó sau t giây được cho bởi $y = 10t - 1.86t^2$.
(a) Tìm vận tốc trung bình cho các khoảng sau

$$[1, 2],\ [1, 1.5],\ [1, 1.1],\ [1, 1.01],\ [1, 1.001].$$

(b) Ước lượng vận tốc tức thời tại $t = 1$.
7. Bảng dưới mô tả vị trí của một người đi xe đạp.

t (giây)	0	1	2	3	4	5
s (mét)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Tìm vận tốc trung bình cho các khoảng sau

$$[1,3],\ [2,3],\ [3,5],\ [3,4].$$

(b) Ước lượng vận tốc tức thời tại $t = 3$.
8. Sự dịch chuyển (theo cm) của một phân tử di chuyển tới lui trên một đường thẳng được cho bởi phương trình $y = 2\sin \pi t + 3\cos \pi t$, t tính theo giây.
(a) Tìm vận tốc trung bình cho các khoảng sau

$$[1,2],\ [1,1.1],\ [1,1.01],\ [1,1.001].$$

(b) Ước lượng vận tốc tức thời của phân tử tại $t = 1$.
9. Điểm $P(1,0)$ nằm trên đường cong $y = \sin(10\pi/x)$.
(a) Nếu $Q(x, \sin(10\pi/x))$, sử dụng máy tính bỏ túi tính chính xác đến bốn chữ số thập phân hệ số góc của cát tuyến PQ với

$$x = 2,\ 01.5,\ 1.4,\ 1.3,\ 1.2,\ 1.1,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9.$$

(b) Sử dụng đồ thị hàm số đã cho để giải thích vì sao những hệ số góc trong câu a không gần hệ số góc của tiếp tuyến tại P.
(c) Bằng cách chọn những cát tuyến thích hợp, ước lượng hệ số góc của tiếp tuyến tại P.

1.5 Giới hạn của hàm số

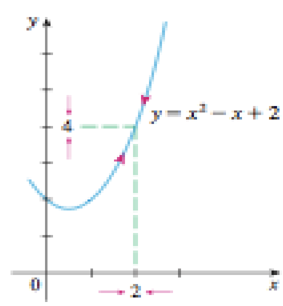
Trong phần trước giới hạn được đưa ra khi ta muốn tìm đường tiếp tuyến cho một đường cong hay vận tốc của một vật thể. Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu giới hạn một cách tổng quát và các phương pháp số và hình học để tính các giới hạn.

Hãy xem xét tính chất của hàm số f được định nghĩa bởi $f(x) = x^2 - x + 2$ tại các giá trị của x gần 2. Bảng dưới đây cho ta các giá trị của $f(x)$ tương ứng với các giá trị của x gần 2 nhưng không bằng 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Từ bảng và đồ thị hàm số f (một parabol) trong hình 1.5.1, chúng ta thấy rằng khi x gần 2 (cả hai phía của 2) thì $f(x)$ gần 4. Thật vậy, chúng ta có thể chọn giá trị $f(x)$ gần 4 tuỳ ý nếu x đủ gần 2. Chúng ta nói rằng "giới hạn của hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ khi x tiến tới 2 là 4". Ký hiệu cho phát biểu trên là :

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4.$$



Hình 1.5.1: Khi $x \to 2$ thì $f(x) \to 4$.

Tổng quát chúng ta sử dụng ký hiệu sau.

1. **Định nghĩa** Giả sử $f(x)$ được định nghĩa tốt khi x gần số a
(nghĩa là f được định nghĩa trên khoảng mở chứa điểm a, có thể không chứa điểm a).
Khi đó ta viết $\lim_{x\to a} f(x) = L$
và nói rằng "giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến gần lại a là L" nếu ta có thể lấy bất kỳ giá trị của $f(x)$ gần L bằng cách lấy các giá trị x đủ gần a (nhưng không bằng a).

Người ta nói rằng $f(x)$ tiến về L khi x tiến về a. Nói cách khác, $f(x)$ tiến về càng gần L khi x tiến về càng gần a (nhưng không bằng a). (Một định nghĩa chính xác sẽ có trong phần 1.7.)
Một ký hiệu khác cho

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

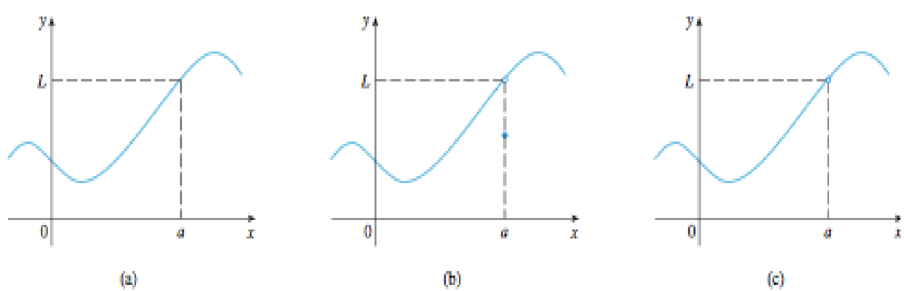
là

$$f(x) \to L \text{ khi } x \to a$$

được đọc là "$f(x)$ tiến về L khi x tiến về a".

Chú ý cụm từ "nhưng $x \neq a$" trong định nghĩa của giới hạn. Điều này có nghĩa là việc tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a, chúng ta không cần xét $x = a$. Thực vậy $f(x)$ thậm chí không cần được xác định tại $x = a$. Chỉ một vấn đề là f được định nghĩa gần a như thế nào.

Hình 1.5.2 là đồ thị của ba hàm số. Chú ý trong hình (c) thì $f(a)$ không xác định và trong hình (b) thì $f(a) \neq L$. Không kể đến hàm số như thế nào tại a, các trường hợp trong hình đều có $\lim_{x\to a} f(x) = L$.



Hình 1.5.2: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ trong cả ba trường hợp.

Ví dụ 29. Tìm giá trị

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Lời giải. Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$, nhưng ta vẫn có thể tìm giới hạn $\lim_{x\to 1} f(x)$ theo định nghĩa của hàm số, chúng ta xem xét các giá trị của x gần a nhưng không bằng a.
Bảng dưới cho giá trị của $f(x)$ khi x gần 1. Chúng ta dự đoán rằng

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5.$$

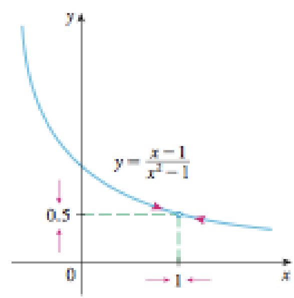
$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975

□

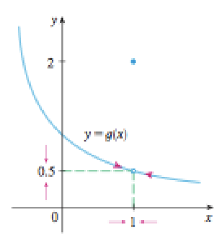
Ví dụ 29 được minh hoạ bởi đồ thị trong hình 1.5.3. Bây giờ ta thay đổi hàm số f bằng cách cho thêm $f(1) = 2$, ta gọi là hàm số g.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Hàm số g vẫn có cùng giới hạn với f khi x tiến đến 1. (xem hình 1.5.4)



Hình 1.5.3:



Hình 1.5.4:

Ví dụ 30. Ước lượng giá trị của

$$\lim t \to 0 \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}.$$

Lời giải. Bảng dưới liệt kê một số giá trị của hàm số khi t gần 0.

t	±1.0	±0.5	±0.1	±0.05	±0.01
$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$	0.16228	0.16553	0.166662	0.16666	0.16667

Khi t tiến đến 0 các giá trị của hàm số có vẻ như tiến gần đến 0.1666666... và vì vậy chúng ta dự đoán rằng

$$\lim t \to 0 \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}.$$

□

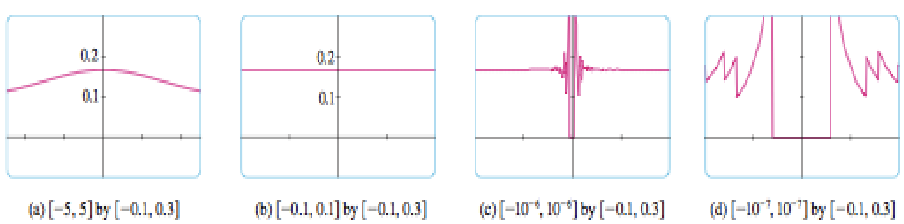
Trong ví dụ trên điều gì sẽ xảy ra nếu ta chọn t càng gần 0 hơn. Bảng dưới cho ta một vài kết quả mà ta sẽ thấy nó khá lạ.

t	± 0.0005	± 0.0001	± 0.00005	± 0.00001
$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$	0.16800	0.20000	0.00000	0.00000

Ta tính ra các giá trị khác nhau bằng máy tính bỏ túi nhưng ta thu được giá trị 0 khi t đủ nhỏ. Điều này có nghĩa là giới hạn là 0 thay vì 1/6 đúng không? Câu trả lời là không, giới hạn cần tìm là 1/6 và sẽ được chứng minh trong phần tiếp theo. Vấn đề là máy tính bỏ túi cho kết quả không đúng bởi vì $\sqrt{t^2+9}$ thì rất gần 3 khi t nhỏ. (Thực vậy, máy tính sẽ cho giá trị của $\sqrt{t^2+9}$ là 3.000... nếu t đủ nhỏ.) Điều tương tự cũng xảy ra khi ta vẽ đồ thị hàm số

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

của ví dụ 30 trên máy tính. Hình (a) và (b) trong hình 1.5.5 trình bày khá chính xác đồ thị của hàm số f và cũng dễ dàng thấy giới hạn cần tìm là 1/6. Nhưng khi ta tập trung vào khoảng gần 0 như trong hình (c) và (d), chúng ta sẽ thu được đồ thị không chính xác, lý do là bài toán của phép trừ.

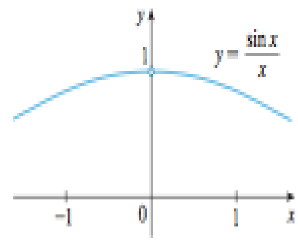


Hình 1.5.5: Các đồ thị.

Ví dụ 31. Dự đoán giá trị của

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Lời giải. Hàm số $f(x) = \sin x/x$ không xác định tại $x = 0$. Sử dụng máy tính bỏ túi, ta thu được bảng giá trị chính xác đến 8 chữ số thập phân.



Hình 1.5.6:

x	$\sin x/x$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983

Từ bảng và đồ thị trong hình 1.5.6 ta dự đoán

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Dự đoán này là đúng và được chứng minh trong chương 2.

Hệ thống đại số máy tính (CAS) *CAS có những lệnh để tính giới hạn. Để tránh những vấn đề gặp phải như trong các ví dụ trong phần này, CAS tìm giới hạn bằng những phương pháp phức tạp nhưng chính xác hơn như dùng chuỗi vô hạn. Nếu bạn dùng CAS thì hãy dùng lệnh tìm giới hạn để kiểm tra kết quả trong các ví dụ và câu trả lời của bạn cho phần bài tập.*

Ví dụ 32. Phân tích giá trị của

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}.$$

Lời giải. Hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ không xác định tại 0. Ta tính một vài giá trị của $f(x)$ với x gần 0, ta có

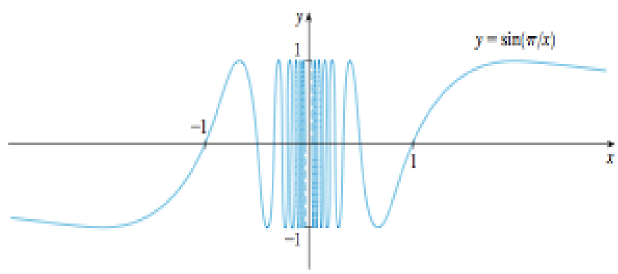
$$f(1) = \sin \pi = 0, \qquad f(1/2) = \sin 2\pi = 0$$

$$f(1/3) = \sin 3\pi = 0, \qquad f(1/4) = \sin 4\pi = 0$$
$$f(0.1) = \sin 10\pi = 0, \qquad f(0.01) = \sin 100\pi = 0.$$

Tương tự, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Vì vậy, chúng ta dự đoán

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x} = 0$$

nhưng dự đoán này là sai. Chú ý rằng mặc dù $f(1/n) = \sin n\pi = 0$ với mọi số nguyên n nhưng nó cũng đúng với vô hạn giá trị x gần 0 sao cho $f(x) = 1$. Ta có thể nhìn thấy điều này qua đồ thị hàm số f như trong hình 1.5.7.



Hình 1.5.7:

Đường thẳng nét đứt gần trục toạ độ y đề cập rằng giá trị của hàm số $y = \sin(\pi/x)$ dao động quanh 1 và -1 vô hạn lần khi x gần 0. (xem bài tập 43.)
Bởi vì giá trị của hàm số $f(x)$ không tiến gần đến một số cố định khi x tiến đến 0, $\lim_{x\to 0}(\pi/x)$ không tồn tại. □

Ví dụ 33. Tìm
$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}\right).$$

Lời giải. Ta xây dựng bảng giá trị của hàm số khi x gần 0.

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

Từ bảng trên ta dự đoán
$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}\right) = 0.$$

Ta xây dựng một bảng khác như sau.

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

Từ bảng này ta lại dự đoán

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}\right) = 0.0001.$$

□

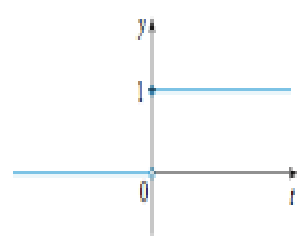
Sau này ta sẽ biết $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ nên giới hạn cần tìm chính xác là 0.0001.

Các ví dụ 32 và 33 minh hoạ một số "cạm bẫy" khi dự đoán giá trị của giới hạn. Ta sẽ dễ dự đoán sai giới hạn nếu ta chọn các giá trị của x không phù hợp, nhưng khó khăn để biết được khi nào ta không cần tính thêm các giá trị. Như trong ví dụ 30 máy tính bỏ túi thỉnh thoảng tính sai các giá trị. Tuy nhiên trong phần tiếp theo chúng ta sẽ phát triển các phương pháp dễ dàng tính toán các giới hạn.

Ví dụ 34. Hàm Heaviside H được định nghĩa bởi

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

(Hàm số này được đặt tên theo một kỹ sư điện Oliver Heaviside $(1850 - 1925)$ và được sử dụng để mô tả trạng thái của một dòng điện được bật công tắc tại thời điểm ban đầu $t = 0$.)



Hình 1.5.8: Hàm Heaviside.

Khi t tiến đến 0 từ bên trái thì $H(t)$ tiến về 0. Khi t tiến đến 0 từ bên phải thì $H(t)$ tiến về 1. Nghĩa là $H(t)$ tiến về nhiều giá trị khi t tiến gần về 0. Ta nói không tồn tại $\lim_{t\to 0} H(t)$.

Giới hạn một bên

Chúng ta chú ý rằng trong ví dụ 34, $H(t)$ tiến gần về 0 khi x tiến về 0 từ bên trái và $H(t)$ tiến gần về 1 khi x tiến về 0 từ bên phải. Ta viết bằng ký hiệu cho trường hợp này như sau

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1.$$

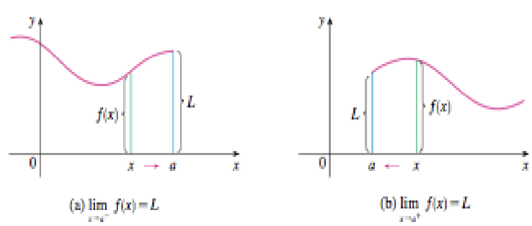
Ký hiệu $t \to 0^-$ nói rằng ta chỉ xem xét các giá trị của t nhỏ hơn 0. Tương tự, $t \to 0^+$ nói rằng ta chỉ xem xét các giá trị của t lớn hơn 0.

> 2. **Định nghĩa** Chúng ta viết
> $$\lim_{x\to a^-} = L$$
> và nói rằng giới hạn trái của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a (hay giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a từ bên trái) là L nếu nếu ta có thể lấy bất kỳ giá trị của $f(x)$ gần L bằng cách lấy các giá trị x đủ gần a và nhỏ hơn a.

Chú ý rằng định nghĩa 2 chỉ khác với định nghĩa 1 ở chỗ x phải nhỏ hơn a. Tương tự, nếu ta yêu cầu x lớn hơn a ta sẽ có "giới hạn bên phải của $f(x)$ khi x tiến đến a là L" và ký hiệu là

$$\lim_{x\to a^+} = L.$$

Vì vậy ký hiệu "$x \to a^+$" chỉ có nghĩa là ta xem xét $x > a$. Các định nghĩa này được minh hoạ trong hình 1.5.9.



Hình 1.5.9: Giới hạn bên trái và bên phải.

Bằng cách so sánh với định nghĩa 1 với định nghĩa của giới hạn một bên, ta phát biểu mệnh đề sau:

> 3. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *và* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

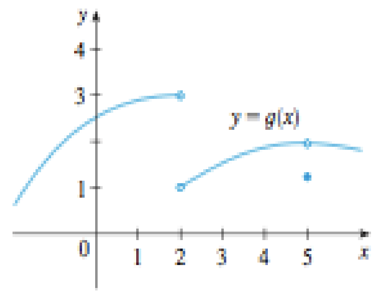
Ví dụ 35. Đồ thị hàm số g như trong hình 1.5.10. Sử dụng nó để khẳng định những giá trị sau tồn tại hay không?

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ *b.* $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ *c.* $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

d. $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ *e.* $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ *f.* $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$.

Lời giải. Từ đồ thị của hàm số trong hình 1.5.10, ta thấy các giá trị $g(x)$ tiến về 3 khi x tiến về 2 từ bên trái, nhưng chúng tiến về 1 khi x tiến về 2 từ bên phải. Do vậy ta có

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 3$ *b.* $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 1.$



Hình 1.5.10: $y = g(x)$.

Vì $3 \neq 1$, nên từ mệnh đề 3 ta suy ra $\lim_{x\to 2} g(x)$ không tồn tại. Cũng từ đồ thị ta có

$$d.\ \lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 \qquad e.\ \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2.$$

Bởi vì giới hạn bên trái và giới hạn bên phải cùng bằng 2, nên theo mệnh đề 3 ta có

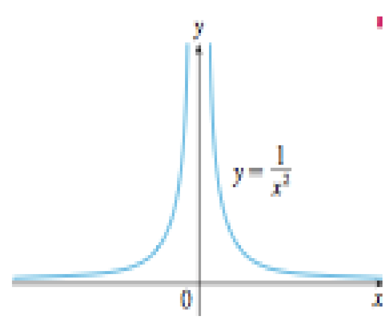
$$f.\ \lim_{x\to 5} g(x) = 2.$$

Chú ý rằng $g(5) \neq 2$. □

Giới hạn vô cực

Ví dụ 36. Tìm $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ nếu tồn tại.
Lời giải. Khi x gần 0 thì x^2 cũng gần 0 và khi đó $1/x^2$ trở nên rất lớn. (Xem bảng dưới) Thực vậy từ đồ thị của hàm số $f(x) = 1/x^2$ trong hình 1.5.11, giá trị của $f(x)$ được lấy lớn bất kỳ bằng cách lấy x đủ gần 0. Vì vậy các giá trị của $f(x)$ không tiến đến một số, vì vậy $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ không tồn tại.

x	± 1	± 0.5	± 0.2	± 0.1	± 0.05	± 0.01	± 0.001
$1/x^2$	1	4	25	100	400	10000	1000000



Hình 1.5.11: $y = 1/x^2$.

□

Để đề cập đến tình huống như trong ví dụ 36 ta dùng ký hiệu sau

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Điều này không có nghĩa là chúng ta xem ∞ là một số hay giới hạn trên tồn tại. Mà nó chỉ đơn giản nhấn mạnh trường hợp đặc biệt là giới hạn không tồn tại, $1/x^2$ có thể lấy giá trị lớn bất kỳ bằng cách lấy x đủ gần 0.

Tổng quát ta viết

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

để chỉ rằng các giá trị của $f(x)$ có khuynh hướng càng lớn hơn (hay tăng không có chặn) khi x càng gần a hơn.

> 4. **Định nghĩa** Cho hàm số f được định nghĩa (xác định) trên cả hai bên của a, có thể không xác định tại a. Khi đó
> $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
> có nghĩa là các giá trị của $f(x)$ có thể được lấy lớn bất kỳ (lớn như ta mong muốn) bằng cách lấy x đủ gần a nhưng không bằng a.

Một ký hiệu khác của $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ là

$$f(x) \to \infty \text{ khi } x \to a.$$

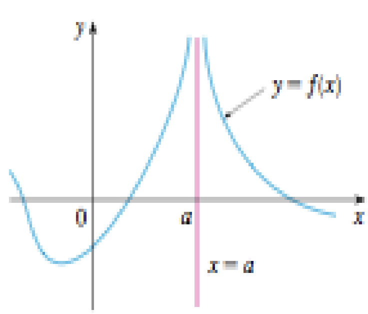
Nhắc lại, ký hiệu ∞ không là một số nhưng biểu thức $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ thường được đọc là

giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về a là vô cực

$f(x)$ tiến về vô cực khi x tiến về a

$f(x)$ tăng lên không có chặn khi x tiến về a

Định nghĩa này được minh hoạ như trong hình 1.5.12.



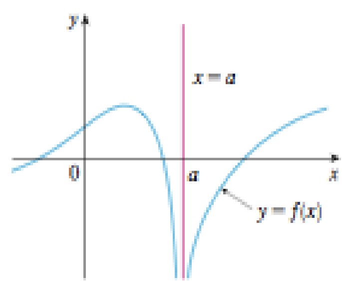
Hình 1.5.12: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Tương tự cho giới hạn của hàm số mà nhỏ bất kỳ khi x càng gần về a, ta có định nghĩa 5 sau và minh hoạ trong hình 1.5.13.

5. Định nghĩa Cho hàm số f được định nghĩa (xác định) trên cả hai bên của a, có thể không xác định tại a. Khi đó

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

có nghĩa là các giá trị của $f(x)$ có thể được lấy nhỏ tuỳ ý (nhỏ như ta mong muốn) bằng cách lấy x đủ gần a nhưng không bằng a.



Hình 1.5.13: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ký hiệu $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ được đọc là "giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a là âm vô cực" hay "$f(x)$ giảm với không chặn khi x tiến đến a". Một ví dụ là

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

Tương tự ta cũng có định nghĩa một bên cho giới hạn vô cực

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

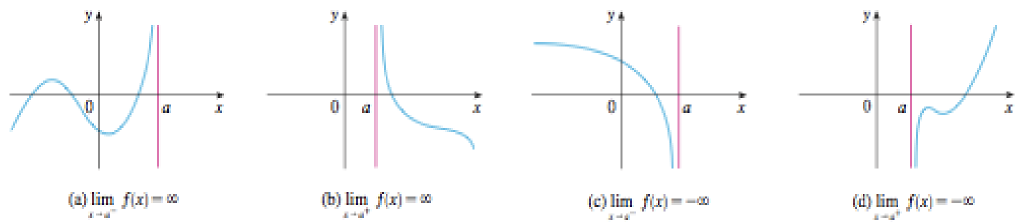
ghi nhớ rằng "$x \to a^-$" nghĩa là ta chỉ xem xét các giá trị của x nhỏ hơn a và "$x \to a^+$" nghĩa là ta chỉ xem xét các giá trị của x lớn hơn a. Minh hoạ các giới hạn trên bằng hình 1.5.14.

6. Định nghĩa Đường thẳng $x = a$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đường cong $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các khẳng định sau đúng

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $\quad\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ $\quad\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\quad\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Chẳng hạn trục toạ độ y là tiệm cận đứng của đường cong $y = 1/x^2$ vì $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$. Trong hình 1.5.14 đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng cho cả bốn trường hợp. Một cách tổng quát đường tiệm cận giúp ta vẽ đồ thị dễ dàng hơn.



Hình 1.5.14: Giới hạn vô cực từng phía.

Ví dụ 37. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3} \text{ và } \lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}.$$

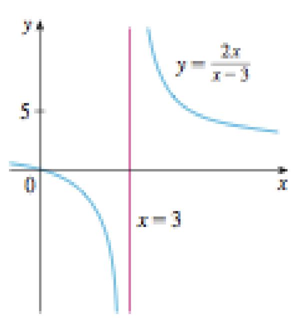
Lời giải. Nếu x gần 3 nhưng lớn hơn 3, thì mẫu số $x-3$ là một số dương gần 0 và tử số $2x$ gần 6. Vì vậy thương $2x/(x-3)$ là số dương rất lớn. Vì vậy ta nói

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=\infty.$$

Tương tự khi x gần 3 nhưng nhỏ hơn 3 thì $x-3$ gần 0 và là số âm. Do vậy

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty.$$

Đồ thị của đường cong $y=2x/(x-3)$ như trong hình 1.5.15. Đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng. □



Hình 1.5.15: Đồ thị ví dụ 37.

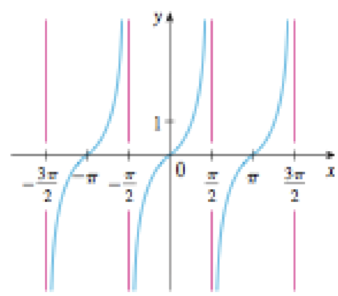
Ví dụ 38. Tìm các đường tiệm cận đứng cho đường cong $f(x)=\tan x$.
Lời giải. Vì

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

nên ta có tiệm cận đứng khi $\cos x = 0$. Thực vậy, vì $\cos x \to 0^+$ khi $x \to (\pi/2)^-$ và $\cos x \to 0^-$ khi $x \to (\pi/2)^+$ và trong khi $\sin x$ thì dương với x gần $\pi/2$ nên

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty \text{ và } \lim_{x\to(\pi/2)^+} \tan x = -\infty.$$

Điều này suy ra đường thẳng $x = \pi/2$ là một tiệm cận đứng. Tương tự ta chỉ ra rằng các đường thẳng $x = (2n+1)\pi/2$ với n nguyên là tất cả các tiệm cận đứng của $f(x) = \tan x$. Đồ thị trong hình 1.5.16 cho ta thấy điều đó.



Hình 1.5.16: $y = \tan x$.

□

Bài tập 1.5.
1. Giải thích bằng lời phương trình sau

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu $f(2) = 3$?
2. Giải thích các phương trình sau có nghĩa gì

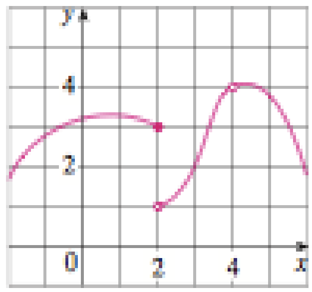
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 3 \text{ và } \lim_{x\to 1+} f(x) = 7.$$

Vậy $\lim_{x\to 1} f(x)$ có tồn tại không?
3. Giải thích ý nghĩa của các biểu thức sau

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \infty \text{ và } \lim_{x\to 4+} f(x) = -\infty.$$

4. Sử dụng đồ thị dưới để tìm giá trị các đại lượng sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại giải thích vì sao?

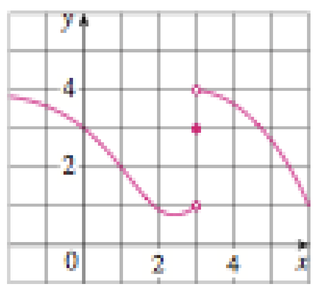
$$a.\ \lim_{x\to 2^-} f(x) \quad b.\ \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad c.\ \lim_{x\to 2} f(x)$$
$$d.\ f(2) \quad e.\ \lim_{x\to 4} f(x) \quad f.\ f(4).$$



5. Sử dụng đồ thị dưới để tìm giá trị các đại lượng sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại giải thích vì sao?

$$a.\ \lim_{x\to 1} f(x) \quad b.\ \lim_{x\to 3^-} f(x) \quad c.\ \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$d.\ \lim_{x\to 3} f(x) \quad e.\ f(3).$$



6. Sử dụng đồ thị dưới để tìm giá trị các đại lượng sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại giải thích vì sao?

$$a.\ \lim_{x\to -3^-} h(x) \quad b.\ \lim_{x\to -3^+} h(x) \quad c.\ \lim_{x\to -3} h(x)$$

$$d.\ h(-3) \quad e.\ \lim_{x\to 0^-} h(x) \quad f.\ \lim_{x\to 0^+} h(x)$$

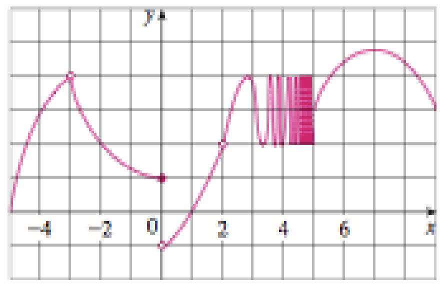
$$g.\ \lim_{x\to 0} h(x) \quad h.\ h(0) \quad i.\ \lim_{x\to 2} h(x)$$

$$j.\ h(2) \quad k.\ \lim_{x\to 5^+} h(x) \quad l.\ \lim_{x\to 5^-} h(x).$$

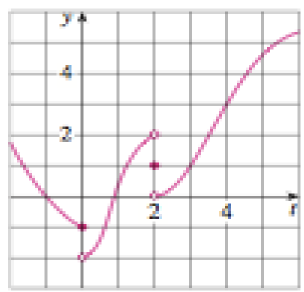
7. Sử dụng đồ thị dưới để tìm giá trị các đại lượng sau nếu tồn tại. Nếu không tồn tại giải thíc vì sao?

$$a.\ \lim_{t\to 0^-} g(t) \quad b.\ \lim_{t\to 0^+} g(t) \quad c.\ \lim_{t\to 0} g(t)$$

$$d.\ \lim_{t\to 2^-} g(t) \quad e.\ \lim_{t\to 2^+} g(t)) \quad f.\ \lim_{t\to 2} g(t)$$



$g.$ $g(2)$ $\quad h.$ $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$.

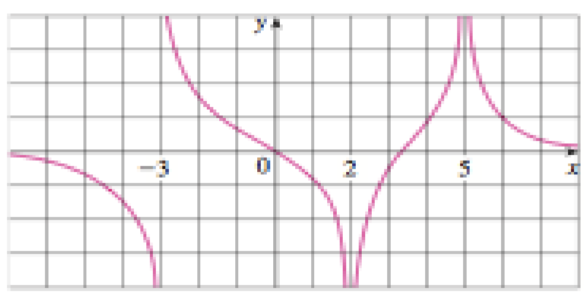


8. Cho hàm số R có đồ thị như trong hình dưới, tìm các giá trị sau nếu tồn tại.

$a.$ $\lim\limits_{x\to 2} R(x)$ $\qquad b.$ $\lim\limits_{x\to 5} R(x)$

$c.$ $\lim\limits_{x\to -3^-} R(x)$ $\qquad d.$ $\lim\limits_{x\to -3^+} R(x)$

$e.$ Tìm các tiệm cận đứng.

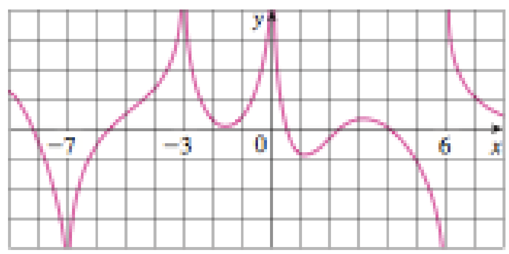


9. Cho hàm số f có đồ thị như trong hình dưới, tìm các giá trị sau nếu tồn tại.

$a.$ $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ $\qquad b.$ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ $\qquad c.$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$d.\ \lim_{x\to 6^-} f(x) \qquad e.\ \lim_{x\to 6^+} f(x)$$

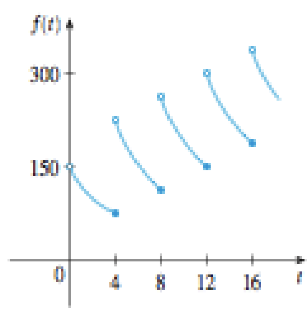
f. Tìm các tiệm cận đứng.



10. Một bệnh nhân được tiêm 150 mg thuốc sau mỗi 4 giờ. Đồ thị của lượng thuốc $f(t)$ sau t giờ được cho trong hình dưới. Tìm

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \text{ và } \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

và giải thích sự quan trọng của những giới hạn một bên này.



Hình 1.5.17: Bài tập 10.

11 − **12**. Vẽ đồ thị mỗi hàm số sau và tìm các giá trị a sao cho $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại.
11.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x \le -1 \\ x^2 & \text{nếu } -1 \le x < 1 \\ 2-x & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

12.

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sin x & \text{nếu } x < 0 \\ \cos x & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ \sin x & \text{nếu } x > \pi \end{cases}$$

13 – 14. Sử dụng đồ thị hàm số để khẳng định giới hạn sau nếu tồn tại

$$a.\ \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad b.\ \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad c.\ \lim_{x\to 0} f(x)$$

13. $f(x) = \frac{1}{1+2^{1}/x}$.
14. $f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+x^2}}$.
15 – 18. Vẽ đồ thị cho một ví dụ của hàm số thoả mãn điều kiện cho trước.
15. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.
16. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$, $f(0) = -1$, $f(3) = 1$.
17. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$, $f(3) = -3$, $f(-2) = 1$.
18. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$.
19 – 22. Dự đoán giá trị của giới hạn bằng cách tính giá trị của hàm số tại các điểm cho trước (tính đúng đến 6 chữ số thập phân.)
19.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$$

$$x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999.$$

20.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$$

$$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999, -2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001.$$

21.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+\tan x}$$

$$x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.2, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01.$$

22.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^5-32}{h}$$

$$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001.$$

23 – 26. Dùng bảng giá trị để ước lượng giới hạn. Nếu bạn có máy tính có thể vẽ đồ thị, dùng nó để kiểm tra kết quả của bạn.
23.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$$

24.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}.$$

25.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^{10}-1}.$$

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-5^x}{x}.$$

27.
(a) Bằng cách vẽ đồ thị hàm số $f(x)=(\cos 2x-\cos x)/x^2$ và "zoom" phóng to vào điểm mà đồ thị cắt trục toạ độ y, ước lượng giá trị $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Kiểm tra lại kết quả của bạn bằng cách tính $f(x)$ với các giá trị x gần 0.
28.
(a) Ước lượng giá trị của

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin \pi x}$$

bằng cách dựa vào đồ thị hàm số $f(x)=\sin x/\sin(\pi x)$. Khẳng định kết quả đúng đến 2 chữ số thập phân.
(b) Kiểm tra lại kết quả của bạn bằng cách tính giá trị $f(x)$ với các giá trị x gần 0.
29 – **37**. Xác định các giới hạn vô cực sau

29. $\displaystyle\lim_{x\to -3^+}\frac{x+2}{x+3}$. **30**. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-}\frac{x+2}{x+3}$.

31. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{(x-1)^2}$. **32**. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2(x+2)}$.

33. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2(x+2)}$. **34**. $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-}\cot x$.

35. $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi^-} x\csc x$. **36**. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

37. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.

38.
(a) Tìm tiệm cận đứng của hàm số

$$y=\frac{x^2+1}{3x-2x^2}.$$

(b) Kiểm tra lại kết quả của bạn bằng cách vẽ đồ thị.
39. Xác định $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^3-1}$ và $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^3-1}$
(a) bằng cách tính các giá trị $f(x)=1/(x^3-1)$ với các giá trị x tiến về 1 từ bên trái và từ bên phải.
(b) bằng lý luận như trong ví dụ 37.
(c) bằng đồ thị của hàm số f.
40.
(a) Bằng cách vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\tan x/x$ và phóng to vào điểm mà đồ thị đi qua trục toạ độ y, ước lượng giá trị của $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Kiểm tra kết quả trên bằng cách tính giá trị của $f(x)$ khi các giá trị x gần 0.
41.

(a) Tính giá trị hàm số $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ với $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ và dự đoán giá trị của

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right).$$

(b) Như câu a nhưng thay $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003, 0.001$.
42.
(a) Tính $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ với $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005$.
(b) Dự đoán giá trị $\lim_{x\to 0} h(x)$.
(c) Tính giá trị của $h(x)$ cho những giá trị nhỏ dần của x cho đến khi giá trị của $h(x)$ bằng 0. Bạn có chắc là kết quả của bạn ở câu b là đúng không? Giải thích vì sao bạn thu được giá trị 0 như trên. (Ở phần 6.8 một phương pháp tính giới hạn sẽ được giải thích.)
(d) Vẽ đồ thị hàm số trong hình chữ nhật $[-1, 1] \times [0, 1]$, sau đó phóng to vào những điểm mà đồ thị đi qua trục toạ độ y. Ước lượng giới hạn của $h(x)$ khi x tiến đến 0. Tiếp tục phóng to đến khi bạn quan sát được những sự không rõ ràng. So sánh kết quả với câu c.
43. Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \sin(\pi/x)$ trong hình chữ nhật $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Sau đó phóng to điểm gốc toạ độ vài lần. Nêu nhận xét của bạn về hàm số này.
44. Trong thuyết tương đối, khối lượng của phân tử có vận tốc v là

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ở đây m_0 là khối lượng của phân tử khi đứng yên và c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra nếu $v \to c^-$?
45. Sử dụng đồ thị của hàm số để ước lượng phương trình đường tiệm cận đứng của đường cong

$$y = \tan(2\sin x) \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Tìm các phương trình chính xác của đường tiệm cận đứng.
46.
(a) Sử dụng tính toán và đồ thị để dự đoán giá trị

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

(b) Hỏi x gần 1 như thế nào để chác chắn rằng hàm số trong câu a cách giới hạn của nó không quá 0.5?

1.6 Các quy tắc tính giới hạn của hàm số

Trong phần trước, chúng ta đã sử dụng máy tính và đồ thị để dự đoán các giới hạn, nhưng không phải lúc nào cũng dự đoán đúng với kết quả chính xác. Vì vậy trong phần này chúng ta sử dụng các tính chất sau của giới hạn, gọi là *các quy tắc* *của giới hạn*, để tính giới hạn.

Quy tắc giới hạn Giả sử c là một hằng số và các giới hạn
$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ và } \lim_{x\to a} g(x)$$
tồn tại. Khi đó,

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$.
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Năm quy tắc trên được khẳng định bằng lời như sau

1. Giới hạn của một tổng bằng tổng các giới hạn. (quy tắc cộng)

2. Giới hạn của một hiệu bằng hiệu các giới hạn. (quy tắc trừ)

3. Giới hạn của tích của một hằng số với một hàm số bằng tích của hằng số đó với giới hạn hàm số . (quy nhắc nhân hằng số)

4. Giới hạn của một tích bằng tích các giới hạn. (quy tắc nhân)

5. Giới hạn của một thương bằng thương các giới hạn (nếu giới hạn dưới mẫu khác không). (quy tắc thương)

Rất dễ dàng để tin tưởng rằng các tính chất trên là đúng. Chẳng hạn, nếu $f(x)$ gần L và $g(x)$ gần M, một cách hợp lý ta có $f(x)+g(x)$ gần $L+M$. Điều này cho ta một cơ sở trực quan để tin rằng quy tắc 1 đúng. Trong phần 1.7 ta sẽ định nghĩa một cách chính xác giới hạn và dùng nó để chứng minh quy tắc này. Chứng minh của các quy tắc còn lại được cho trong phụ lục F.

Ví dụ 39. Sử dụng các quy tắc giới hạn và đồ thị hàm số f, g trong hình 1.6.1 để tính các giá trị sau

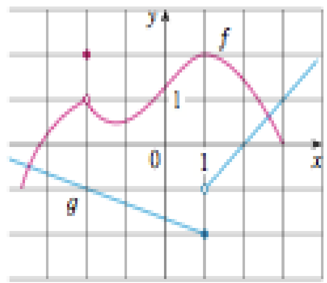
$$a.\ \lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] \qquad b.\ \lim_{x\to 1}[f(x)g(x)] \qquad c.\ \lim_{x\to 2} f(x)g(x).$$

Lời giải.
(a) Từ các đồ thị hàm số f và g ta thấy

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \text{ và } \lim_{x\to -2} g(x) = -1.$$

Dùng quy tắc 1 và quy tắc 3 ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} 5g(x) \\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) = 1+5(-1) = -4.\end{aligned}$$



Hình 1.6.1: Ví dụ 39.

(b) Ta có $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, nhưng $\lim_{x\to 1} g(x)$ không tồn tại vì

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1.$$

Vì vậy ta không thể áp dụng quy tắc 4 để tìm giới hạn mong muốn. Nhưng bằng cách sử dụng quy tắc 4 ta có thể tìm được giới hạn một bên

$$\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 2(-2) = -4 \quad \lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 2(-1) = -2.$$

Giới hạn bên trái và bên phải khác nhau, vì vậy giới hạn $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ không tồn tại.
(c) Bằng đồ thị ta thấy

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \text{ và } \lim_{x\to 2} g(x) = 0.$$

Bởi vì mẫu số của thương cần tìm có giới hạn là 0, ta không thể sử dụng quy tắc 5. Giới hạn cần tìm không tồn tại vì mẫu số tiền về 0 trong khi tử số tiến về một số khác 0. □

Nếu ta sử dụng quy tắc nhân lặp lại nhiều lần cho $g(x) = f(x)$ ta thu được

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ với n là một số nguyên dương.

Ta có hai quy tắc đặc biệt sau

7. $\lim_{x\to a} c = c$
8. $\lim_{x\to a} x = a$.

Những giới hạn này thì hiển nhiên từ trực quan (khẳng định chúng bằng lời hay vẽ đồ thị $y = c$ và $y = x$), tuy nhiên chứng minh dựa trên định nghĩa chính xác của giới hạn cũng được yêu cầu (xem bài tập trong phần 1.7).

Ta đặt $f(x) = x$ trong quy tắc 6 và quy tắc 8, ta thu được giới hạn đặc biệt khác

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ với n là một số nguyên dương.

Giới hạn tương tự cho phép lấy căn (với căn bậc hai được chứng minh trong bài tập 37, phần 1.7).

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ với n là một số nguyên dương.
(Nếu n chẵn thì ta giả sử $a > 0$.)

Tổng quát hơn, ta có quy tắc sau (được chứng minh trong phần 1.8)

11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ với n là một số nguyên dương.
(Nếu n chẵn thì ta giả sử $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.)

Ví dụ 40. Tính các giới hạn sau và giải thích từng bước

$$a.\ \lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) \qquad b.\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}.$$

LỜI GIẢI
(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4 \text{ (quy tắc 2 và 1)}\\
&= 2\lim_{x\to 5}(x^2) - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \text{ (quy tắc 3)}\\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 \text{ (quy tắc } 9, 8, 7)\\
&= 39.
\end{aligned}$$

(b) Chúng ta bắt đầu bằng quy tắc 5, nhưng trước hết ta phải chắc chắn rằng giới hạn trên có giới hạn ở tử số và mẫu số tồn tại và giới hạn mẫu số khác không.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)} \text{ (quy tắc 5)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} \text{ (quy tắc } 1, 2, 3)\\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \text{ (quy tắc } 9, 8, 7)\\
&= -\frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét : Nếu $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ thì $f(5) = 39$. Nói cách khác thì chúng ta thu được giới hạn trong ví dụ $2a$ bằng cách thay 5 vào biểu thức $f(x)$. Tương tự ta thay trực tiếp -2 cho x trong ví dụ $40(b)$ ta cũng có kết quả chính xác cần tìm.

Những hàm số trong ví dụ 40 là hàm đa thức, hàm phân số. Các quy tắc giới hạn có thể dùng phương pháp thay thế trực tiếp như trên cho các hàm số như thế (xem bài tập 55 và 56). Ta phát biểu như sau:

Tính chất thay thế trực tiếp
Nếu f là hàm đa thức hay hàm phân số và a nằm trong miền xác định của f thì $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Những hàm số có "tính chất thay thế trực tiếp" được gọi là *liên tục* tại a và sẽ được nghiên cứu trong phần 1.8. Tuy nhiên, không phải tất cả các giới hạn có thể tính toán bằng cách thay thế trực tiếp như những ví dụ sau đây.

Ví dụ 41. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Lời giải. Đặt $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$. Chúng ta không thể tìm giới hạn bằng cách thay thế $x = 1$ vì $f(1)$ thì không xác định. Chúng ta cũng không thể áp dụng quy tắc thương vì giới hạn mẫu số bằng 0. Chúng ta nhận thấy tử số có thể phân tích thành nhân tử

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}.$$

Tử số và mẫu số có nhân tử chung là $x-1$. Khi lấy giới hạn với x gần 1, ta có $x \neq 1$ hay $x - 1 \neq 0$. Vì vậy ta triệt tiêu nhân tử chung và tính giới hạn như sau

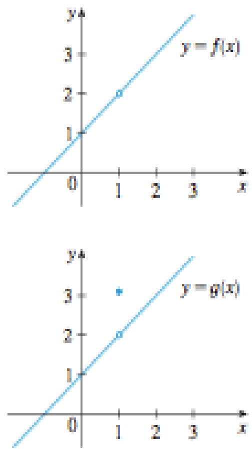
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

□

Giới hạn trên sinh ra từ phần 1.4 khi ta tìm tiếp tuyến cho parabol $y = x^2$ tại điểm $(1,1)$.

Nhận xét: Trong ví dụ 41 chúng ta đã tính giới hạn của hàm số $f(x)$ bằng cách tính giới hạn một hàm số đơn giản hơn $g(x) = x+1$. Điều này hợp lý vì $f(x) = g(x)$ ngoại trừ $x = 1$, trong giới hạn x tiến đến 1 thì chúng ta không xem xét $x = 1$. Tổng quát ta có điều sau :

Nếu $f(x) = g(x)$ khi $x \neq a$ thì $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.
(nếu các giới hạn tồn tại)



Hình 1.6.2: Đồ thị hàm số f, g trong ví dụ 41 và 42.

Ví dụ 42. Tìm $\lim_{x\to 1} g(x)$ với

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \neq 1 \\ \pi & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Hàm số g được định nghĩa tại 1 và $g(1) = \pi$, nhưng giới hạn của hàm số g khi x tiến về 1 thì không phụ thuộc vào giá trị $g(1)$. Từ $g(x) = x + 1$ với $x \neq 1$, ta có

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

□

Chú ý rằng các giá trị của hàm số trong ví dụ 41 và 42 thì đồng nhất ngoại trừ tại $x = 1$ (xem hình 1.6.2) và vì vậy chúng có cùng giới hạn khi x tiến về 1.

Ví dụ 43. Tính

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}.$$

Lời giải. Ta đặt

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

chúng ta không thể tính giới hạn trên bằng cách thay $h = 0$ vì $F(0)$ không xác định. Nhưng ta có

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Vì vậy ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.$$

□

Ví dụ 44. Tìm

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}.$$

Lời giải. Ta không thể áp dụng quy tắc thương vì giới hạn của mẫu số là 0 khi t tiến về 0. Bằng một vài tính toán đại số cơ bản ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3}\\
&= \frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Kết quả này xác nhận lại kết quả dự đoán trong ví dụ 30 phần 1.5. □

Một số giới hạn được tính tốt nhất bằng cách xác định các giới hạn bên trái và bên phải. Định lý dưới đây nhắc lại kết quả mà ta đã thảo luận trong phần 1.5. Nó nói rằng giới hạn tồn tại nếu các giới hạn từng phía tồn tại và bằng nhau.

1. **Định lý**
$\lim_{x\to a} f(x) = L$ khi và chỉ khi $lim_{x\to a^-} f(x) = L = lim_{x\to a^+} f(x)$.

Khi tính các giới hạn một bên, ta chú ý các quy tắc giới hạn cũng đúng cho các giới hạn một bên.

Ví dụ 45. Chỉ ra rằng $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.
Lời giải. Nhớ lại rằng

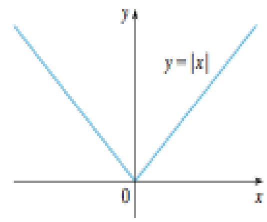
$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0\\ -x & \text{nếu } x<0.\end{cases}$$

Vì vậy

$$\lim_{x\to 0^+}|x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

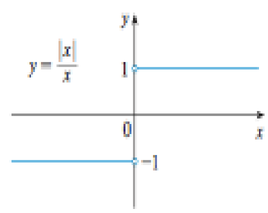
$$\lim_{x\to 0^-}|x| = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0.$$

Theo định lý 1 ta có $\lim_{x\to 0}|x| = 0$. □



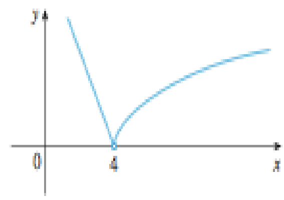
Hình 1.6.3: Đồ thị hàm số trong ví dụ 45.

Ví dụ 46. Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$
không tồn tại.
Lời giải. Ta có
$$\lim_{x\ to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\ to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$
$$\lim_{x\ to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\ to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^+}-1=-1.$$
Từ giới hạn bên trái và bên phải khác nhau và định lý 1 ta suy ra giới hạn đã cho không tồn tại. Hình 1.6.4 là đồ thị hàm số $f(x)=|x|/x$. □



Hình 1.6.4: Đồ thị hàm số trong ví dụ 46.

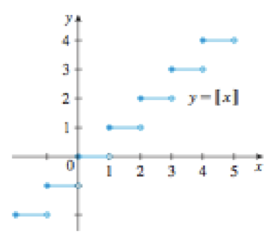
Ví dụ 47. Cho
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & \text{nếu } x>1\\ 8-2x & \text{nếu } x<4,\end{cases}$$
xác định $\lim_{x\to 4}f(x)$.
Lời giải. Ta có
$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=\sqrt{4-4}=0,$$
$$\lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^-}(8-2x)=8-2(4)=0.$$
Vì giới hạn bên trái và bên phải bằng nhau nên ta có $\lim_{x\to 4}f(x)$ tồn tại và bằng 0. Hình 1.6.5 là đồ thị hàm số f. □



Hình 1.6.5: Đồ thị hàm số trong ví dụ 47.

Ví dụ 48. Hàm phần nguyên lớn nhất được định nghĩa là $[x]$ = số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x. (Chẳng hạn $[4] = 4$, $[4.8] = 4$, $[\pi] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1/2] = -1$) Chỉ ra rằng giới hạn $\lim_{x\to 3}[x]$ không tồn tại.
Lời giải. Đồ thị hàm số trên được cho trong hình 1.6.6 dưới đây. Từ $[x] = 3$ với $3 \le x < 4$ ta có

$$\lim_{x\to 3^+}[x] = 3.$$



Hình 1.6.6: Đồ thị hàm phần nguyên lớn nhất.

Hơn nữa từ $[x] = 2$ với $2 \le x < 3$ ta có

$$\lim_{x\to 3^-}[x] = 2.$$

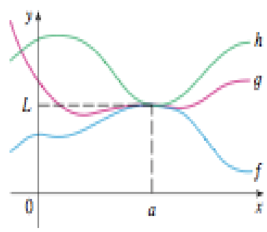
Bởi vì các giới hạn một bên không bằng nhau nên $\lim_{x\to 3}[x]$ không tồn tại. □

Hai định lý dưới đây cho ta biết thêm một số tính chất của giới hạn và được chứng minh trong phụ lục F.

2. **Định lý** Nếu $f(x) \le g(x)$ khi x gần a (có thể ngoại trừ điểm a) và các giới hạn của hàm số f và g tồn tại khi x tiến đến a thì
$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

3. **Định lý kẹp** Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ khi x gần a (có thể ngoại trừ điểm a) và các giới hạn của hàm số f và h
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \text{ thì } \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Định lý kẹp còn được gọi là định lý Sanwich hay định lý Pinching và được minh họa trong hình 1.6.7. Nó phát biểu rằng nếu g bị kẹp giữa f và h khi x gần a (có thể ngoại trừ a) và các hàm số f, h có cùng giới hạn L khi x tiến đến a thì g cũng có giới hạn L tại a.



Hình 1.6.7: Minh hoạ định lý kẹp.

Ví dụ 49. Chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Lời giải. Trước hết ta chú ý rằng ta không thể dùng

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

vì $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại (xem ví dụ 32 phần 1.5).

Thay vào đó ta dùng định lý kẹp, và vì vậy ta tìm hàm số $f(x)$ nhỏ hơn $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ và hàm số $h(x)$ lớn hơn $g(x)$ mà $f(x)$ và $h(x)$ có giới hạn là 0 khi x tiến về 0. Để làm điều này ta dùng tính chất của hàm sin :

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1.$$

Bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu ta nhân cho một số không âm. Từ $x^2 \ge 0$, ta có

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

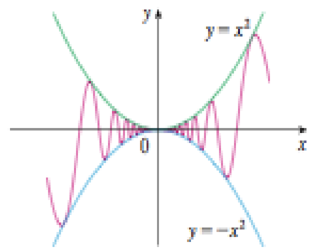
được mô tả trong hình 1.6.8. Chúng ta biết rằng

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0.$$

Chọn $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ và $h(x) = x^2$ trong định lý kẹp ta được

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

$\square$



Hình 1.6.8: Hàm số $y = x^2 \sin(1/x)$.

Bài tập 1.6.
1. Cho trước

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

tìm các giới hạn sau nếu nó tồn tại (nếu không, giải thích vì sao?).

$$a.\ \lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)] \qquad b.\ \lim_{x\to 2}[g(x)]^3$$
$$c.\ \lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} \qquad d.\ \lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)}$$
$$e.\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{h(x)} \qquad f.\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$$

2. Đồ thị hàm số f và g được cho trong hình dưới. Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại (nếu không giải thích vì sao?).

$$a.\ \lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] \qquad b.\ \lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$$
$$c.\ \lim_{x\to 0}[f(x)g(x)] \qquad d.\ \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$e.\ \lim_{x\to 2}[x^3 f(x)] \qquad f.\ \lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$$

3 − **9**. Tính các giới hạn sau bằng cách giải thích từng bước trong các quy tắc giới hạn.
3.

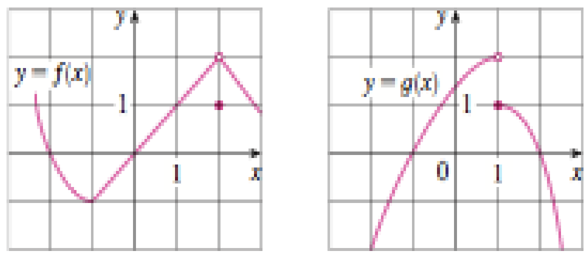
$$\lim_{x\to 3}(5x^3 - 3x^2 + x - 6).$$

4.

$$\lim_{x\to -1}(x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3).$$

5.

$$\lim_{t\to -2}\frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}.$$



Hình 1.6.9: Bài tập 2.

6.
$$\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}.$$

7.
$$\lim_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3).$$

8.
$$\lim_{t\to 2}\left(\frac{t^2-2}{t^3-3t+5}\right)^2.$$

9.
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+1}{3x-2}}.$$

10.
(a) Điều gì không đúng cho phương trình sau:
$$\frac{x^2+x-6}{x-2}=x+3.$$

(b) Giải thích vì sao điều sau lại đúng
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3).$$

11 − **32**. Tính giới hạn

11. $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$ **12**. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{x-5}$ **14**. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -3}\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$ **16**. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(-5+h)^2-25}{h}$ **18**. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

19. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$ **20**. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1}$

21. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ **22**. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

23. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$ **24**. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ **26**. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ **28**. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$ **30**. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ **32**. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-2}-x^{-2}}{h}$

33.(a) Ước lượng giá trị

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

bằng cách vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x/(\sqrt{1+3x}-1)$.
(b) Tạo bảng các giá trị $f(x)$ khi x gần 0 và dự đoán giá trị của giới hạn trên.
(c) Dùng quy tắc giới hạn để kiểm tra dự đoán của bạn.
34.(a) Ước lượng giá trị

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$$

bằng cách vẽ đồ thị hàm số $f(x) = (\sqrt{x+3}-\sqrt{3})/x$.
(b) Tạo bảng các giá trị $f(x)$ khi x gần 0 và dự đoán giá trị của giới hạn trên.
(c) Dùng quy tắc giới hạn để kiểm tra dự đoán của bạn.
35. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x) = 0.$$

Minh hoạ bằng đồ thị các hàm số $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2\cos 20\pi x$ và $h(x) = x^2$ trên cùng mặt phẳng toạ độ.
36. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x} = 0.$$

Minh hoạ bằng đồ thị các hàm số f, g, h trong định lý kẹp trên cùng mặt phẳng toạ độ.
37. Nếu $4x-9 \le f(x) \le x^2-4x+7$ với $x \ge 0$. Tìm $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Nếu $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ với mọi x. Tìm $\lim_{x\to 1} g(x)$.
39. Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0.$$

40. Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}[1 + \sin^2(2\pi/x)] = 0.$$

41 – **46**. Tìm các giới hạn nếu tồn tại, nếu không thì giải thích vì sao.

41. $\lim\limits_{x\to 3}(2x + |x - 3|)$ **42**. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim\limits_{x\to 0.5^-}\dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$ **44**. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$ **46**. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$.

47. Hàm dấu "sign function" được ký hiệu bởi *sgn* và định nghĩa bởi
$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị hàm số trên.
(b) Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại và giải thích nếu không tồn tại.

$i.$ $\lim\limits_{x\to 0^+} sgn(x)$ $ii.$ $\lim\limits_{x\to 0^-} sgn(x)$

$iii.$ $\lim\limits_{x\to 0} |sgn(x)|$ $iv.$ $\lim\limits_{x\to 0} sgn(x)$.

48. Cho hàm số
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
(b) Hỏi giới hạn $\lim_{x\to 1} f(x)$ có tồn tại?
(c) Vẽ đồ thị hàm số f.
49. Cho
$$g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}.$$

(a) Tìm
$$i.\ \lim_{x\to 2^+} g(x) \text{ và } ii.\ \lim_{x\to 2^-} g(x)$$

(b) Có tồn tại giới hạn của $g(x)$ khi x tiến về 2?
(c) Vẽ đồ thị hàm số g.
50. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x < 1 \\ 3 & \text{nếu } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

(a) Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

$$i.\ \lim_{x\to 1^-} g(x) \qquad ii.\ \lim_{x\to 1^+} g(x) \qquad iii.\ g(1)$$

$$iv.\ \lim_{x\to 2^-} g(x) \qquad v.\ \lim_{x\to 2^+} g(x) \qquad vi.\ \lim_{x\to 2} g(x).$$

(b) Vẽ đồ thị hàm số (g)
51.(a) Ký hiệu [.] là hàm phần nguyên lớn nhất như trong ví dụ 48, tính

$$i.\ \lim_{x\to -2^+}[x] \qquad ii.\ \lim_{x\to -2}[x] \qquad iii.\ \lim_{x\to -24}[x]$$

(b) Nếu n là số nguyên, tính

$$i.\ \lim_{x\to n^-}[x] \qquad ii.\ \lim_{x\to n^+}[x]$$

(c) Tìm các giá trị của a sao cho $\lim_{x\to a}[x]$ tồn tại.
52. Đặt $f(x) = [\cos x]$ với $-\pi \leq x \leq \pi$.
(a) Vẽ đồ thị hàm số f.
(b) Tìm các giới hạn nếu tồn tại

$$i.\ \lim_{x\to 0} f(x) \qquad ii.\ \lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$$

$$iii.\ \lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x) \qquad iv.\ \lim_{x\to \pi/2} f(x).$$

(c) Tìm các giá trị của a sao cho $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại.
53. Nếu $f(x) = [x] + [-x]$, chứng minh rằng $\lim_{x\to 2} f(x)$ tồn tại nhưng không bằng $f(2)$.
54. Trong thuyết tương đối, công thức biến đổi co giãn Lorentz

$$L = L_0\sqrt{v^2/c^2}$$

mô tả chiều dài của vật thể như là một hàm số theo vận tốc của nó dưới hệ quy chiếu người quan sát, L_0 là chiều dài của vật thể đứng yên và c là vận tốc ánh sáng. Tìm $\lim_{v\to c^-} L$ và giải thích kết quả? Tại sao giới hạn bên trái thì cần thiết?
55. Nếu p là một đa thức, chứng minh rằng $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.
56. Nếu r là một hàm phân thức, chứng minh rằng $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ với mọi số a

trong miền xác định.

57. Nếu

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-8}{x-1}=10,$$

tìm $\lim_{x\to 1} f(x)$.

58. Nếu $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 5$, tìm

$$a.\ \lim_{x\to 0} f(x) \qquad b.\ \lim_{x\to 0} f(x)/x.$$

59. Nếu

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ.}\end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

60. Tìm một ví dụ sao cho cả $\lim_{x\to a} f(x)$ và $\lim_{x\to a} g(x)$ không tồn tại nhưng $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ tồn tại.

61. Tìm một ví dụ sao cho cả $\lim_{x\to a} f(x)$ và $\lim_{x\to a} g(x)$ không tồn tại nhưng $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ tồn tại.

62. Tính

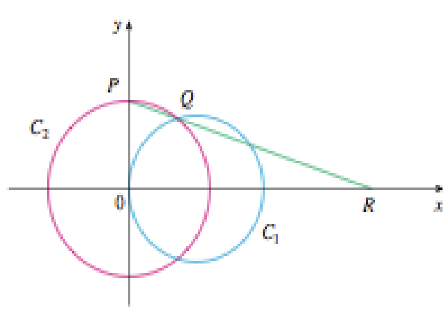
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}.$$

63. Có số a nào sao cho

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+\ +a+3}{x^2+x-2}.$$

tồn tại không? Tìm giới hạn đó.

64. Hình dưới là hình C_1 có phương trình $(x-1)^2+y^2=1$ và đường tròn C_2 bán kính r, tâm là gốc toạ độ. $P(0,r)$ và Q là điểm giao của hai đường tròn nằm phía trên trục x. R là điểm giao của đường thẳng PQ và trục x. Điều gì sẽ xảy ra nếu đường tròn C_2 co lại, nghĩa là $r\to 0^+$.



Hình 1.6.10: Bài tập 64.

1.7 Định nghĩa chính xác giới hạn của hàm số

Một định nghĩa trực quan của giới hạn trong phần 1.5 thì không đủ cho một số mục đích vì những mệnh đề như "x gần 2" và "$f(x)$ trở nên gần L hơn" thì tối nghĩa. Để có thể chứng minh một cách toán học rằng

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10000}\right)=0.0001 \text{ hay } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

chúng ta phải định nghĩa chính xác giới hạn.
Xem xét hàm số sau đây

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{nếu } x\neq 3\\ 6 \quad \text{nếu } x=3. \end{cases}$$

Một cách trực quan, rõ ràng là khi x gần 3 (nhưng $x\neq 3$), thì $f(x)$ gần 5 và vì vậy $\lim_{x\to 3} f(x)=5$. Để thu được nhiều thông tin chi tiết hơn về cách $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x gần 3, ta trả lời câu hỏi sau:

x gần 3 như thế nào để $f(x)$ sai khác 5 nhỏ hơn 0.1 ?

Câu hỏi trên tương đương với bài toán tìm số δ sao cho

$$|f(x)-5|<0.1 \text{ nếu } |x-3|<\delta \text{ nhưng } x\neq 3.$$

Nếu $|x-3|>0$ thì $x\neq 3$, vì vậy bài toán tương đương là tìm δ sao cho

$$|f(x)-5|<0.1 \text{ nếu } 0<|x-3|<\delta.$$

Chú ý rằng nếu $0<|x-3|<0.05$ thì

$$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|<2(0.05)=0.1$$

nghĩa là

$$|f(x)-5|<0.1 \text{ nếu } 0<|x-3|<0.05.$$

Vậy câu trả lời cho câu hỏi của chúng ta là $\delta=0.05$, nếu x gần 3 với khoảng cách không quá 0.05 thì $f(x)$ gần 5 không quá 0.1.
Nếu ta thay số 0.1 trong câu hỏi thành một số nhỏ hơn 0.01, dùng phương pháp tương tự ta tìm được $f(x)$ gần 5 không quá 0.01 nếu x gần 3 không quá 0.005 :

$$|f(x)-5|<0.01 \text{ nếu } 0<|x-3|<0.005.$$

Tương tự

$$|f(x)-5|<0.001 \text{ nếu } 0<|x-3|<0.0005.$$

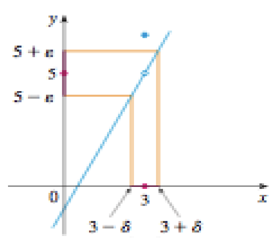
Những số $0.1, 0.01, 0.001$ được xem như là những sai số cho phép mà chúng ta dùng. Vì 5 là giới hạn chính xác của $f(x)$ khi x tiến đến 3, chúng ta không những có thể chọn độ sai lệch giữa $f(x)$ và 5 nhỏ hơn những số trên, mà chúng ta còn có thể chọn mọi số dương nhỏ hơn các số trên. Bằng lý luận tương tự, chúng ta có thể làm điều đó. Nếu ta viết ϵ cho số dương bất kỳ thì ta tìm số δ như cách trên

$$(1) \quad |f(x) - 5| < \epsilon \text{ nếu } 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\epsilon}{2}.$$

Đây là một cách chính xác để nói rằng $f(x)$ gần 5 khi x gần 3 bởi vì công thức trên nói rằng chúng ta có thể lấy mọi giá trị của $f(x)$ với khoảng cách bất kỳ nhỏ hơn ϵ đến 5 bằng cách lấy các giá trị x cách 3 không quá $\epsilon/2$ (nhưng $x \neq 3$).
(1) còn có thể viết dưới dạng sau

$$\text{Nếu } 3 - \delta < x < 3 + \delta \ \ (x \neq 3) \text{ thì } 5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon$$

và nó được minh hoạ trong hình 1.7.1. Bằng cách lấy $x \neq 3$ trong khoảng $(3-\delta, 3+\delta)$ chúng ta có thể lấy các giá trị của $f(x)$ trong khoảng $(5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$.



Hình 1.7.1: Minh hoạ giới hạn.

Sử dụng (1) như là một mô hình mẫu, ta có định nghĩa chính xác như sau.

> 2. **Định nghĩa** Cho f là một hàm số được định nghĩa trên một khoảng mở chứa điểm a, có thể ngoại trừ điểm a. Khi đó ta nói rằng **giới hạn của** $f(x)$ **khi** x **tiến đến** a **là** L, viết là
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> nếu với mọi $\epsilon > 0$ có một số $\delta >$ (phụ thuộc vào ϵ) sao cho
> $$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Định nghĩa trên được diễn tả bằng lời như sau :
"$\lim_{x \to a} f(x) = L$ có nghĩa là khoảng cách giữa $f(x)$ và L có thể được lấy nhỏ tuỳ ý bằng cách lấy khoảng cách giữa x và a đủ nhỏ (nhưng không bằng 0)."

Một cách khác,
"$\lim_{x \to a} f(x) = L$ có nghĩa là các giá trị của $f(x)$ có thể được lấy gần L tuỳ ý bằng cách lấy x đủ gần a (nhưng không bằng a)."

Chúng ta có thể viết lại công thức trong định nghĩa 2 trên dưới dạng các khoảng bằng cách quan sát rằng $|x - a| < \delta$ nghĩa là $-\delta < x - a < \delta$, hay $|x - a| \neq 0$ nghĩa là $x \neq a$. Tương tự, $|f(x) - L| < \epsilon$ nghĩa là $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Vậy định nghĩa 2 được phát biểu lại như sau:

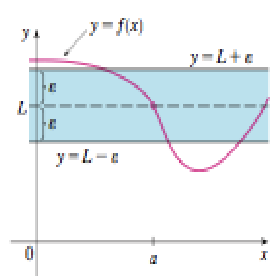
" $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nghĩa là với mọi số $\epsilon > 0$ chúng ta có thể tìm được số $\delta > 0$ (chỉ phụ thuộc vào ϵ) sao cho nếu x nằm trên khoảng mở $(a - \delta, a + \delta)$ và $x \neq a$, khi đó $f(x)$ nằm trong khoảng mở $(L - \epsilon, L + \epsilon)$."

Chúng ta làm sáng tỏ khẳng định này một cách hình học bằng cách biểu diễn một hàm số bởi sơ đồ mũi tên như trong hình 1.7.2, ở đây f đi từ một tập con của $\mathbb{R}$ vào một tập con khác của $\mathbb{R}$.

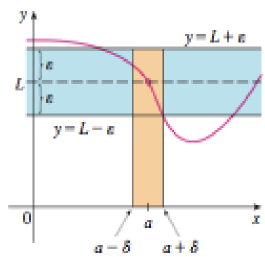
Hình 1.7.2: Hàm số f.

Hình 1.7.3: Giới hạn của hàm số f.

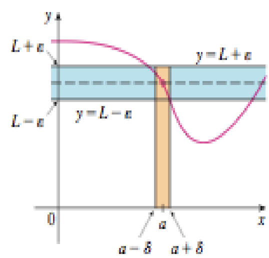
Định nghĩa của giới hạn nói rằng với bất kỳ khoảng nhỏ $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ cho trước quanh L, khi đó ta có thể tìm được một khoảng $(a - \delta, a + \delta)$ quanh a sao cho qua hàm số f thì tất cả các điểm trong khoảng $(a - \delta, a + \delta)$ (có thể ngoại trừ điểm a) thành các điểm nằm trong $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ (xem hình 1.7.3).



Hình 1.7.4: Minh hoạ giới hạn của hàm số f.



Hình 1.7.5: Minh hoạ giới hạn của hàm số f.



Hình 1.7.6: Minh hoạ giới hạn của hàm số f.

Một cách giải thích hình học khác của giới hạn là thông qua đồ thị của hàm số. Cho trước $\epsilon > 0$, vẽ các đường nằm ngang $y = L - \epsilon$ và $L = L + \epsilon$ và đồ thị hàm số f (xem hình 1.7.4). Nếu $\lim_{x \to a} f(x) = L$ thì ta có thể tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu ta giới hạn điểm x nằm trong khoảng $(a - \delta, a + \delta)$ và $x \neq a$, thì khi đó đường cong $y = f(x)$ sẽ nằm giữa hai đường $y = L + \epsilon$ và $y = L - \epsilon$. (Xem hình 1.7.5) Ta thấy rằng nếu có một số δ như thế được tìm thấy thì với bất kỳ số δ nhỏ hơn cũng thoả mãn điều trên.
Chú ý rằng các quá trình minh hoạ trong hình 1.7.4, 1.7.5 phải thoả với mọi số ϵ dương. Hình 1.7.6 nói rằng nếu ϵ nhỏ hơn được chọn thì số δ cần tìm có thể sẽ nhỏ hơn.

Ví dụ 50. Sử dụng đồ thị hàm số để tìm số δ sao cho

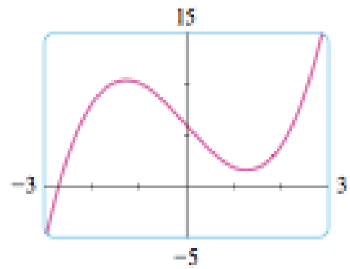
$$\text{nếu } |x - 1| < \delta \text{ thì } |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2.$$

Nói cách khác, tìm số δ tương ứng với $\epsilon = 0.2$ trong định nghĩa của giới hạn cho hàm số $f(x) = x^3 - 5x + 6$ với $a = 1$ và $L = 2$.
Lời giải. Đồ thị hàm số f trong hình 1.7.7, chúng ta quan tâm đến miền gần điểm $(1, 2)$. Chú ý rằng ta có thể viết lại bất đẳng thức

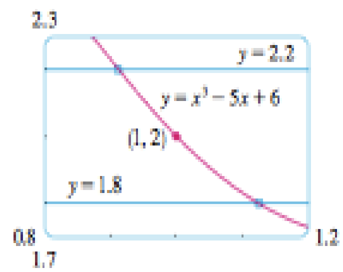
$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

thành

$$1.8 < |x^3 - 5x + 6| < 2.2.$$



Hình 1.7.7: Đồ thị hàm số f.



Hình 1.7.8: Ví dụ 50

Ta cần xác định giá trị của x sao cho đường cong $y = x^3 - 5x + 6$ nằm giữa các đường ngang $y = 1.8$ và $y = 2.2$. Vì vậy ta vẽ đồ thị hàm số f, các đường ngang trên gần điểm $(1, 2)$ trong hình 1.7.8. Sử dụng thước để ước lượng toạ độ x của giao điểm đường cong $y = f(x)$ với các đường ngang, ta được x lần lượt là 1.124 và 0.911. Ta có thể nói rằng

$$\text{nếu } 0.92 < x < 1.12 \text{ thì } 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2.$$

Khoảng $(0.92, 1.12)$ không đối xứng qua 1. Khoảng cách từ 1 đến hai đầu của khoảng trên lần lượt là $0.08, 0.12$. Ta có thể chọn δ là số nhỏ hơn trong hai khoảng cách trên $\delta = 0.08$. Vì vậy ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\text{nếu } |x - 1| < 0.08 \text{ thì } |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2.$$

Mặc dù ta chọn $\delta = 0.08$, nhưng với bất kỳ số $\delta < 0.08$ ta đều có kết luận đúng. □

Qui trình hình học trong ví dụ trên cho ta minh hoạ định nghĩa giới hạn cho $\epsilon = 0.2$ nhưng không chứng minh được giới hạn là 2. Một lời giải là phải tìm được δ cho tất cả ϵ.
Trong chứng minh một khẳng định về giới hạn, nó rất có ích nếu ta xem định nghĩa giới hạn là một thử thách. Đầu tiên nó thử thách bạn với một số ϵ. Khi đó bạn phải tìm một số δ thích hợp. Sau đó bạn phải làm tương tự cho tất cả $\epsilon > 0$ (không phải chỉ với một ϵ cụ thể cho trước).

Tưởng tượng một cuộc thi giữa hai người A, B và bạn là người B. Người A quy định số L cho trước được xấp xỉ bởi $f(x)$ với sai số nhỏ hơn ϵ (chẳng hạn 0.01). Người B sẽ trả lời bằng cách tìm số δ sao cho nếu $0 < |x-a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Sau đó A tiếp tục thách thức B bằng cách chọn ϵ nhỏ hơn (ví dụ 0.001). Một lần nữa B phải tìm một số δ tương ứng. Thông thường thì khi lấy ϵ càng nhỏ thì δ được tìm càng nhỏ. Nếu B luôn chiến thắng mặc cho A chọn số ϵ nhỏ như thế nào, ta nói $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Ví dụ 51. Chứng minh rằng $\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$.
Lời giải.
1. *Phân tích cơ bản để dự đoán δ.* Cho trước $\epsilon > 0$, ta muốn tìm $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } |x-3| < \delta \text{ thì } |(4x-5) - 7| < \epsilon.$$

Nhưng $|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3|$, vì vậy

$$\text{nếu } |x-3| < \delta \text{ thì } 4|x-3| < \epsilon$$

nghĩa là

$$\text{nếu } |x-3| < \delta \text{ thì } |x-3| < \epsilon/4.$$

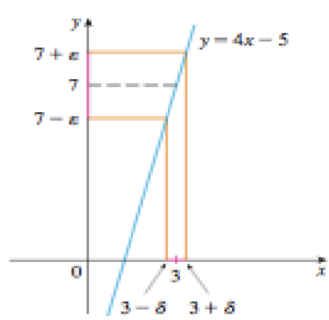
Ta dự đoán số $\delta = \epsilon/4$.
2. *Chứng minh.* Cho trước một $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \epsilon/4$. Nếu $0 < |x-3| < \delta$ thì

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = \epsilon.$$

Vậy

$$\text{nếu } |x-3| < \delta \text{ thì } |(4x-5) - 7| < \epsilon$$

hay $\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$. Ví dụ này được minh hoạ bằng hình 1.7.9. □



Hình 1.7.9: Ví dụ 51

Chú ý rằng lời giải trong ví dụ 51 có hai bước : dự đoán và chứng minh. Ta phân tích cơ bản để dự đoán δ trong bước một, và trong bước hai ta chứng minh điều dự đoán trong bước một một cách chính xác toán học. Điều này xảy ra rất nhiều trong toán học, trước hết dự đoán kết quả và sau đó chứng minh một cách cẩn thận dự đoán đó là đúng.

Cauchy và giới hạn

Sau sự phát minh của phép tính vi tích phân trong thế kỷ 17 và sự phát triển sau đó trong thế kỷ 18. Các nhà toán học như anh em nhà Bernoulli và Euler khám phá ra sức mạnh của vi tích phân và tìm ra những hệ quả của lĩnh vực mới này cũng như lý thuyết toán học tuyệt vời của nó mà không lo lắng về tính chính xác của chứng minh của mình. Trong thế kỷ 19, kỷ nguyên của sự chính xác toán học. Phong trào trở lại những chủ đề toán học cũ để tìm định nghĩa một cách chính xác và chứng minh một cách cẩn thận cụ thể. Đi đầu cho phong trào này là nhà toán học Pháp Augustin-Louis Cauchy (1789 − 1857), người bắt đầu là kỹ sư trong quân đội và sau đó là giáo sư toán học ở Paris. Ông ấy xem xét ý tưởng giới hạn của Newton, ý tưởng phát triển bởi bởi nhà toán học Pháp khác Jean d'Alembert trong thế kỷ 18, và nêu lên chính xác hơn về giới hạn. Định nghĩa của Cauchy được phát biểu như sau :" Khi các giá trị liên tiếp được quy cho một biến tiến tới một giá trị cho trước một cách không giới hạn để mà các giá trị tại biến khác biệt nhỏ tuỳ ý với một số, thì số này được gọi là giới hạn của các giá trị khác." Nhưng khi Cauchy sử dụng định nghĩa này trong ví dụ và chứng minh ông ấy thường dùng bất đẳng thức delta-epsilon tương tự như định nghĩa trong phần này. Một chứng minh của Cauchy thường là "Chọn δ và ϵ" là hai số nhỏ ... Ông ấy sử dụng ϵ bởi vì sự tương ứng giữa từ epsilon và tiếng Pháp erreur, δ trong tiếng Pháp nghĩa là khác biệt. Sau đó nhà toán học Đức Karl Weierstrass (1815 − 1897) phát biểu chính xác định nghĩa giới hạn như trong định nghĩa 2.

Những định nghĩa trực quan về giới hạn một bên trong phần 1.5 được phát biểu chính xác như sau.

3. Định nghĩa giới hạn bên trái

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

nếu với mọi $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho nếu $a - \delta < x < a$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

4. Định nghĩa giới hạn bên phải

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

nếu với mọi $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho nếu $a < x < a + \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Chú ý rằng định nghĩa 3 tương tự như định nghĩa 2 ngoại trừ x bị hạn chế lại phải nằm nửa bên trái trong khoảng $(a - \delta, a)$ của khoảng $(a - \delta, a + \delta)$. Tương tự là định nghĩa 4, x nằm trong khoảng $(a, a + \delta)$.

Ví dụ 52. Chứng minh rằng $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$.
Lời giải.
1. *Dự đoán số δ*
Cho trước một số $\epsilon > 0$. Ta có $a = 0$, $L = 0$ vì vậy ta muốn tìm δ sao cho

$$\text{nếu } 0 < x < \delta \text{ thì } |\sqrt{x} - 0| < \epsilon.$$

hay

$$\text{nếu } 0 < x < \delta \text{ thì } \sqrt{x} < \epsilon.$$

$$\text{nếu } 0 < x < \delta \text{ thì } x < \epsilon^2.$$

Ta dự đoán $\delta = \epsilon^2$.
2. *Chứng minh*
Cho trước $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \epsilon^2$. Nếu $0 < x < \delta$ thì

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Theo định nghĩa 4 ta có $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$. □

Ví dụ 53. Chứng minh $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.
Lời giải.
1. *Dự đoán số δ*
Cho trước $\epsilon > 0$, ta tìm số $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x-3| < \delta \text{ thì } |x^2 - 9| < \epsilon.$$

Ta có $|x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)|$ vì vậy

$$\text{nếu } 0 < |x-3| < \delta \text{ thì } |(x-3)(x+3)| < \epsilon.$$

Chú ý rằng nếu ta có thể tìm được một số dương C sao cho $|x+3| < C$ thì $|(x-3)(x+3)| < C|x-3|$. Và ta lấy $C|x-3| < \epsilon$ bằng cách lấy $|x-3| < \epsilon/C = \delta$. Ta tìm số dương C như thế nào? Ta giới hạn x nằm trong khoảng xung quanh 3. Ta quan tâm đến những x gần 3, nên nó rất hợp lý nếu ta giả sử x cách 3 không quá 1 nghĩa là $|x-3| < 1$, hay $2 < x < 4$, $5 < x+3 < 7$. Ta chọn $C = 7$. Nhưng bây giờ ta có hai biểu thức

$$|x-3| < 1 \text{ và } |x-1| < \frac{\epsilon}{C} = \frac{\epsilon}{7}.$$

Để chắc chắn rằng cả hai bất đẳng thức trên đều thoả mãn, ta lấy δ là số nhỏ hơn trong hai số 1 và $\epsilon/7$ nghĩa là $\delta = min\{1, \epsilon/7\}$.
2. *Chứng minh*
Cho $\epsilon > 0$, chọn $\delta = min\{1, \epsilon/7\}$. Nếu $0 < |x-3| < \delta$, thì $|x-3| < 1$, $|x+3| < 7$. Ta cũng có $|x-3| < \epsilon/7$, vì vậy

$$|x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)| < (\epsilon/7)7 = \epsilon.$$

Vậy $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. □

Như trong ví dụ 53 chỉ ra, không phải luôn luôn dễ dàng sử dụng định nghĩa giới hạn để chứng minh các bài toán giới hạn. Chẳng hạn, nếu chúng ta được cho các hàm số phức tạp hơn như $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, một chứng minh sẽ yêu cầu một sự khéo léo tài tình. Một cách may mắn, những quy tắc giới hạn trong phần 1.6 được chứng minh bằng định nghĩa 2 và khi đó giới hạn của những hàm phức tạp có thể được tìm thấy một cách toán học từ các quy tắc đó mà không cần dùng định nghĩa một cách trực tiếp.
Chẳng hạn, ta dùng định nghĩa chứng minh quy tắc cộng: Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim_{x\to a} g(x) = L$ thì

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M.$$

Những quy tắc còn lại được chứng minh trong bài tập và phụ lục F.

Chứng minh quy tắc cộng. Cho trước $\epsilon > 0$, ta tìm số $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon.$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác $|a + b| \leq |a| + |b|$ ta viết

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Ta sẽ tìm cách làm cho mỗi số bên vế phải bất đẳng thức trên nhỏ hơn $\epsilon/2$. Từ $\epsilon/2 > 0$ và $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ta tìm được một số $\delta_1 > 0$ sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

Tương tự,

$$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ thì } |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Đặt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ta có nếu $0 < |x-a| < \delta$ thì $0 < |x-a| < \delta_1$ và $0 < |x-a| < \delta_2$. Theo trên ta sẽ có $|f(x) - L| < \epsilon/2$ và $|g(x) - M| < \epsilon/2$ nếu $0 < |x - a| < \delta$, và vì vậy

$$\text{nếu } 0 < |x-a| < \delta \text{ thì } |[f(x)+g(x)]-(L+M)| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M| < \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon.$$

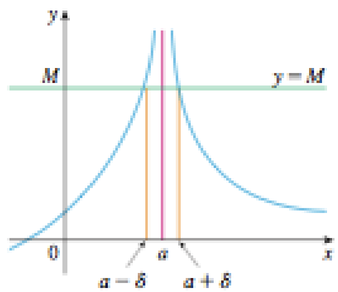
Từ định nghĩa của giới hạn ta có

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M.$$

Giới hạn vô cực
Giới hạn vô cực cũng có thể được định nghĩa một cách chính xác. Sau đây là cách định nghĩa chính xác tương ứng định nghĩa 4 của phần 1.5.

> 6. **Định nghĩa** Cho f là một hàm số định nghĩa trên khoảng mở chứa điểm a, có thể ngoại trừ điểm a. Khi đó,
> $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
> nghĩa là với mọi số dương M, tồn tại một số dương δ sao cho
> nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) > M$.

Điều này nói rằng các giá trị của $f(x)$ có thể được lấy lớn tuỳ ý (lớn hơn số M) bằng cách lấy x đủ gần a (với khoảng cách nhỏ hơn δ, mà δ phụ thuộc vào M, $x \neq a$). Một minh hoạ bằng hình học trong hình 1.7.10.



Hình 1.7.10: Giới hạn vô cực.

Cho trước một đường thẳng ngang $y = M$, ta có thể tìm được số $\delta > 0$ sao cho nếu ta hạn chế x nằm trong khoảng $(a - \delta, a + \delta)$ nhưng $x \neq a$, khi đó đường cong $y = f(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = M$. Bạn có thể thấy rằng nếu M lớn hơn được chọn thì δ có lẽ nhỏ hơn được yêu cầu.

Ví dụ 54. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Lời giải. Lấy M là số dương cho trước. Chúng ta muốn tìm số $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x| < \delta \text{ thì } \frac{1}{x^2} > M.$$

Nhưng $x^2 > M \iff x^2 < 1/M \iff |x| < 1/\sqrt{M}$. Vì vậy nếu ta chọn $\delta = 1/\sqrt{M}$ và $0 < |x| < \delta$ thì $1/x^2 > M$. Theo định nghĩa 6 ta suy ra điều phải chứng minh.

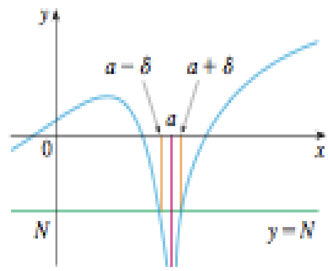
Một cách tương tự, sau đây là một phiên bản chính xác của định nghĩa 5 trong phần 1.5, nó được minh họa bởi hình 1.7.11. □

> 7. **Định nghĩa** Cho f là một hàm số định nghĩa trên khoảng mở chứa điểm a, có thể ngoại trừ điểm a. Khi đó,
> $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
> nghĩa là với mọi số âm N, tồn tại một số dương δ sao cho
> nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) < N$.

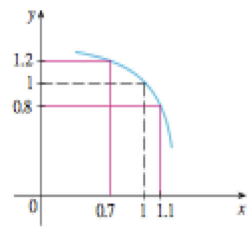
Bài tập 1.7.

1.Cho trước đồ thị hàm số f trong hình dưới, tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } |x - 1| < \delta \text{ thì } |f(x) - 1| < 0.2.$$



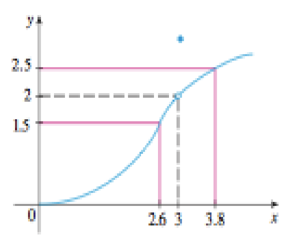
Hình 1.7.11: Giới hạn vô cực.



Hình 1.7.12: Bài tập 1.

2. Cho trước đồ thị hàm số f trong hình dưới, tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } 0 < |x-3| < \delta \text{ thì } |f(x)-2| < 0.5.$$



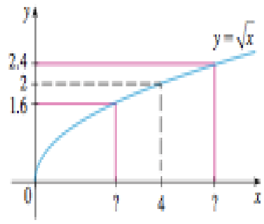
Hình 1.7.13: Bài tập 2.

3. Cho trước đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trong hình dưới, tìm số δ sao cho

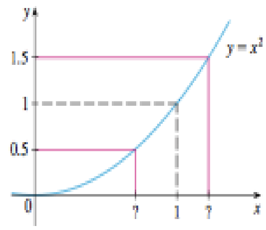
$$\text{nếu } |x-4| < \delta \text{ thì } |f(x)-\sqrt{2}| < 0.4.$$

4. Cho trước đồ thị hàm số $f(x) = x^2$ trong hình dưới, tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } |x-1| < \delta \text{ thì } |f(x)-1| < 0.5.$$



Hình 1.7.14: Bài tập 3.



Hình 1.7.15: Bài tập 4.

5. Vẽ đồ thị hàm số và dùng nó để tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } |x-\pi/4|<\delta \text{ thì } |\tan x - 1| < 0.2.$$

6. Vẽ đồ thị hàm số và dùng nó để tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } |x-1|<\delta \text{ thì } |(2x)/(x^2+4)-0.4|<0.1.$$

7. Cho giới hạn $\lim_{x\to 2}(x^3-3x+4)=6$, tìm các số δ tương ứng với $\epsilon = 0.2; 0.1$.
8. Cho giới hạn

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x+1}{3x-4}=0.5$$

tìm các số δ tương ứng với $\epsilon = 0.05; 0.1$.
9. Cho giới hạn

$$\lim_{x\to \pi/2}\tan^2 x=\infty$$

tìm các số δ tương ứng với $M = 1000; 10000$.
10. Vẽ đồ thị hàm số và dùng nó để tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } 5<x<5+\delta \text{ thì } \frac{x^2}{\sqrt{x-5}}>100.$$

11. Một nhà máy sản xuất một cái đĩa kim loại hình tròn có diện tích 1000 cm^2.
(a) Tìm bán kính đĩa trên?

(b) Nếu sai số cho phép của diện tích đĩa là $\pm 5\ cm^2$ thì nhà máy cần sản xuất cái đĩa có bán kính gần với bán kính chính xác như thế nào?
(c) Theo cách viết với δ, ϵ của định nghĩa $\lim_{x\to a} f(x) = L$ thì x, $f(x)$, a, L tương ứng là gì? Và ϵ là bao nhiêu? δ tương ứng là bao nhiêu?
12. Một lò nấu thuỷ tinh được dùng trong nghiên cứu để xác định cách tốt nhất mà nhà máy tinh thể dùng dòng điện tương thích. Đối với tinh thể chuẩn, nhiệt độ được kiểm soát một cách chính xác bằng cách thay đổi năng lượng cho vào. Mối quan hệ đó cho bởi phương trình

$$T(\omega) = 0.1\omega^2 + 2.155\omega + 20$$

với T là nhiệt độ theo Celsius và ω là năng lượng vào theo oát (watt).
(a) Năng lượng là bao nhiêu để duy trì nhiệt độ 200 độ C?
(b) Nếu nhiệt độ cho phép thay đổi đến ± 1 độ C, tìm năng lượng vào cho phép?
(c) Theo cách viết với δ, ϵ của định nghĩa $\lim_{x\to a} f(x) = L$ thì x, $f(x)$, a, L tương ứng là gì? Và ϵ là bao nhiêu? δ tương ứng là bao nhiêu?
13.
(a) Tìm số δ sao cho

$$\text{nếu } |x-2| < \delta \text{ thì } |4x-8| < \epsilon = 0.1.$$

(b) Lặp lại câu a với $\epsilon = 0.01$.
14. Cho $\lim_{x\to 2}(5x-7) = 3$, tìm các giá trị δ tương ứng với $\epsilon = 0.1; 0.05; 0.01$.
15 − 18. Chứng minh khẳng định sau bằng cách dùng định nghĩa δ, ϵ và minh hoạ bằng sơ đồ như hình 1.7.9.

15. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{1}{3}x\right) = 2$ **16**. $\displaystyle\lim_{x\to 4}(2x-5) = 3$

17. $\displaystyle\lim_{x\to -3}(1-4x) = 13$ **18**. $\displaystyle\lim_{x\to -2}(3x+5) = -1.$

19 − 32. Chứng minh các khẳng định sau bằng định nghĩa δ, ϵ.

19. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2+4x}{3} = 2$ **20**. $\displaystyle\lim_{x\to 10}(3-4x/5) = -5.$

21. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$ **22**. $\displaystyle\lim_{x\to -1.5}\frac{9-4x^2}{3+2x} = 6.$

23. $\displaystyle\lim_{x\to a} x = a$ **24**. $\displaystyle\lim_{x\to a} c = c.$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ **26**. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 = 0.$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0$ **28**. $\displaystyle\lim_{x\to -6^+} \sqrt[8]{6+x} = 0.$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-4x+5) = 1$ **30**. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+2x-7) = 1.$

31. $\displaystyle\lim_{x\to -2}(x^2-1) = 3$ **32**. $\displaystyle\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$

33. Kiểm tra rằng một lựa chọn khác của δ để chứng minh $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ trong ví dụ 53 là $\delta = \min\{2, \epsilon/8\}$.
34. Kiểm tra bằng hình học rằng lựa chọn lớn nhất cho δ để chứng minh rằng $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ là $\delta = \sqrt{9+\epsilon} - 3$.
35.
(a) Sử dụng đồ thị để tìm số δ tương ứng với $\epsilon = 0.4$ cho $\lim_{x\to 1}(x^2 + x^1) = 3$.
(b) Sử dụng máy tính có phần mềm giải phương trình $x^2 + x + 1 = 3 + \epsilon$, tìm giá trị lớn nhất của δ để giới hạn trong câu a thoả mãn theo định nghĩa với mọi ϵ.
(c) Cho $\epsilon = 0.4$ trong câu b, so sánh với câu trả lời trong câu a.
36. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

37. Chứng minh rằng $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ nếu $a > 0$.
Gợi ý: Sử dụng

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

38. H là hàm Heaviside được định nghĩa trong ví dụ 34 phần 1.5. Dùng định nghĩa chứng ming rằng $\lim_{t\to 0} H(t)$ không tồn tại. (Gợi ý : Dùng phản chứng giả sử tồn tại giới hạn là L. Chọn $\epsilon = 1/2$ trong định nghĩa giới hạn và tìm một điều mâu thuẫn.)
39. Cho hàm số f được định nghĩa bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.
40. Dùng định nghĩa $2, 3, 4$ chứng minh định lý 1 trong phần 1.6.
41. x gần -3 như thế nào để

$$\frac{1}{(x+3)^4} > 10000.$$

42. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty.$$

43. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5}{(x+1)^3} = \infty.$$

44. Giả sử rằng $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ và $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Chứng minh rằng :
(a)

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty.$$

(b)

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty \text{ nếu } c > 0.$$

(c)

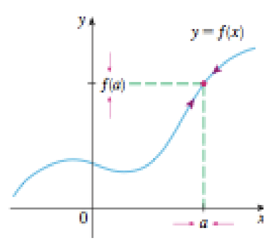
$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = -\infty \text{ nếu } c < 0.$$

1.8 Sự liên tục

Chúng ta đã thấy trong phần 1.6 rằng giới hạn của một hàm số khi x tiến đến a có thể được tìm thấy một cách đơn giản bằng cách tính giá trị của hàm số tại a. Những hàm số có tính chất này được gọi là *liên tục tại a*. Chúng ta sẽ thấy định nghĩa toán học của hàm số liên tục thì tương đồng với ý nghĩa của từ liên tục trong thực tế. (Một quá trình liên tục là một thứ xảy ra dần dần mà không bị gián đoạn hay ngừng.)

1. **Định nghĩa** Một hàm số f được gọi là liên tục tại a nếu $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Được minh hoạ trong hình 1.8.1, nếu f liên tục thì các điểm $(x, f(x))$ trên đồ thị của f tiến về $(a, f(a))$. Vì vậy không có khoảng trống nào trên đường cong đồ thị hàm số f.



Hình 1.8.1: Hàm số liên tục tại a.

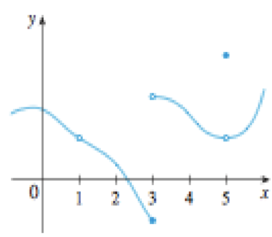
Chú ý rằng định nghĩa 1 trên đòi hỏi ba điểm quan trọng sau nếu f liên tục tại a :

1. $f(a)$ được định nghĩa tốt, nghĩa là, a nằm trong miền xác định của f.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Định nghĩa nói rằng f liên tục tại a nếu $f(x)$ tiến về $f(a)$ khi x tiến về a. Vì vậy một hàm số liên tục có tính chất một sự thay đổi nhỏ theo x dẫn đến một sự thay đổi nhỏ theo $f(x)$. Thực tế ta có sự thay đổi của $f(x)$ có thể được lấy nhỏ tuỳ ý khi ta thay đổi x đủ nhỏ.
Nếu f được định nghĩa gần a, chúng ta nói rằng f gián đoạn tại a nếu f không liên tục tại a.
Các hiện tượng vật lý thường là liên tục. Chẳng hạn, sự di chuyển của một xe tải

liên tục theo thời gian, chiều cao của một người theo thời gian. Nhưng cũng có một số hiện tượng xuất hiện sự gián đoạn như trong các mạch điện. (Xem ví dụ 34 phần 1.5, hàm Heaviside thì gián đoạn tại 0.)
Một cách hình học, bạn có thể nghĩ một hàm số liên tục trên một khoảng như là một hàm số mà đồ thị của nó không có nét đứt, ngắt khoảng. Đồ thị được vẽ mà không nâng bút khỏi giấy.

Ví dụ 55. Hình 1.8.2 là đồ thị hàm số f. Tìm điểm gián đoạn của hàm số f và giải thích vì sao?
Lời giải.



Hình 1.8.2: Ví dụ 55.

f gián đoạn tại điểm $a = 1$ vì ta thấy tại 1 ta có một ngắt khoảng. Thực tế, $f(1)$ không được định nghĩa. Đồ thị cũng bị ngắt khoảng tại điểm $a = 3$, f gián đoạn tại $a = 3$ vì $\lim_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại. Cuối cùng ta có tại điểm ngắt khoảng $a = 5$, $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$, vì vậy $a = 5$ cũng là một điểm gián đoạn. □

Ví dụ 56. Tìm điểm gián đoạn của mỗi hàm số sau :
(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}.$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

(c)

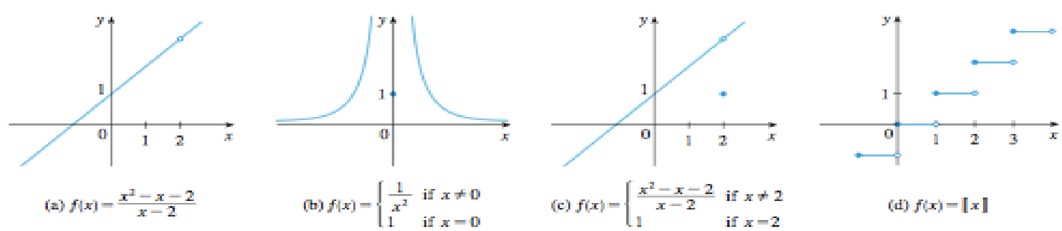
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$$

(d) $f(x) = [x]$ (hàm phần nguyên lớn nhất của x).

Lời giải.
(a) Chú ý rằng $f(2)$ không được định nghĩa (không xác định), vì vậy f thì không liên tục tại 2. Sau này chúng ta sẽ thấy f liên tục tại tất cả các điểm còn lại.

(b) Ta có $f(0) = 1$ nhưng
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$
không tồn tại. (Xem trong ví dụ 36 phần 1.5) Vì vậy f không liên tục tại 0 hay gián đoạn tại 0.
(c) Ta có $f(2) = 1$ nhưng
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3 \neq f(2).$$
Vì vậy f thì gián đoạn tại 2.
(d) Hàm phần nguyên lớn nhất gián đoạn tại tất cả các số nguyên bởi vì $\lim_{x\to n}[x]$ không tồn tại nếu n là số nguyên. (Xem ví dụ 48 và bài tập 51 phần 1.6) □

Hình 1.8.3 minh hoạ đồ thị các hàm số trong ví dụ trên. Trong mỗi trường hợp đồ thị không thể được vẽ mà không nhấc bút lên khỏi mặt giấy bởi vì một khoảng nứt, một khoảng trống hay điểm nhảy xuất hiện trong đồ thị. Loại gián đoạn minh hoạ trong (a) và (c) gọi là **gián đoạn khử được** bởi vì chúng ta có thể bỏ đi điểm gián đoạn bằng cách định nghĩa lại f tại một điểm 2 để được hàm số liên tục. Sự gián đoạn trong (b) gọi là **gián đoạn vô hạn**. Còn sự gián đoạn trong (d) được gọi là **gián đoạn có bước nhảy hữu hạn** bởi vì hàm số nhảy từ một giá trị sang một giá trị khác.



Hình 1.8.3: Đồ thị các hàm số trong ví dụ 56.

2. Định nghĩa: Một hàm số f **liên tục bên phải tại** a nếu
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
và f **liên tục bên trái tại** a nếu
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Ví dụ 57. Tại mỗi số nguyên n, hàm số phần nguyên lớn nhất $f(x) = [x]$ (xem hình 1.8.3d) liên tục bên phải nhưng gián đoạn bên trái bởi vì
$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} [x] = n = f(n)$$
nhưng
$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} [x] = n - 1 \neq f(n).$$

3. Định nghĩa : Hàm số f được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm trong khoảng đó. (Nếu f chỉ được định nghĩa một bên của điểm cuối của khoảng thì chúng ta hiểu liên tục tại điểm cuối là liên tục bên phải hoặc liên tục bên trái.)

Ví dụ 58. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $[-1, 1]$.

Lời giải. Nếu $-1 < a < 1$ thì sử dụng các quy tắc giới hạn ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(1 - \sqrt{x^2}) \\
&= 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2} \text{ (quy tắc 2 và 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a}(1-x^2)} \text{ (quy tắc 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1-a^2} \text{ (quy tắc 2,7 và 9)} \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

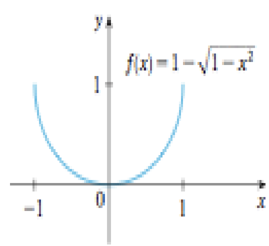
Vậy f liên tục tại a nếu $-1 < a < 1$. Tính toán tương tự ta có

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

vậy f liên tục bên phải tại -1 và liên tục bên trái tại 1. Nghĩa là f liên tục trên khoảng $[-1, 1]$ bởi định nghĩa 3.
Đồ thị của hàm số f được vẽ trong hình 1.8.4. Nó là nửa dưới của hình tròn

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

□



Hình 1.8.4: Đồ thị của nửa dưới hình tròn $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Thay vì sử dụng các định nghĩa 1, 2 và 3 để kiểm tra sự liên tục của một hàm số như ta đã làm trong ví dụ 58, nó rất thuận lợi khi ta sử dụng định lý sau. Định lý chỉ ra cách xây dựng những hàm số liên tục phức tạp từ những hàm số đơn giản.

4. Định lý : Nếu f và g liên tục tại a và c là một hằng số, khi đó các hàm số sau cũng liên tục tại a :
$f + g$, $f - g$, cf , fg và $\frac{f}{g}$ nếu $g(a) \neq 0$.

Chứng minh.
Mỗi phần của định lý này tương ứng với mỗi quy tắc giới hạn trong phần 1.6. Ta chỉ chứng minh cho tổng $f+g$. Bởi vì f và g liên tục tại a nên ta có

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ và } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \text{ (quy tắc 1)} \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a).\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $f+g$ liên tục tại a. □

Theo định lý 4 và định nghĩa 3, nếu f và g liên tục trên một khoảng thì các hàm số $f+g$, $f-g$, cf, fg, và f/g (nếu g luôn khác 0) cũng liên tục trên khoảng đó. Định lý sau được phát biểu trong phần 1.6 như là một "tính chất thay thế trực tiếp".

> 5. Định lý
> (a) Hàm đa thức liên tục khắp nơi, nghĩa là nó liên tục trên $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
> (b) Hàm số phân thức liên tục tại mọi điểm mà hàm số được định nghĩa, nghĩa là hàm số liên tục trên miền xác định.

Chứng minh.
(a) Đa thức có dạng

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

với $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n$ là các hằng số. Dùng quy tắc 7 và 9

$$\lim_{x\to a} c_0 = c_0 \text{ và } \lim_{x\to a} x^m = a^m \text{ với } m = 1, 2, \cdots, n.$$

Điều này nghĩa là hàm số $f(x) = x^m$ liên tục. Theo định lý 4 ta có $g(x) = cx^m$ cũng liên tục. Đa thức $P(x)$ là tổng của các hàm số liên tục nên cũng là hàm số liên tục (ta dùng lại định lý 4).
(b) Hàm số phân thức có dạng

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

với P, Q là các đa thức. Miền xác định của f là $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Từ phần (a) định lý 5, P và Q liên tục khắp nơi. Vì vậy theo định lý 4, f liên tục trên D.

Như là một ví dụ minh hoạ cho định lý 5, quan sát rằng thể tích hình cầu thay đổi một cách liên tục với bán kính của nó bởi vì công thức thể tích $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ là một đa thức theo r. Tương tự, một quả bóng được ném thẳng đứng trong không

khí với vận tốc 50 ft/s, khi đó chiều cao của bóng theo $feet$ sau t giây được cho bởi công thức $h(t) = 50t - 16t^2$. Đây cũng là một đa thức, nên chiều cao là một hàm số liên tục của thời gian trôi qua.
Nếu ta biết được sự liên tục của hàm số, ta sẽ tính được các giới hạn một cách nhanh chóng như những ví dụ sau. So sánh với ví dụ $40(b)$ trong phần 1.6.

Ví dụ 59. Tìm

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}.$$

Lời giải.
Hàm số

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

là hàm phân thức, vì vậy theo định lý 5 thì nó liên tục trên miền xác định $\{x : x \neq \frac{5}{3}\}$.
Do vậy

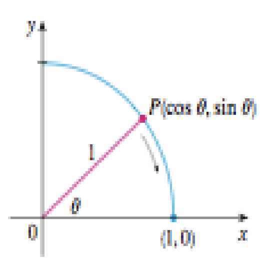
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = -\frac{1}{11}.$$

□

Hầu hết các hàm số quen thuộc thì liên tục trên miền xác định. Ví dụ, quy tắc 10 cho thấy hàm lấy căn là hàm số liên tục. Từ đồ thị của hàm cos và sin trong hình 1.2.18 phần 1.2, ta dự đoán rằng chúng là các hàm liên tục. Chúng ta biết rằng từ định nghĩa của $\sin\theta$ và $\cos\theta$ tạo độ điểm P trong hình 1.8.5 là $(\cos\theta, \sin\theta)$. Khi $\theta \to 0$ thì điểm P tiến về điểm $(1, 0)$. Vậy

$$\boxed{\text{6. } \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 \text{ và } \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0.}$$

Từ $\sin 0 = 0$ và $\cos 0 = 1$, biểu thức 6 xác nhận rằng các hàm số $\cos, \sin$ liên tục tại 0. Công thức cộng của sin và cos suy ra những hàm số này liên tục khắp $\mathbb{R}$ (bài tập 60, 61).

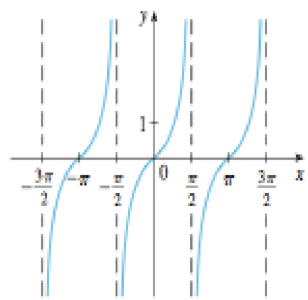


Hình 1.8.5: Minh hoạ hàm số cos, sin.

Theo định lý 4 thì hàm số

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

liên tục trên miền xác định nghĩa là ngoại trừ các điểm x mà $\cos x = 0$. Vì vậy, hàm số $y = \tan x$ có vô hạn các điểm gián đoạn $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \cdots$. (xem hình 1.8.6)



Hình 1.8.6: Minh hoạ hàm số tan.

7. Định lý : Các hàm số dạng **đa thức, phân thức, căn thức và hàm lượng giác** thì liên tục trên miền xác định của chúng.

Ví dụ 60. Tìm các khoảng mà hàm số sau liên tục.
(a)

$$f(x) = x^{100} - 2x^{37} + 75.$$

(b)

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 17}{x^2 - 1}.$$

(c)

$$h(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

Lời giải.
(a) f là đa thức nên nó liên tục trên $(-\infty, \infty)$.
(b) g là hàm phân thức, nên nó liên tục trên miền xác định $D = \{x : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x : x \neq \pm 1\}$. Vậy g liên tục trên $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ và $(1, \infty)$.
(c) Ta viết $h(x) = F(x) + G(x) - H(x)$ với

$$F(x) = \sqrt{x}\ ,\ G(x) = \frac{x+1}{x-1}\ ,\ H(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

F liên tục trên $[0, \infty)$ theo định lý 7. G là hàm phân thức, nên nó liên tục khắp nơi ngoại trừ $x = 1$. H cũng là hàm phân thức liên tục khắp nơi. Vì vậy, theo định lý 4 hàm số h liên tục trên $[0, 1)$, $(1, \infty)$. □

Ví dụ 61. Tìm
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}.$$

Lời giải.
Định lý 7 cho ta hàm số $y = \sin x$ liên tục. Hàm số $y = 2 + \cos x$ cũng liên tục và $2 + \cos x$ luôn khác không $(2 + \cos x > 0)$. Vậy hàm phân thức

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

liên tục khắp $\mathbb{R}$. Vì vậy ta có

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} = f(\pi) = 0.$$

□

Một cách khác để thu được một hàm liên tục từ hai hàm số liên tục là dùng hàm hợp. Nó là kết quả của định lý sau đây.

8. Định lý : Nếu f liên tục tại b và $\lim_{x\to a} g(x) = b$ thì $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$.

Một cách trực quan, định lý 8 hợp lý vì khi x gần a, thì $g(x)$ gần b và từ hàm số f liên tục tại b nên $f(g(x))$ gần về $f(b)$. Chứng minh của định lý 8 có trong phụ lục F.

Ta áp dụng định lý 8 cho trường hợp đặc biệt $f(x) = \sqrt[n]{x}$ với n là một số nguyên dương. Ta có
$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$
và
$$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}.$$
Theo định lý 8, ta có
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$
và vì vậy quy tắc giới hạn 11 được chứng minh. (Chú ý ta giả sử phép lấy căn tồn tại.)

9. Định lý: Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f \circ g$ được cho bởi công thức $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ liên tục tại a.

Định lý này thường được diễn tả bằng cách nói là "một hàm số liên tục của một hàm số liên tục là một hàm số liên tục".

Chứng minh.
Vì g liên tục tại a nên ta có
$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Vì f liên tục tại $b = g(a)$, ta áp dụng định lý 8 để thu được

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

điều đó khẳng định hàm số $h(x) = f(g(x))$ liên tục tại a, nghĩa là $f \circ g$ liên tục tại a.

Ví dụ 62. Các hàm số sau liên tục trên khoảng nào?

$$a.\ h(x) = \sin(x^2) \qquad b.\ F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+7}-4}.$$

Lời giải.
(a) Ta có $h(x) = f(g(x))$ với $f(x) = \sin x$ và $g(x) = x^2$. Bởi vì f và g liên tục khắp nơi trên $\mathbb{R}$ nên h cũng liên tục trên toàn $\mathbb{R}$.
(b) Ta phân tích F thành hàm hợp của bốn hàm số $F(x) = f(g(h(k(x))))$ với $f(x) = 1/x$, $g(x) = x - 4$, $h(x) = \sqrt{x}$ và $k(x) = x^2 + 7$. Mỗi hàm số trên liên tục trên miền xác định của chúng theo định lý 5 và 7. Vì vậy theo định lý 9 thì hàm số F liên tục trên miền xác định của nó và là

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+7} \neq 4\} = \{x : x \neq \pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty).$$

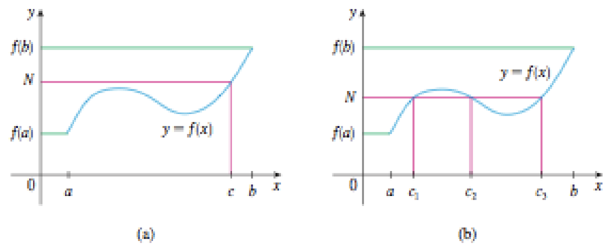
□

Một tính chất quan trọng của hàm số liên tục được phát biểu trong định lý sau đây (phần chứng minh có thể được tìm thấy trong các cuốn sách về phép tính vi tích phân).

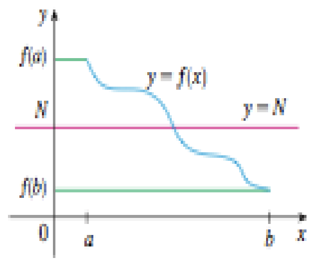
> 10. Định lý giá trị trung gian Giả sử f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và N là một số bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, với $f(a) \neq f(b)$. Khi đó tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = N$.

Định lý giá trị trung gian phát biểu rằng một hàm số liên tục lấy mọi giá trị trung gian nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Điều này được minh hoạ trong hình 1.8.7. Chú ý rằng giá trị N có thể được lấy một lần như trong hình 1.8.7(a) hay nhiều lần như trong hình 1.8.7(b).

Nếu chúng ta nghĩ một hàm số liên tục như là một hàm số mà đồ thị của nó không có lỗ trống hay đứt khoảng, khi đó dễ dàng thấy định lý giá trị trung gian là đúng. Trong ngôn ngữ hình học, đường nằm ngang $y = N$ nằm giữa $y = f(a)$ và $y = f(b)$ như trong hình 1.8.8, khi đó đồ thị hàm số f luôn cắt $y = N$ ở ít nhất một điểm. Điều quan trọng trong định lý 10 là hàm số f liên tục. Định lý giá trị trung gian không đúng cho hàm số không liên tục (xem bài tập 48).



Hình 1.8.7: Minh hoạ định lý giá trị trung gian.



Hình 1.8.8: Minh hoạ hình học định lý giá trị trung gian.

Chúng ta sử dụng định lý giá trị trung gian để xác định nghiệm của các phương trình như trong ví dụ sau.

Ví dụ 63. Chứng minh rằng có một nghiệm của phương trình

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

nằm giữa 1 và 2.
Lời giải.
Đặt $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Chúng ta tìm một nghiệm của phương trình đã cho, nghĩa là một số $c \in (1, 2)$ sao cho $f(c) = 0$. Do vậy, lấy $a = 1$, $b = 2$ và $N = 0$ trong định lý 10. Ta có

$$f(1) = -1 < 0 \text{ và } f(2) = 12 > 0.$$

Vì $f(1) < 0 < f(2)$ và f là hàm số liên tục, định lý giá trị trung gian cho ta một số $c \in (1, 2)$ sao cho $f(c) = 0$. Nói cách khác, phương trình $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm c trong khoảng $(1, 2)$.
Sự thật ta có thể xác định nghiệm chính xác hơn bằng định lý giá trị trung gian. Từ

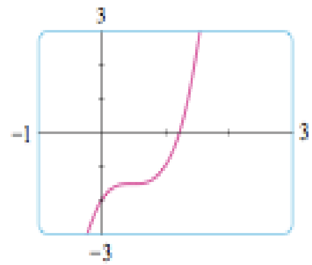
$$f(1.2) = -0.128 < 0 \text{ và } f(1.3) = 0.548 > 0$$

một nghiệm phải nằm giữa 1.2 và 1.3. Dùng máy tính ta có

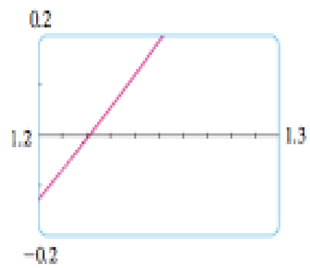
$$f(1.22) = -0.007008 \text{ và } f(1.23) = 0.056068 > 0$$

vì vậy phương trình có một nghiệm nằm trong $(1.22, 1.23)$. □

Chúng ta có thể dùng máy tính để minh hoạ ứng dụng của định lý giá trị trung gian trong ví dụ 63. Hình 1.8.9 chỉ ra rằng đồ thị hàm số f trong hình chữ nhật $[-1,3]\times[-3,3]$ và bạn có thể thấy rằng đồ thị cắt trục toạ độ x tại điểm giữa 1 và 2. Hình 1.8.10 chỉ ra kết quả bằng cách phóng to để xem xét trong hình chữ nhật $[1.2,1.3]\times[-0.2,0.2]$.



Hình 1.8.9: Minh hoạ ví dụ 63.

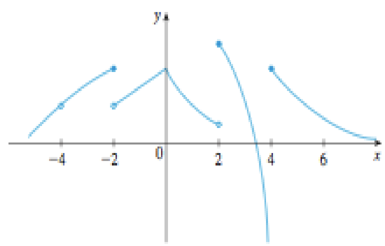


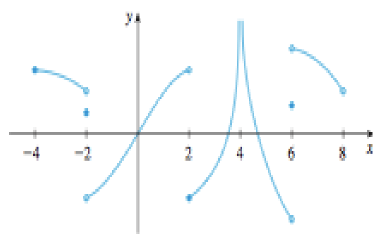
Hình 1.8.10: Minh hoạ ví dụ 63.

Định lý giá trị trung gian đóng vai trò quan trọng trong cách hoạt động của các thiết bị máy tính ... Một máy tính sẽ tính toán hữu hạn điểm trên đồ thị và mở các điểm ảnh ("pixels") mà các giá trị chứa trong các "pixels" này. Giả sử rằng hàm số đã vẽ là liên tục và lấy mọi giá trị trung gian nằm giữa hai điểm liền nhau. Khi đó máy tính sẽ nối các pixels lại bằng cách mở các điểm pixels trung gian.

Bài tập 1.8.
1. Cho một ví dụ về hàm số f liên tục tại 4.
2. Nếu f liên tục trên $(-\infty,\infty)$, chúng ta có thể kết luận gì về đồ thị của nó?
3. Cho đồ thị hàm số f như hình dưới.
(a) Tìm các điểm gián đoạn của f và giải thích.
(b) Từ các điểm tìm được trên câu (a), xác định tại điểm nào mà hàm số liên tục bên trái hoặc bên phải hoặc không liên tục cả hai bên.

4. Từ đồ thị hàm số g cho bên dưới, tìm các khoảng mà hàm số g liên tục.





5 − 8. Vẽ đồ thị minh hoạ hàm số f liên tục thoả mãn từng khẳng định gián đoạn sau.
5. Gián đoạn nhưng liên tục bên phải tại 2.
6. Gián đoạn tại -1 và 4 nhưng liên tục bên trái tại -1 và liên tục bên phải tại 4.
7. Gián đoạn khử được tại 3 và gián đoạn bước nhảy tại 5.
8. Không liên tục cả bên trái lẫn bên phải tại -2, chỉ liên tục bên trái tại 2.
9. Tiền thuế T cho một quảng đường cho một thời gian tính theo giờ là 5 đô la. Trong khi giờ cao điểm 7 đến 10 giờ sáng và 4 đến 7 giờ chiều thì $T = 7$ đô la.
(a) Vẽ đồ thị của T như là hàm số của thời gian theo giờ tính từ 1 giờ sáng.
(b) Có kết luận gì về các điểm gián đoạn và tầm quan trọng của nó cho tài xế.
10. Giải thích vì sao mỗi hàm số sau liên tục hay không liên tục.
(a) Nhiệt độ của một vùng cụ thể là một hàm số theo thời gian.
(b) Nhiệt độ tại một thời điểm cụ thể như là một hàm số theo khoảng cách lấy gốc là Hà Nội dọc theo vào Hồ Chí Minh.
(c) Độ cao so với mực nước biển như là một hàm số theo khoảng cách dọc Bắc Nam tính từ Hà Nội.
(d) Giá của taxi như là một hàm số theo khoảng cách đi được.
(e) Dòng điện trong mạch cho đèn điện như là một hàm số của thời gian.
11. Giả sử f và g là các hàm số liên tục sao cho $g(2) = 6$ và $\lim_{x\to 2}[3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Tính $f(2)$.
12 − 14. Sử dụng định nghĩa liên tục và các tính chất của giới hạn để chỉ ra rằng hàm số sau liên tục tại điểm a cho trước.
12.
$$f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2+4}, \qquad a = 2.$$

13.
$$f(x) = (x + 2x^3)^4, \qquad a = -1.$$

14.
$$h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \qquad a = 1.$$

15 – 16. Sử dụng định nghĩa liên tục và các tính chất của giới hạn để chỉ ra rằng hàm số sau liên tục trên khoảng cho trước.

15.
$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}, \qquad (2, \infty).$$

16.
$$g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \qquad (-\infty, 3].$$

17 – 22. Giải thích vì sao các hàm số sau gián đoạn tại điểm a cho trước. Vẽ đồ thị mỗi hàm số.

17.
$$f(x) = \frac{1}{x + 2}, \qquad a = -2.$$

18.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{nếu } x \neq -2 \\ 1 & \text{nếu } x = -2. \end{cases} \qquad a = -2.$$

19.
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 1/x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases} \qquad a = 1.$$

20.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases} \qquad a = 1.$$

21.
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{nếu } x > 0. \end{cases} \qquad a = 0.$$

22.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 6 & \text{nếu } x = 3. \end{cases} \qquad a = 3.$$

23 – 24. Bạn có thể định nghĩa $f(2)$ sao cho mỗi hàm số có gián đoạn khử được trở thành liên tục tại 2.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **24**. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25 – 32. Sử dụng định lý $4, 5, 7$ và 9 giải thích vì sao các hàm số sau liên tục trên miền xác định. Tìm miền xác định.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$ **26**. $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3-2}$ **28**. $h(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$

29. $h(x) = \cos(1-x^2)$ **30**. $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ **32**. $F(x) = \sin(\cos(\sin x))$

33 – **34**. Xác định các điểm gián đoạn của các hàm số sau và vẽ đồ thị.

33. $y = \dfrac{1}{1+\sin x}$ **34**. $y = \tan\sqrt{x}$

35 – **38**. Dùng sự liên tục để tính các giới hạn sau.

35. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$ **36**. $\lim\limits_{x\to\pi} \sin(x+\sin x)$

37. $\lim\limits_{x\to\pi/4} x\cos^2 x$ **38**. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+1)^{-3}$

39 – **40**. Chứng minh rằng f liên tục trên $(-\infty,\infty)$.

39.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

40.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{nếu } x \geq \pi/4. \end{cases}$$

41 – **43**. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số f. Tại những điểm này, xác định điểm nào liên tục bên phải, bên trái hoặc không liên tục cả hai bên. Vẽ đồ thị hàm số.

41.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 2-x & \text{nếu } 0 < x \leq 2 \\ (2-x)^2 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

42.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x \leq 1 \\ 1/x & \text{nếu } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{nếu } x \geq 3. \end{cases}$$

43.

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{nếu } x < 0 \\ 2x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

44. Trọng lực ảnh hưởng bởi trái đất trên một đơn vị khối lượng tại khoảng cách r đến tâm trái đất được cho bởi

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{nếu } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{nếu } r \leq R \end{cases}$$

với M là khối lượng trái đất, R là bán kính trái đất và G là hằng số trọng lực. Hỏi hàm số F có liên tục hay không?

45. Tìm giá trị của c sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{nếu } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

46. Tìm giá trị của a, b sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{nếu } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{nếu } x \geq 3. \end{cases}$$

47. Hàm số f nào sau đây là hàm số có gián đoạn khử được tại a? Nếu hàm số f có gián đoạn khử được, hãy tìm hàm số g liên tục tại a và $g = f$ nếu $x \neq a$.

(a)

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \qquad a = 1.$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \qquad a = 2.$$

(c)

$$f(x) = [\sin], \qquad a = \pi.$$

48. Giả sử rằng hàm số f liên tục trên $[0, 1]$ ngoại trừ tại 0.25 và $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Cho $N = 2$. Vẽ hai đồ thị có thể có của f, một chỉ ra rằng f không thoả kết luận của định lý giá trị trung gian và một chỉ ra rằng f thoả mãn kết luận của định lý giá trị trung gian (mặc dù nó không thoả mãn giả thiết).

49. Nếu $f(x) = x^2 + 10 \sin x$, chứng minh rằng tồn tại số c sao cho $f(c) = 1000$.

50. Giả sử f liên tục trên $[1, 5]$ và phương trình $f(x) = 6$ chỉ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$. Nếu $f(2) = 8$, giải thích vì sao $f(3) > 6$.

51 – 54. Sử dụng định lý giá trị trung gian để chỉ ra rằng sự tồn tại một nghiệm của phương trình sau trên một khoảng cho trước.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$ **52**. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $\cos x = x, \quad (0, 1)$ **54**. $\sin x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55 – 56.
(a) Chứng minh phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực.
(b) Sử dụng máy tính để tìm khoảng có độ dài 0.01 chứa nghiệm.

55. $\cos x = x^2$ **56**. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

57 – 58.
(a) Chứng minh phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực.

(b) Sử dụng máy tính để tìm nghiệm chính xác đến ba chữ số thập phân.

57. $x^5 - x^2 - 4 = 0$ **58**. $\sqrt{x-5} = \dfrac{1}{x+3}$

59. Chứng minh rằng f liên tục tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

60. Để chứng minh hàm sin liên tục, ta cần chỉ ra rằng $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ cho mỗi số thực a. Dùng bài tập 59 và biểu thức 6 để chứng minh hàm sin liên tục.

61. Chứng minh hàm cos là hàm số liên tục.
62. Chứng minh định lý 4.
63. Tìm x mà f liên tục tại x:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

64. Tìm x mà g liên tục tại x:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ x & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

65. Có tồn tại số thực nào lớn hơn lập phương của nó một đơn vị?
66. Nếu a và b là các số thực dương, chứng minh phương trình

$$\frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = 0$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.
67. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.
68.
(a) Chứng minh rằng hàm giá trị tuyệt đối $F(x) = |x|$ thì liên tục khắp nơi.
(b) Chứng minh rằng nếu f liên tục trên một khoảng thì $|f|$ cũng liên tục trên khoảng đó.
(c) Điều ngược lại của (b) có đúng không? Nếu có thì chứng minh, nếu không đúng hãy tìm phản ví dụ.
69. Một người ra khỏi nhà lúc 7 giờ sáng và đi lên núi bằng con đường thường ngày và người đó đến nơi lúc 7 giờ chiều. Sáng hôm sau người đó bắt đầu đi từ núi lúc 7 giờ sáng về nhà bằng con đường cũ và tới nhà lúc 7 giờ tối. Dùng định lý giá trị trung gian để chứng minh rằng tồn tại một nơi mà người đó đi qua cùng thời điểm của cả hai ngày.

ÔN TẬP

Ôn tập lại các khái niệm

1.
(a) Hàm số là gì? Thế nào là miền xác định và miền giá trị của hàm số?
(b) Đồ thị của hàm số là gì?
(c) Như thế nào để nhận biết một đường cong là đồ thị của một hàm số?
2. Thảo luận bốn cách mô tả một hàm số. Minh hoạ bằng ví dụ.
3.
(a) Hàm chẵn là gì? Như thế nào để nhận biết một hàm chẵn bằng đồ thị của nó? Cho ba ví dụ của hàm chẵn.
(b) Hàm lẻ là gì? Như thế nào để nhận biết một hàm lẻ bằng đồ thị của nó? Cho ba ví dụ của hàm lẻ.
4. Hàm tăng là gì?
5. Mô hình toán học là gì?
6. Cho ví dụ mỗi loại hàm số sau:
(a) Hàm tuyến tính.
(b) Hàm luỹ thừa.
(c) Hàm mũ.
(d) Hàm bậc hai.
(e) Hàm đa thức bậc 5.
(f) Hàm phân thức.
7. Vẽ bằng tay trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị các hàm số sau:
(a) $f(x) = x$.
(b) $g(x) = x^2$.
(c) $h(x) = x^3$.
(d) $j(x) = x^4$.
8. Vẽ bằng tay đồ thị các hàm số sau:
(a) $y = \sin x$.
(b) $y = \tan x$.
(c) $y = 2^x$.
(d) $y = 1/x$.
(e) $y = |x|$.
(f) $y = \sqrt{x}$.
9. Giả sử rằng f có miền xác định A và g có miền xác định B.
(a) Miền xác định của $f + g$ là gì?
(b) Miền xác định của fg là gì?
(c) Miền xác định của f/g là gì?
10. Hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa như thế nào? Miền xác định của nó là gì?
11. Giả sử đồ thị hàm số f được cho. Viết phương trình cho mỗi đồ thị thu được từ đồ thị của f như sau:
(a) Di chuyển lên trên 2 đơn vị.
(b) Di chuyển xuống dưới 2 đơn vị.
(c) Di chuyển qua phải 2 đơn vị.

(d) Di chuyển qua trái 2 đơn vị.
(e) Đối xứng qua trục x.
(f) Đối xứng qua trục y.
(g) Giãn ra theo chiều dọc bởi hệ số nhân 2.
(h) Co lại theo chiều dọc bởi hệ số nhân 2.
(i) Giãn ra theo chiều ngang bởi hệ số nhân 2.
(j) Co lại theo chiều ngang bởi hệ số nhân 2.
12. Giải thích ý nghĩa của mỗi biểu thức sau và minh hoạ bằng hình vẽ.
(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.
(d) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
(e) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
13. Mô tả vài cách mà giới hạn không tồn tại. Minh hoạ bằng hình vẽ.
14. Nêu ý nghĩa của việc nói đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$. Vẽ một vài đường cong để minh hoạ các trường hợp có thể xảy ra.
15. Phát biểu các quy tắc giới hạn :
(a) Quy tắc cộng.
(b) Quy tắc trừ.
(c) Quy tắc nhân với hằng số.
(d) Quy tắc nhân.
(e) Quy tắc chia.
(f) Quy tắc luỹ thừa.
(g) Quy tắc lấy căn.
16. Phát biểu định lý kẹp?
17.
(a) Hàm số f liên tục tại a có nghĩa là gì?
(b) Hàm số f liên tục trên $(-\infty, \infty)$ có nghĩa là gì? Ta có thể nói gì về đồ thị của hàm số như thế.
18. Phát biểu định lý giá trị trung gian.

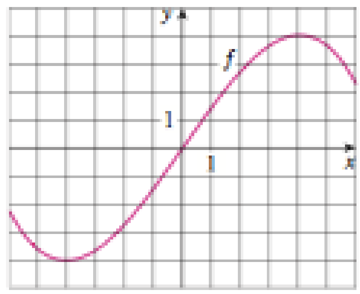
Bài tập trắc nghiệm
Xác định khẳng định đúng hay sai. Nếu đúng thì giải thích, nếu sai thì giải thích hay cho ví dụ.
1. Nếu f là một hàm số thì $f(t+s) = f(t) + f(s)$.
2. Nếu $f(t) = f(s)$ thì $t = s$.
3. Nếu f là hàm số thì $f(3x) = 3f(x)$.
4. Nếu $x_1 < x_2$ và f là một hàm giảm thì $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Một đường thẳng nằm theo chiều dọc thì cắt đồ thị hàm số tại nhiều nhất một điểm.
6. Nếu x là một số thực thì $\sqrt{x^2} = x$.
7.
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}.$$

8.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}.$$
9.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4}=\frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}.$$
10. Nếu $\lim_{x\to 5} f(x)=2$ và $\lim_{x\to 5} g(x)=0$ thì $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ không tồn tại.
11. Nếu $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ và $\lim_{x\to 5} g(x)=0$ thì $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ không tồn tại.
12. Nếu $\lim_{x\to a} f(x)$ và $\lim_{x\to a} g(x)$ không tồn tại thì $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ cũng không tồn tại.
13. Nếu $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x\to a} g(x)$ không tồn tại thì $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ cũng không tồn tại.
14. Nếu $\lim_{x\to 6}[f(x)g(x)]$ tồn tại thì nó phải là $f(6)g(6)$.
15. Nếu p là một đa thức thì $\lim_{x\to b} p(x)=p(b)$.
16. Nếu $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$ và $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$ thì $\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=0$.
17. Nếu đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của $y=f(x)$ thì f không xác định tại 1.
18. Nếu $f(1)>0$ và $f(3)<0$ thì tồn tại một số c nằm giữa 1 và 3 sao cho $f(c)=0$.
19. Nếu f liên tục tại 5 và $f(5)=2$, $f(4)=3$ thì $\lim_{x\to 2}$ thì $\lim_{x\to 2} f(4x^2-11)=2$.
20. Nếu f liên tục trên đoạn $[-1,1]$ và $f(-1)=4$, $f(1)=3$ khi đó tồn tại một số thức r sao cho $|r|<1$ và $f(r)=\pi$.
21. Cho hàm số là hàm số thoả mãn $\lim_{x\to 0} f(x)=6$. Khi đó tồn tại một số θ sao cho nếu $0<|x|<\theta$ thì $|f(x)-6|<1$.
22. Nếu $f(x)>1$ với mọi x và $\lim_{x\to 0} f(x)$ tồn tại thì $\lim_{x\to 0} f(x)>1$.
23. Nếu f liên tục tại a thì $|f|$ cũng vậy.
24. Nếu $|f|$ liên tục tại a thì f cũng vậy.

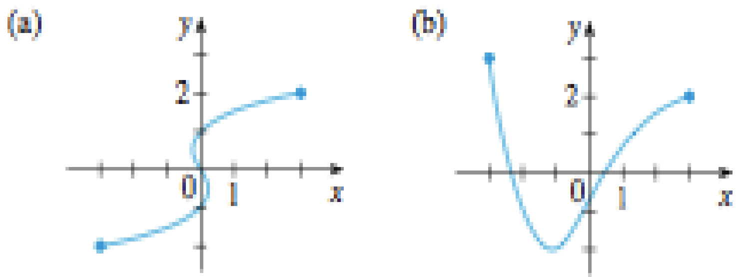
Bài tập.
1. Cho hàm số f có đồ thị cho trước như trong hình dưới.
(a) Ước lượng giá trị $f(2)$.
(b) Ước lượng giá trị x sao cho $f(x)=3$.
(c) Phát biểu miền xác định của f.
(d) Phát biểu miền giá trị của f.
(e) Trên khoảng nào, hàm số tăng.
(f) Hàm số f có là hàm chẵn, lẻ hay không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ. Giải thích.

2. Xác định đường cong sau có là đồ thị của một hàm số. Xác định miền giá trị và miền xác định.

3. Nếu $f(x)=x^2-2x+3$, tình
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



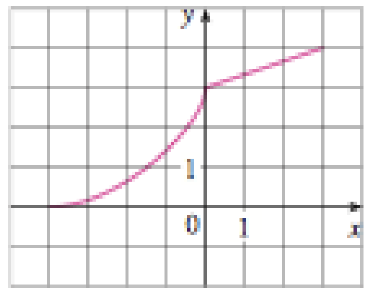
Hình 1.8.11: Bài tập 1.



Hình 1.8.12: Bài tập 2.

4. Vẽ sơ lược đồ thị của sản lượng một mùa vụ như là một hàm số theo lượng phân bón đã sử dụng.
5 – 8. Xác định miền xác định và miền giá trị của hàm số.
5. $f(x) = 2/(3x-1)$.
6. $g(x) = \sqrt{16-x^4}$.
7. $y = 1 + \sin x$.
8. $F(t) = 3 + \cos 2t$.
9. Giả sử đồ thị hàm số f được cho. Mô tả đồ thị các hàm số sau theo đồ thị hàm số f.
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x+8)$
(c) $y = 2f(x) + 1$ (d) $y = f(x-2) - 2$
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = 3 - f(x)$
10. Cho trước đồ thị của hàm số f, vẽ đồ thị của các hàm số sau:
(a) $y = f(x-8)$ (b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = 1/2f(x) - 1$

11 – 16. Sử dụng các phép biến đổi để vẽ đồ thị các hàm số sau:
11. $y = -\sin 2x$
12. $y = (x-2)^2$
13. $y = 1/2x^3 + 1$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$



Hình 1.8.13: Bài tập 10.

15.

$$y = \frac{1}{x+2}$$

16.

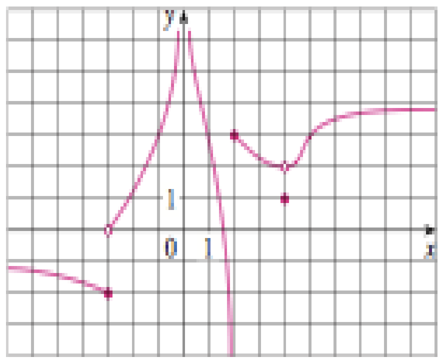
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x < 0 \\ x^2+1 & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

17. Xác định tính chất hàm chẵn hàm lẻ của các hàm số sau:
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = \cos(x^2)$
(d) $f(x) = 1 + \sin x$.
18. Tìm biểu thức cho một hàm số mà đồ thị của nó chứa một phần đường thẳng từ $(-2, 2)$ đến $(-1, 0)$ và chứa nửa trên của đường tròn tâm O bán kính 1.
19. Nếu $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = \sin x$, tìm hàm số $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ và miền xác định của chúng.
20. Viết hàm số $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ dưới dạng hợp của ba hàm số.
21. Tuổi thọ trung bình được cải thiện đáng kể trong thế kỷ 20. Bảng sau cho ta tuổi thọ trung bình theo năm sinh của nam giới Mỹ. Sử dụng đồ thị rời rạc để chọn một mô hình phù hợp. Sử dụng mô hình của bạn để dự đoán tuổi thọ trung bình cho nam giới Mỹ sinh trong năm 2010.

Năm sinh	Tuổi thọ trung bình	Năm sinh	Tuổi thọ trung bình
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

22. Một nhà máy sản xuất thiết bị nhận thấy rằng nhà máy tốn 9000 đô la để sản xuất 1000 lò nướng bánh trong một tuần và 12000 đô la để sản xuất 1500 lò nướng

bánh trong một tuần.
(a) Biểu diễn giá tiền như là một hàm số theo số lượng lò nướng bánh với giả sử rằng mô hình tuyến tính là phù hợp. Vẽ đồ thị hàm số này.
(b) Hệ số góc của đồ thị là gì và ý nghĩa của nó?
(c) Đồ thị giao với trục toạ độ y tại đâu và có ý nghĩa gì?



Hình 1.8.14: Bài tập 23.

23. Cho trước đồ thị hàm số f như trong hình vẽ.
(a) Tìm giới hạn hoặc giải thích vì sao giới hạn không tồn tại :

$$(i)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) \qquad (ii)\ \lim_{x\to -3^+} f(x)$$

$$(iii)\ \lim_{x\to -3} f(x) \qquad (iv)\ \lim_{x\to 4} f(x)$$

$$(v)\ \lim_{x\to 0} f(x) \qquad (ii)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

(b) Tìm tiệm cận đứng của hàm số f.
(c) Tìm điểm gián đoạn của f, giải thích.
24. Vẽ đồ thị của một hàm số thoả mãn các điều kiện sau:
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $f(0) = -1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$.
25 $-$ **38**. Tìm các giới hạn.
25.

$$\lim_{x\to 0} \cos(x + \sin x).$$

26.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}.$$

27.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}.$$

28.
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}.$$
29.
$$\lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^3+1}{h}.$$
30.
$$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t^3-8}.$$
31.
$$\lim_{r\to 9} \frac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}.$$
32.
$$\lim_{v\to 4^+} \frac{4-v}{|4-v|}.$$
33.
$$\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}.$$
34.
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}.$$
35.
$$\lim_{s\to 16} \frac{4-\sqrt{s}}{s-16}.$$
36.
$$\lim_{v\to 2} \frac{v^2+2v-8}{v^4-16}.$$
37.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$
38.
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right).$$
39. Nếu $2x-1 \leq f(x) \leq x^2$ với $0 < x < 3$, tìm giới hạn $\lim_{x\to 1} f(x)$.
40. Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0.$$

41 – 44. Chứng minh các phát biểu sau bằng định nghĩa của giới hạn.

41. $\lim\limits_{x\to 2}(14-5x) = 4$ **42**. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

43. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x) = -2$ **44**. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

45. Cho

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{nếu } x < 0 \\ 3 - x & \text{nếu } 0 \le x < 3 \\ (3-x)^2 & \text{nếu } x \ge 3. \end{cases}$$

(a) Tìm giới hạn nếu tồn tại

$(i)\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad(ii)\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad(iii)\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$(iv)\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ $\quad(v)\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $\quad(vi)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

(b) Tìm điểm gián đoạn của f.
(c) Vẽ đồ thị hàm số f.
46. Cho

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{nếu } 0 \le x \le 2 \\ 2 - x & \text{nếu } 2 < x \le 3 \\ x - 4 & \text{nếu } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{nếu } x \ge 4. \end{cases}$$

(a) Tại các điểm 2, 3, 4 xác định tính liên tục trái, liên tục phải hay liên tục của hàm số g.
(b) Vẽ đồ thị hàm số g.
47 – 48. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau liên tục trên miền xác định, tìm miền xác định đó.

47. $h(x) = \sqrt[4]{x} + x^3 \cos x$ **48**. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

49 – 50. Sử dụng định lý giá trị trung gian để chứng minh rằng phương trình sau có một nghiệm nằm trong khoảng cho trước.
49. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0, \quad (1, 2)$.
50. $2\sin x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$.

Các quy tắc trong giải toán

Có những phương pháp rất gọn và giúp chúng ta dễ dàng thành công trong việc giải một bài toán. Tuy nhiên, chúng ta có thể đưa ra vài bước tổng quát cho một qui trình giải toán và một số nguyên tắc có ích cho việc tìm lời giải của một số bài toán. Các bước và các nguyên tắc này đều đơn giản và cụ thể. Chúng được điều chỉnh từ cuốn sách của George Polya "How to solve it".
1. **Hiểu bài toán**
Bước đầu tiên là đọc bài toán và chắc chắn rằng bạn hiểu được bài toán đó một cách rõ ràng. Hỏi chính bạn các câu hỏi sau :
Cái gì chưa biết?
Cái gì là đại lượng đã biết?

Cái gì là điều kiện được cho?
Đối với một số bài toán thì rất hữu ích nếu ta
vẽ một sơ đồ
và xác định đại lượng đã cho và cần tìm trên sơ đồ.
Thông thường chúng ta cần thiết phải
giới thiệu ký hiệu thích hợp.

Chúng ta thường chọn các chữ như a, b, c, m, n, x, y cho các thông tin và đại lượng chưa biết, nhưng trong vài trường hợp ta dùng một số ký hiệu được đề nghị và thông dụng, chẳng hạn, V cho thể tích, t cho thời gian.

2. **Nghĩ ra một kế hoạch**

Tìm mối liên hệ giữa đại lượng đã biết và chưa biết có thể sẽ giúp bạn tìm được đại lượng chưa biết. Nó rất giúp ích nếu bạn tự hỏi: "Làm như thế nào để viết mối liên hệ giữa thông tin đã biết và chưa biết ?" Nếu bạn không thấy mối liên hệ ngay lập tức, những ý tưởng sau có lẽ sẽ giúp ích cho bạn trong việc tạo ra một kế hoạch giải toán.

Cố gắng nhận biết những thứ quen thuộc : Liên hệ trường hợp đã cho với kiến thức biết trước. Nhìn đại lượng chưa biết và cố gắng nhớ lại những bài toán quen thuộc hơn mà chúng có đại lượng chưa biết tương tự.

Cố gắng nhận biết các mẫu : Một số bài toán được giải bằng cách nhận dạng sự xuất hiện của một loại toán trong các mẫu. Có các dạng mẫu như hình học, tính toán, đại số ... Nếu bạn thấy tính đều đặn hay lặp lại trong một bài toán, bạn có lẽ đoán được tính liên tục của mẫu của bài toán là gì và chứng minh nó.

Sử dụng tính tương tự : Cố gắng nghĩ về một bài toán tương tự, bài toán liên quan, nhưng dễ hơn bài toán gốc. Nếu bạn có thể giải bài toán tương tự đơn gản hơn thì nó có thể cho bạn một vài ý tưởng để giải bài toán gốc khó hơn. Chẳng hạn, nếu một bài toán liên quan đến số rất lớn, bạn có thể nghĩ về vệc giải bài toán với số nhỏ hơn. Hay nếu bài toán liên quan đến hình học ba chiều, bạn có thể nghĩ về bài toán tương tự trong hai chiều. Hay nếu bài toán khá tổng quát thì ta bắt đầu với một trường hợp đặc biệt.

Giới thiệu thêm các đại lượng mới : Thỉnh thoảng nó cần thiết để giới thiệu thêm một số đại lượng mới để liên kết đại lượng đã biết và đại lượng cần tìm. Chẳng hạn, trong một bài toán mà một sơ đồ thì có ích, vẽ thêm một đường thẳng trên sơ đồ là một đại lượng thêm. Trong một bài toán đại số ta có thể giới thiệu một đại lượng mới chưa biết nhưng nó liên quan đến đại lượng cần tìm.

Chia trường hợp : Chúng ta thỉnh thoảng chia nhỏ bài toán ra nhiều trường hợp và cho mỗi trường hợp một lý luận khác nhau. Chẳng hạn, chúng ta thường phải sử dụng cách này trong giải bài toán giá trị tuyệt đối.

Phương pháp lần ngược : Giả sử bài toán được giải và sau đó chúng ta lần ngược bài toán, từng bước từng bước một cho đến khi bạn gặp dữ liệu đã cho của bài toán. Cuối cùng bạn có thể đi ngược lại các bước và xây dựng lời giải cho bài toán gốc. Quy trình này được sử dụng phổ biến trong giải phương trình. Chẳng hạn, giải phương trình $3x - 5 = 7$, chúng ta giả sử x là số thoả mãn $3x - 5 = 7$ và lần ngược bài toán. Chúng ta cộng 5 hai vế phương trình, sau đó chia hai vế cho 3 để được $x = 4$. Bởi vì mỗi bước có thể đi ngược lại nên bài toán được giải xong.

Đưa ra bài toán con : Trong một bài toán phức tạp, nó có ích nếu ta giải các bài toán con của bài toán gốc. Nếu chúng ta có thể giải được các bài toán con, sau đó chúng ta có thể thu gom chúng để có kết quả cuối cùng.

Lý luận gián tiếp : Thỉnh thoảng ta tấn công bài toán một cách gián tiếp. Trong chứng minh phản chứng "P suy ra Q", chúng ta giả sử rằng P đúng và Q sai và cố gắng chứng minh điều này không xảy ra. Một cách nào đó chúng ta phải sử dụng thông tin này và đi đến một mâu thuẫn với một cái mà ta biết nó đúng.

Quy nạp toán học : Trong việc chứng minh các phát biểu liên quan đến số nguyên dương n, nó có ích khi sử dụng phương pháp sau.

Phương pháp quy nạp toán học :
Cho S_n là phát biểu về số nguyên dương n. Giả sử rằng
1. S_1 đúng.
2. S_{k+1} đúng bất cứ khi S_k đúng.
Khi đó S_n đúng với mọi số nguyên dương n.

Điều này thì hợp lý bởi vì khi S_1 đúng, thì S_2 cũng đúng theo điều kiện 2 với $k = 1$. Sau đó sử dụng điều kiện 2 với $k = 2$ ta có S_3 đúng, tương tự S_4 đúng, S_5 đúng... Quy trình này kéo ra vô hạn lần.

3. **Hoàn thành kế hoạch :** Trong bước hai, ta đưa ra các ý tưởng cho kế hoạch giải toán. Trong bước này ta kiểm tra từng mục trong kế hoạch và viết chi tiết, chứng minh các bước ấy là đúng.

4. **Xem lại :** Sau khi giải xong bài toán, hãy xem lại nó một cách cẩn thận xem ta có sai sót ở một phần nào hay không. Một nguyên nhân khác khi xem lại lời giải là giúp ta ghi nhớ cách làm cho các bài toán tương tự trong tương lai. Descartes đã nói rằng: "Mỗi bài toán tôi giải đã trở thành một quy tắc mà nó phục vụ cho việc giải các bài toán sau".

Những quy tắc này được minh hoạ trong các ví dụ sau. Trước khi bạn xem lời giải của bài toán, cố gắng tự mình giải chúng, tham khảo các quy tắc giải toán trên nếu bạn gặp khó khăn. Bạn có lẽ tìm được điều có ích trong phần này theo thời

gian khi bạn giải bài tập trong các sách toán.
Một ví dụ đầu tiên dùng nguyên tắc "chia trường hợp" khi xử lý bài toán có giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 64. Giải bất phương trình

$$|x-3|+|x+2|<11.$$

Lời giải. Nhớ lại định nghĩa của giá trị tuyệt đối

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Vì vậy ta có

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{nếu } x \geq 3 \\ 3-x & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{nếu } x < -2. \end{cases}$$

Ta giải bài toán bất phương trình ban đầu bằng cách chia 3 trường hợp

$$x<-2, \qquad -2 \leq x < 3, \qquad x \geq 3.$$

Trường hợp 1 **:** Nếu $x<-2$ thì

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+2| &< 11 \\ -x+3-x-2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5. \end{aligned}$$

Trường hợp 2 **:** Nếu $-2 \leq x < 3$ thì

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+2| &< 11 \\ -x+3+x+2 &< 11 \\ 5 &< 11. \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Trường hợp 3 **:** Nếu $x \geq 3$ thì

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+2| &< 11 \\ x-3+x+2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6. \end{aligned}$$

Kết hợp ba trường hợp ta được tập nghiệm của bất phương trình là $(-5,6)$. □

Trong ví dụ tiếp theo, chúng ta trước hết dự đoán kết quả bằng cách xem xét một vài trường hợp đặc biệt và nhận biết dạng mẫu của bài toán. Sau đó chúng ta chứng minh kết luận giả định bằng quy nạp toán học. Sử dụng quy nạp toán học, ta theo các bước sau:
Bước 1: Chứng minh rằng S_n đúng với $n = 1$.
Bước 2: giả sử S_n đúng với $n = k$ và chứng minh S_n cũng đúng với $n = k + 1$.
Bước 3: Kết luận S_n đúng với mọi n theo nguyên lý quy nạp toán học.

Ví dụ 65. Nếu $f_0(x) = x/(x + 1)$ và $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ với n là số tự nhiên. Tìm công thức cho f_n.
Lời giải.
Tính tương tự: Cố gắng với bài toán tương tự, đơn giản hơn
Ta bắt đầu tìm công thức cho f_n với $n = 1, 2, 3$ để dự đoán dạng mẫu cho công thức f_n.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1} = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}. \end{aligned}$$

Dự đoán dạng chung cho f_n: hệ số của x trong mẫu số của f_n là $(n + 1)$, nghĩa là

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

Ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp toán học. Với $n = 1$, ta đã tính ở trên. Giả sử công thức trên đúng với $n = k$, nghĩa là

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}.$$

Ta có

$$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$
$$= \frac{\frac{x}{(k+1)x+1}}{\frac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\frac{x}{(k+1)x+1}}{\frac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}.$$

Nghĩa là công thức f_n đúng với $n = k+1$. Do vậy bởi nguyên lý quy nạp, công thức đúng với mọi số nguyên dương n. □

Trong ví dụ kế tiếp, ta sẽ thấy cách giải một bài toán bằng cách "*giới thiệu thêm đại lượng mới*" khi tính giới hạn. Ý tưởng chính là đổi biến - giới thiệu một biến mới liên quan đến biến ban đầu - để làm bài toán đơn giản hơn. Sau này trong phần 4.5, ta sẽ mở rộng ý tưởng này.

Ví dụ 66. Tính giới hạn
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$$
với c là hằng số.

Lời giải. : Đây là dạng giới hạn mà cả tử và mẫu số đều tiến về 0. Trong các ví dụ trước, ta thường dùng các phép biến đổi đại số để triệt tiêu các thừa số tiến về 0. Trong ví dụ này, ta chưa hình dung rõ ràng lắm về phép biến đổi đại số cho tử và mẫu số. Vì vậy ta đổi biến bằng cách đặt

$$t = \sqrt[3]{cx+1}.$$

Khi đó ta có
$$x = \frac{t^3-1}{c} \text{ nếu } c \neq 0.$$

Chú ý rằng $x \to 0$ tương đương với $t \to 1$. Điều này cho ta chuyển giới hạn đã cho thành giới hạn theo t

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{c(t-1)}{t^3-1}.$$

Phép đổi biến giúp ta chuyển bài toán thành dạng có phép biến đổi đại số quen thuộc :
$$\lim_{t\to 1} \frac{c(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{c}{t^2+t+1} = \frac{c}{3}.$$

Với trường hợp $c = 0$ thì tử số luôn là 0 và vì vậy giới hạn cần tìm cũng là 0. Vậy ta kết luận
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x} = \frac{c}{3}.$$

□

Các bài toán sau được cho để kiểm tra và thử thách kỹ năng giải toán của bạn. Một số bài toán cần nhiều thời gian để suy ngẫm và vì vậy bạn đừng nản nếu bạn không thể giải được chúng. Nếu bạn thấy khó khăn, hãy nhớ lại các nguyên tắc trong giải toán.

CÁC BÀI TOÁN

1. Vẽ đồ thị của hàm số $x + |x| = y + |y|$.

2. Vẽ trong mặt phẳng tất cả các điểm (x, y) thoả mãn $|x - y| + |x| - |y| \leq 2$.

3. Cho $f_0(x) = x^2$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \cdots$ Tìm công thức cho $f_n(x)$.

4.

(a) Cho $f_n(x) = 1/(2 - x)$ và $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ với $n = 0, 1, 2, \cdots$ Tìm công thức cho f_n.

(b) Vẽ đồ thị f_0, f_1, f_2, f_3 trên cùng một mặt phẳng và mô tả tác dụng của hàm hợp nhiều lần.

5. Tính

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

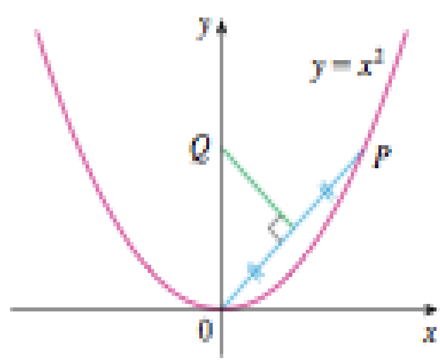
6. Tìm a và b sao cho

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1.$$

7. Tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}.$$

8. Hình dưới cho ta điểm P nằm trên parabol $y = x^2$, Q là giao điểm của trục Oy và đường trung trực của OP. Khi P tiến về điểm O thì Q tiến về đâu? Ví trí giới hạn đó nằm ở đâu?



Hình 1.8.15: Hình cho bài tập 8.

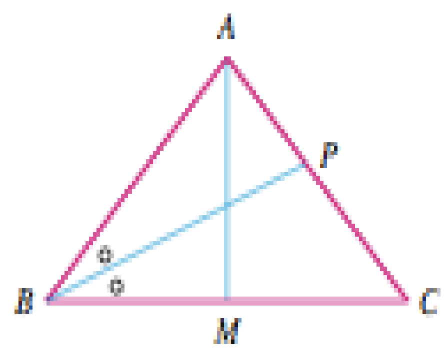
9. Tính các giới hạn sau nếu tồn tại, ở đây $[x]$ là hàm phần nguyên lớn nhất.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$. (b) $\lim_{x\to 0} x[1/x]$.

10. Vẽ miền chứa các điểm thoả mãn phương trình sau.
(a) $[x]^2 + [y]^2 = 1$ (b) $[x]^2 - [y]^2 = 1$ (c) $[x + y]^2 = 1$ (d) $[x] + [y] = 1$
11. Tìm tất cả các giá trị a sao cho f liên tục trên $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a. \end{cases}$$

12. Một điểm **bất động** của hàm số f là một số c sao cho $f(c) = c$.
(a) Vẽ một hàm số liên tục với miền xác định $[0, 1]$ và miền giá trị cũng là $[0, 1]$. Xác định điểm bất động của hàm số này.
(b) Cố gắng vẽ một đồ thị của hàm số liên tục có miền xác định và miền giá trị là $[0, 1]$ sao cho hàm số không có điểm bất động? Trở ngại là gì?
(c) Dùng định lý giá trị trung gian để chứng minh rằng mọi hàm số liên tục từ $[0, 1]$ $\to [0, 1]$ đều có điểm bất động.
13. Nếu $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$ và $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1$, tìm $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$.
14.
(a) Cho tam giác ABC cân tại A. Đường phân giác góc B cắt AC tại điểm P. Hạ chiều cao AM. Giả sử cố định BC và di chuyển điểm M sao cho $|AM|$ tiến về 0. Điểm P sẽ tiến về đâu? Tìm điểm giới hạn đó?



Hình 1.8.16: Hình cho bài tập 14.

(b) Cố gắng vẽ lại tất cả các điểm P khi M di chuyển. Tìm phương trình cho quỹ đạo của P và vẽ nó trên đồ thị.
15.
(a) Nếu chúng ta bắt đầu tại vĩ độ 0 và di chuyển theo hướng tây, chúng ta có thể đặt $T(x)$ là nhiệt độ tại điểm x tại một thời điểm bất kỳ. Giả sử rằng T liên tục theo x, chứng minh rằng tại một thời điểm cố định tồn tại ít nhất hai điểm đối xứng trên xích đạo có cùng nhiệt độ.
(b) Kết quả trên còn đúng cho những điểm trên hình tròn bất kỳ trên bề mặt trái đất?
(c) Kết quả trên có đúng cho áp suất khí quyển và cho độ cao của mực nước biển?