Table of contents

Định nghĩa giả thuyết thống kê

Định nghĩa 1

Giả thuyết thống kê là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay chấp nhận một giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Định nghĩa giả thuyết không và đối thuyết

Định nghĩa 2

Trong bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết cần được kiểm định gọi là Giả thuyết không(Null hypothesis), ký hiệu H_0. Mệnh đề đối lập với H_0 gọi là đối thuyết(alternative hypothesis), ký hiệu là H_1.

Xét bài toán kiểm định tham số: giả sử ta quan sát mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ từ biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất $f(x, \theta)$ phụ thuộc vào tham số θ. Gọi Θ là không gian tham số và Θ_0, Θ_0^c là hai tập con rời nhau của Θ sao cho $\Theta_0 \cup \Theta_0^c = \Theta$. Giả thuyết (giả thuyết không) và đối thuyết của bài toán như sau

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in {\Theta_0}^c \end{cases}$$

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫ
Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê

Định nghĩa giả thuyết không và đối thuyết

Ví dụ 1

1. *Gọi μ là độ thay đổi trung bình trong huyết áp của một bệnh nhận sau khi dùng thuốc, bác sĩ điều trị cần quan tâm đến giả thuyết sau:*
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 & \textit{Không có ảnh hưởng của thuốc lên huyết áp bệnh} \\ H_1 : \mu \neq 0 & \textit{Có ảnh hưởng của thuốc lên huyết áp của bệnh nh} \end{cases}$$
2. *Một khách hàng quan tâm đến tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng mua của nhà cung cấp. Giả sử tỷ lệ sản phẩm kém tối đa được phép là 5%. Khách hàng cần quan tâm đến giả thuyết sau:*
$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.05 & \textit{Tỷ lệ sản phẩm kém cao hơn mức cho phép} \\ H_1 : p < 0.05 & \textit{Tỷ lệ sản phẩm kém ở mức chấp nhận được} \end{cases}$$

Cách đặt giả thuyết

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết được đặt ra ngược với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.
3. Giả thuyết được đặt ra sao cho nếu nó đúng thì ta sẽ xác định được quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên được chọn làm tiêu chuẩn kiểm định.
4. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. Cái chưa biết là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. "Cái đã biết" là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.
5. Giả thuyết đặt ra thường mang ý nghĩa "không khác nhau" hoặc "khác nhau không có ý nghĩa" hoặc " bằng

Cách đặt giả thuyết

Tổng quát, một bài toán kiểm định giả thuyết cho tham số θ sẽ có một trong 3 dạng dưới đây (θ_0 là giá trị kiểm định đã biết). Kiểm định hai phía

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Kiểm định một phía bên trái

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Kiểm định một phía bên phải

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Miền bác bỏ- Tiêu chuẩn kiểm định

Định nghĩa 3

Xét bài toán kiểm định giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Giả sử rằng H_0 đúng, từ mẫu ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ chọn hàm $Z = h(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ sao cho với số $\alpha > 0$ bé tùy ý ta có thể tìm được tập hợp W_α thỏa điều kiện

$$\mathbb{P}(Z \in W_\alpha) = \alpha.$$

Tập hợp W_α gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 và phần bù W_α^c gọi là miền chấp nhận giả thuyết H_0. Đại lượng ngẫu nhiên $Z = h(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ gọi là tiêu chuẩn kiểm định giả thuyết H_0. Giá trị α là mức ý nghĩa của bài toán kiểm định.

Miền bác bỏ- Tiêu chuẩn kiểm định

Thực nghiệm quan trắc dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ ta thu được mẫu thực nghiệm $(x_1, \ldots, x_n)$. Từ mẫu thực nghiệm này, ta tính được giá trị của Z là $z = h(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)$.

- Nếu $z \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết H_0.
- Nếu $z \in W_\alpha^c$ thì ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Sai lầm loại I và loại II

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

i Sai lầm loại I là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Sai lầm loại I ký hiệu là α, chính là mức ý nghĩa kiểm định

$$\alpha = \mathbb{P}(W_\alpha | H_0).$$

ii Sai lầm loại II là sai lầm mắc phải khi ta chấp nhận H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 sai. Sai lầm loại II ký hiệu là β, chính là mức ý nghiã kiểm định

$$\beta = \mathbb{P}(W_\alpha^c | H_1).$$

Sai lầm loại I và loại II

Ví dụ 2

Khảo sát tốc độ cháy của một loại nhiên liệu rắn dùng để đẩy tên lửa ra khỏi giàn phóng. Giả sử biến ngẫu nhiên $X =$ tốc độ cháy của nhiên liệu (cm/s) có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn $\sigma = 2.5$.

Ta cần kiểm định giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu \neq 50 \end{cases}$$

Giả sử ta bác bỏ H_0 khi $\bar{x} < 48.5$ hoặc $\bar{x} > 51.5$. Các giá trị 48.5 và 51.5 gọi là giá trị tới hạn (Critial value). Giả sử khảo sát mẫu ngẫu nhiên cỡ $n = 10$, ta tìm xác suất sai lầm loại I .

Sai lầm loại I và loại II -Ví dụ (tt)

Tức là,

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}(\bar{X} < 48.5|\mu = 50) + \mathbb{P}(\bar{X} > 51.5|\mu = 50)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-50}{2.5/\sqrt{10}} < \frac{48.5-50}{2.5/\sqrt{10}}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-50}{2.5/\sqrt{10}} > \frac{51.5-50}{2.5/\sqrt{10}}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z < -1.90) + \mathbb{P}(Z > 1.90) = 0.0287 + 0.0287 = 0.0574\end{aligned}$$

Nghĩa là có 5.74% số mẫu ngẫu nhiên khảo sát được sẽ dẫn đến kết luận bác bỏ giả thuyết $H_0 : \mu = 50(cm/s)$ khi tốc độ trung bình thực sự là 50 (cm/s).

Sai lầm loại I và loại II -Ví dụ (tt)

Ta có thể giảm sai lầm α bằng cách mở rộng miền chấp nhận.

Giả sử với cỡ mẫu $n = 10$, miền chấp nhận là $48 < \bar{x} < 52$, khi đó giá trị của α là

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{48-50}{2.5\sqrt{10}}\right) + \mathbb{P}\left(Z > \frac{52-50}{2.5\sqrt{10}}\right)\\ &= 0.0057 + 0.0057 = 0.0114\end{aligned}$$

Sai lầm loại I và loại II

Cách thứ hai để giảm α là tăng cỡ mẫu khảo sát.
Giả sử cỡ mẫu $n = 16$, ta có $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{16}} = 0.625$, với miền bác bỏ là $\bar{x} < 48.5$ hoặc $\bar{x} > 51.5$, ta có

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}(\bar{X} < 48.5|\mu = 50) + \mathbb{P}(\bar{X} > 51.5|\mu = 50)\\ &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{48.5-50}{0.625}\right) + \mathbb{P}\left(Z > \frac{51.5-50}{0.625}\right)\\ &= 0.0082 + 0.0082 = 0.0164.\end{aligned}$$

Xác suất sai lầm loại II , β ,được tính như sau

$$\beta = \mathbb{P}(\text{Không bác bỏ } H_0 \text{ khi } H_0 \text{ sai}).$$

Để tính β ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể cho tham số trong đối thuyết H_1.

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu
Các loại sai lầm thường gặp

Sai lầm loại I và loại II

Giả sử với cỡ mẫu $n = 10$, miền chấp nhận của giả thuyết H_0 là $48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5$ trong khi giá trị thực sự của $\mu = 52$. Sai lầm β cho bởi

$$\begin{aligned}\beta &= \mathbb{P}\left(48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5|\mu = 52\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{48.5-52}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{\bar{X}-52}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{51.5-52}{2.5/\sqrt{10}}|\mu = 52\right)\\ &= \mathbb{P}\left(-4.43 \leq Z \leq -0.63\right) = \mathbb{P}(Z \leq -0.63) - \mathbb{P}(Z \leq -4.43)\\ &= 0.2643 - 0.0000 = 0.2463\end{aligned}$$

Sai lầm loại I và loại II

Giả sử giá trị thực sự $\mu = 50.5$, khi đó

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}\left(48.5 \le \bar{X} \le 51.5 | \mu = 50.5\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{48.5-50.5}{2.5/\sqrt{10}} \le \frac{\bar{X}-50.5}{2.5/\sqrt{10}} \le \frac{51.5-50.5}{2.5/\sqrt{10}} | \mu = 52\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2.53 \le Z \le 1.27\right) \\
&= 0.8980 - 0.0057 = 0.8923
\end{aligned}$$

Sai lầm loại I và loại II

Tương tự, α, tăng cỡ mẫu sẽ làm giảm sai lầm β, với cỡ mẫu $n = 16$ và miền chấp nhận là $48 < \bar{X} < 52$, ta tính được $\beta = 0.229$.

Sai lầm loại I và loại II

Nhận xét 1

1. *Ta có thể giảm kích thước của miền bác bỏ (tương ứng tăng kích thước miền chấp nhận), xác suất sai lầm loại I, α, bằng cách chọn những điểm tới hạn thích hợp.*
2. *Xác suất sai lầm loại I và loại II có liên quan với nhau. Một cỡ mẫu cố định, việc giảm sai lầm loại này sẽ tăng sai lầm loại kia.*
3. *Cố định các điểm tới hạn, tăng cỡ mẫu n sẽ làm giảm xác suất sai lầm loại I, α, và loại II, β.*
4. *Nếu H_0 sai, sai lầm β sẽ tăng khi giá trị thực của tham số tiến gần đến giá trị được phát biểu trong giả thuyết H_0.*

p- giá trị(p-value)

Định nghĩa 4

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định , p-giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Dựa vào đối thuyết H_1, các bước tính p-giá trị như sau:

p- giá trị(p-value)

1 Xác định thống kê kiểm định:TS. Tính giá trị thống kê kiểm định dựa trên mẫu $(x_1, \ldots, x_n)$, giả sử bằng a.

2 p-giá trị cho bởi

$$p = \begin{cases} \mathbb{P}\left(|TS| > |a| | H_0\right), & \text{kiểm định hai phía} \\ \mathbb{P}\left(TS < a | H_0\right), & \text{kiểm định một phía - bên trái} \\ \mathbb{P}\left(TS > a | H_0\right), & \text{kiểm định một phía - bên phải} \end{cases}$$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0 nếu p- giá trị $\leq \alpha$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Trường hợp biết phương sai σ^2

- Các giả định
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Phương sai σ^2 đã biết.
  - Cho trước giá trị μ_0 , cần so sánh kỳ vọng μ và μ_0.
- Bài toán kiểm định có 3 trường hợp

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp biết phương sai σ^2

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

4. Xác định miền bác bỏ W_α:Bảng 1

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu
Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp biết phương sai σ^2

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu \neq \mu_0)$	$W_\alpha = \{z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}\}$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu < \mu_0)$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha}\}$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu > \mu_0)$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\}$

Bảng 1: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng.

5. Kết luận: Bác bỏ H_0 / Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Trường hợp biết phương sai σ^2

- Sử dụng p-giá trị (p-value): tính p-value dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi

$$p - \text{value} \leq \alpha,$$

với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p-value theo các trường hợp xem ở bảng 2.

Giả thuyết	p-value
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu \neq \mu_0)$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu < \mu_0)$	$p = \Phi(z_0)$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu > \mu_0)$	$1 - \Phi(z_0)$

Bảng 2: p-value với đối thuyết tương ứng

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Trường hợp không biết phương sai σ^2, mẫu nhỏ

- Các giả định
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cho trước giá trị μ_0 , cần so sánh kỳ vọng μ và μ_0.
  - Cỡ mẫu nhỏ : $n \leq 30$
- Bài toán kiểm định có 3 trường hợp

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$ với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp không biết phương sai σ^2

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu \neq \mu_0)$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : \lvert t_0 \rvert > t^{n-1}_{1-\alpha/2} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu < \mu_0)$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : t_0 < -t^{n-1}_{1-\alpha} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu > \mu_0)$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : t_0 > t^{n-1}_{1-\alpha} \right\}$

Bảng 3: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ).

5 Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp không biết phương sai σ^2

- Sử dụng p-giá trị (p-value): tính p-value dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi

$$p - \text{value} \leq \alpha,$$

với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p-value theo các trường hợp xem ở bảng 5.

Giả thuyết	p-value
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu \neq \mu_0)$	$p = 2\mathbb{P}\left(T_{n-1} \geq \lvert t_0 \rvert\right)$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu < \mu_0)$	$\mathbb{P}\left(T_{n-1} \leq t_0\right)$
$H_0 : \mu = \mu_0 (H_1 : \mu > \mu_0)$	$\mathbb{P}\left(T_{n-1} \geq t_0\right)$

Bảng 4: p-value với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ).

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp không biết phương sai σ^2, mẫu lớn

- Các giả định
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cho trước giá trị μ_0 , cần so sánh kỳ vọng μ và μ_0.
  - Cỡ mẫu nhỏ : $n > 30$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
Trường hợp không biết phương sai σ^2, mẫu lớn

- Khi cỡ mẫu lớn, biến ngẫu nhiên

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

sẽ hội tụ về phân phối chuẩn hóa $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó miền bác bỏ W_α hoặc p-value sẽ được tính tương tự trường hợp biết phương sai chỉ thay thế

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

bằng Z_0 ở trên.

Ví dụ 3

Trong thập niên 80, trọng lượng trung bình của thanh niên là 48 kg. Nay để xác định lại trọng lượng ấy, người ta chọn ngẫu nhiên 100 thanh niên đo trọng lượng trung bình là 50 kg và phương sai mẫu $s^2 = (10\ kg)^2$*. Thử xem trọng lượng thanh niên hiện nay phải chăng có thay đổi, với mức ý nghĩa là* 1%.

Ví dụ 4

Giám đốc một xí nghiệp cho biết lương trung bình của 1 công nhân xí nghiệp là 380 ngàn đ/tháng. Chọn ngẫu nhiên 36 công nhân thấy lương trung bình là 350 ngàn đ/ tháng, với độ lệch chuẩn $s = 40$*. Lời báo cáo của giám đốc có tin cậy được không, với mức ý nghĩa là* $\alpha = 5\%$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- Bài toán
  Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ phần tử mang đặc tính $\mathcal{A}$ nào đó trong tổng thể là p(p chưa biết). Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ hãy kiểm định

$$(a) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$ với mức ý nghĩa α .

- Giả định: Cỡ mẫu n lớn để phân phối nhị thức xấp xỉ phân phối chuẩn cần có $np_0 \geq 5$ và $n(1 - p_0) \geq 5$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- Quan sát sự xuất hiện của biến cố " phần tử mang đặc tính $\mathcal{A}$" trong n phép thử độc lập. Gọi Y là số lần xuất hiện biến cố trên thì $Y \sim B(n, p)$. Và
$$\hat{p} = \frac{Y}{n}$$
là một ước lượng không chệch cho p.
- Nếu H_0 đúng, thống kê
$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$
có phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$. Chọn Z_0 làm tiêu chuẩn kiểm định.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định
$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$
4. Xác định miền bác bỏ: bảng 5

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : p = p_0 (H_1 : p \neq p_0)$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2} \right\}$
$H_0 : p = p_0 (H_1 : p < p_0)$	$W_\alpha = \{ z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha} \}$
$H_0 : p = p_0 (H_1 : p > p_0)$	$W_\alpha = \{ z_0 : z_0 > z_{1-\alpha} \}$

Bảng 5: Miền bác bỏ cho bài toán kiểm định tỷ lệ

5 Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sử dụng p-value : p-value tính tương tự như bảng 2.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Ví dụ 5

Trong kỳ nghỉ giáng sinh và đầu năm mới. Cục An toàn giao thông đã thống kê rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tai nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia.

Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục ATGT với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Bài giải 1

các bước kiểm định

1 *Phát biểu giả thuyết:* $\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$

2 *Xác định mức ý nghĩa:* $\alpha = 0.05$

3 *Tính giá trị thống kê kiểm định*

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{120}} = 0.045644$$

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28$$

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Bài giải 2 (tt)

4 *Xác định miền bác bỏ: bác bỏ* H_0 *khi* $|z_0| > z_{0.975} = 1.96$
hoặc tính p-value

$$p = 2[1-\Phi(|z_0|)] = 2[1-\Phi(1.28)] = 2(1-0.8977) = 0.2006$$

5 *Kết luận: do* $|z_0| = 1.28 < 1.96$ *(hoặc p=0.2006 > 0.05)*
nên *chưa đủ cơ sở để bác bỏ* H_0.

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng-trường hợp biết phương sai

Bài toán 1

Quan sát X trên 2 mẫu lấy từ hai tổng thể A và B.

- *Trên tổng thể A: $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, mẫu cỡ n_1, trung bình mẫu $\bar{X}_1$, phương sai mẫu S_1^2.*
- *Trên tổng thể B: $X \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, mẫu cỡ n_2, trung bình mẫu $\bar{X}_2$, phương sai mẫu S_2^2.*
- *Tổng thể A và B là độc lập với nhau.*

Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập gồm các dạng sau

(a) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0 \end{cases}$

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng Trường hợp σ_1^2, σ_2^2 đã biết

Các bước kiểm định

- Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
- Xác định mức ý nghĩa α
- Tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

  thống kê $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Xác định miền bác bỏ.
- **Kết luận**: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với độ tin cậy $(1-\alpha)100\%$. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở bác

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng Trường hợp σ_1^2, σ_2^2 đã biết

Miền bác bỏ và p-giá trị tương ứng

Đối thuyết	Miền bác bỏ H_0	p-giá trị
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$p = 2[1 - \phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$: z < -z_{1-\alpha}$	$p = \phi(z_0)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$p = 1 - \phi(z_0)$

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng Trường hợp σ_1^2, σ_2^2 chưa biết-trường hợp mẫu lớn

Các giả định

1. $X_1, X_2, \ldots X_n$ là mẫu ngẫu nhiên chọn từ tổng thể 1 có kỳ vọng μ_1 và σ_1^2 chưa biết.
2. $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên chọn từ tổng thể 2 có kỳ vọng μ_2 và σ_2^2 chưa biết
3. Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X,Y) là độc lập với nhau.
4. Cỡ mẫu n >30, m>30

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu lớn

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, ta có thể thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2, S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi cả $n > 30, m > 30$,giả sử $\sigma_1 \neq \sigma_2$,đại lượng $T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1, \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Miền bác bỏ trong trường hợp này được tính tương tự như trường hợp đã biết phương sai tổng thể (thay thế σ_1, σ_2 bởi S_1, S_2).

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu nhỏ

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, ta có thể thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2, S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi cả $n \leq 30, m \leq 30$,giả sử $\sigma_1 \neq \sigma_2$,đại lượng

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1, \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right)}} \sim T(n+m-2)$$

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu nhỏ

Miền bác bỏ

Giả thuyết	Miền bác bỏ H_0
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t_0 < -t_{1-\alpha}^{n+m-2}$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t_0 > t_{1-\alpha}^{n+m-2}$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{1-\alpha/2}^{n+m-2}$

.

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫ
Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Ví dụ 6

Theo dõi giá cổ phiếu của hai công ty A và B trong vòng 31 ngày người ta tính được các giá trị sau

	$\bar{x}$	s
Công ty A	*37.58*	*1.50*
Công ty B	*38.24*	*2.20*

Giả thiết rằng giá cổ phiếu của hai công ty A và B là hai biến ngẫu nhiên phân phối theo luật chuẩn. Hãy cho biết có sự khác biệt thực sự về giá cổ phiếu trung bình của hai công ty A và B không? Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 = \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu lớn

1. $X_1, X_2, \ldots X_n$ là mẫu ngẫu nhiên chọn từ tổng thể 1 có kỳ vọng μ_1 và σ_1^2 chưa biết.
2. $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên chọn từ tổng thể 2 có kỳ vọng μ_2 và σ_2^2 chưa biết
3. Giả sử $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
4. Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X,Y) là độc lập với nhau.
5. Cỡ mẫu $n > 30, m > 30$

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu
Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 = \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu lớn

Chọn thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

làm tiêu chuẩn kiểm định. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $T_0 \sim \mathbb{N}(0,1)$. Trong đó $S^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ được gọi là phương sai mẫu gộp. Miền bác bỏ trong trường hợp này được tính tương tự như trường hợp đã biết phương sai tổng thể (thay thế σ_1, σ_2 bởi S_1, S_2).

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 = \sigma_2$ chưa biết-trường hợp mẫu nhỏ

Nếu $n \leq 30, m \leq 30$ Chọn thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

làm tiêu chuẩn kiểm định. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $T_0 \sim t(n+m-2)$. Trong đó $S^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ được gọi là phương sai mẫu gộp. Từ đây ta suy ra miền bác bỏ tương ứng với từng loại đối thuyết.

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng

Trường hợp σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Giả thuyết	Miền bác bỏ H_0
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t_0 < -t_{1-\alpha}^{n+m-2}$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t_0 > t_{1-\alpha}^{n+m-2}$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{1-\alpha/2}^{n+m-2}$

Chú ý: Trong trường hợp $n \leq 30, m \leq 30$(ví dụ n=20,m=20) thì thống kê kiểm định $T_0 \sim t(n+m-2)$. Tính $t_{1-\alpha}^{n+m-2} = z_{1-\alpha}$(hoặc $t_{1-\alpha/2}^{n+m-2} = z_{1-\alpha/2}$), nếu $n+m-2 > 30$.

Kiểm định giả thuyết về so sánh hai kỳ vọng. Trường hợp σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Chú ý 1

Khi n đủ lớn $(n > 30)$ *thì* $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ví dụ 7

Dùng hai phương pháp để làm cùng một loại sản phẩm. Phương pháp A được một nhóm 12 người thực hiện có năng suất trung bình là 45 sản phẩm trong một ca làm việc, với độ lệch mẫu $s_A = 5$ *sản phẩm. Phương pháp B được một nhóm 15 người khác thực hiện có năng suất trung bình là 53 sản phẩm trong một ca làm việc, với độ lệch mẫu* $s_B = 6$ *sản*

Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

Bài toán 2

Xét cỡ mẫu $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$.

Quan sát tỷ lệ các phần tử loại A trên hai mẫu lấy ra từ hai tổng thể.

- *Trên tổng thể 1: tỷ lệ các phần tử loại A là* p_1, *mẫu cỡ* n_1, *tần suất* $\hat{p}_1$.
- *Trên tổng thể 2: tỷ lệ các phần tử loại A là* p_2, *mẫu cỡ* n_2, *tần suất* $\hat{p}_2$.

Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

Bài toán 3 (tt)

Hãy kiểm định

(a) $\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < D_0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > D_0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq D_0 \end{cases}$ *với mức ý nghĩa* α.

- Gọi Y_1 và Y_2 là số phần tử loại A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, $Y_1 \sim B(n_1, p_1)$ và $Y_2 \sim B(n_2, p_2)$. Đặt

$$\hat{p}_1 = \frac{Y_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{Y_2}{n_2}, \hat{p} = \frac{Y_1 + Y_2}{n_1 + n_2},$$

Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

- Ta chọn thống kê

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - D_0}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

làm thống kê kiểm định. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Từ đây ta suy ra miền bác bỏ tương ứng với từng loại đối thuyết.

Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

Giả thuyết	Miền bác bỏ H_0
$H_1: p_1 - p_2 < D_0$	$W_\alpha = \left\{ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} : z < -z_{1-\alpha} \right\}$
$H_1: p_1 - p_2 > D_0$	$W_\alpha = \left\{ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} : z > z_{1-\alpha} \right\}$
$H_1: p_1 - p_2 \neq D_0$	$W_\alpha = \left\{ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} : \lvert z \rvert > z_{1-\alpha/2} \right\}$

Giới thiệu bài toán kiểm định, khái niệm | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu | Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu
Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ cho trường hợp hai mẫu

Ví dụ 8

Kiểm tra ngẫu nhiên sản phẩm sản xuất từ hai cơ sở ta có số liệu

- *Cơ sở 1: Có 20 phế phẩm trong 1000 sản phẩm kiểm tra.*
- *Cơ sở 2: Có 30 phế phẩm trong 900 sản phẩm kiểm tra.*

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ có thể coi rằng tỉ lệ phế phẩm của hai cơ sở sản xuất trên như nhau hay không?