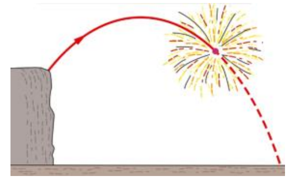
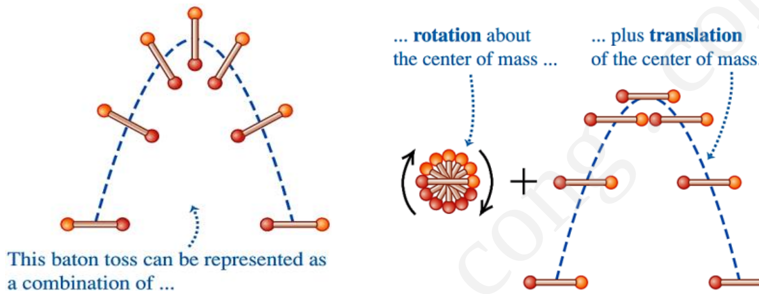
Chuyển động của hệ chất điểm – vật rắn

Chuyển động của hệ chất điểm rất phức tạp so với chất điểm, dẫn đến **khái niệm khối tâm** của hệ chất điểm.



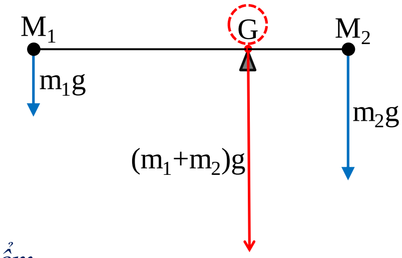
Chuyển động bất kỳ của vật rắn có thể xem là sự kết hợp chuyển động quay quanh khối tâm với chuyển động tịnh tiến của khối tâm.



As the skier flies through the air, most parts of his body follow complex trajectories. But one special point follows a parabola. What's that point, and why is it special?

1. Khối tâm của hệ chất điểm (Center of mass)

Hai chất điểm m_1, m_2 đặt tại M_1, M_2 sẽ có một điểm duy nhất G sao cho:



$$\sum_i \vec{M} = \overrightarrow{GM_1} \times m_1\vec{g} + \overrightarrow{GM_2} \times m_2\vec{g} = 0$$

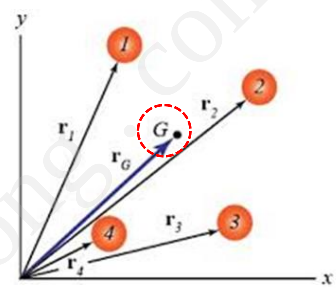
$$=> m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} = 0$$

G được gọi là khối tâm của hệ chất điểm.

Hệ n chất điểm, có một khối tâm G:

$$m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} + \cdots + m_n\overrightarrow{M_nG} = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{M_iG} = 0}$$



1. Khối tâm của hệ chất điểm

Vectơ vị trí khối tâm của hệ chất điểm

- Lực tác dụng lên chất điểm i: $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i = m_i\dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \dfrac{d^2(m_i\vec{r}_i)}{dt^2}$

- Tổng ngoại lực tác dụng lên toàn bộ n chất điểm:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2(m_i\vec{r}_i)}{dt^2} = \frac{d^2(\sum m_i\vec{r}_i)}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}\right)$$

$$\vec{F} = m\frac{d^2(\vec{r}_G)}{dt^2} \quad \text{, với } m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Vectơ vị trí khối tâm của hệ chất điểm:

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i} \qquad (1.1)$$

1. Khối tâm của hệ chất điểm (3)

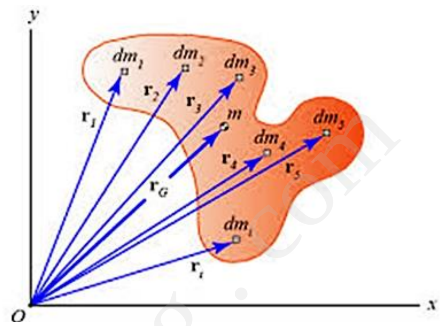
Vectơ vị trí khối tâm của vật rắn

Chia vật rắn khối lượng m thành n phần tử đủ nhỏ, sao cho mỗi phần tử được xem là một chất điểm.

(1.1)→ $\vec{r}_G = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i . \vec{r}_i$

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm} \qquad (1.2)$$

$$m = \int dm = \int \rho dv$$



Các thành phần tọa độ khối tâm:

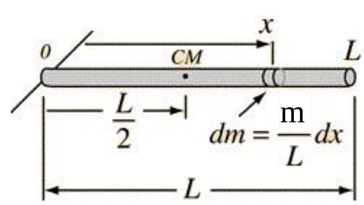
$$x_G = \frac{1}{m} \int x . dm \;;\; y_G = \frac{1}{m} \int y . dm \;;\; z_G = \frac{1}{m} \int z . dm \qquad (1.3)$$

Thí dụ Khối tâm của hệ chất điểm

Xác định khối tâm một thanh đồng nhất dài L, khối lượng m

Chọn trục x // thanh, gốc O trùng với một đầu thanh. Tọa độ khối tâm xác định bởi:

(1.3)→ $x_{cm} = \frac{1}{m} \int_L x . dm$



Phần tử dm của thanh dài dx: $dm = \frac{m}{L} dx$

$$x_{cm} = \frac{1}{m} \int_0^L x \frac{m}{L} dx = \frac{1}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{L} = \frac{L}{2}$$

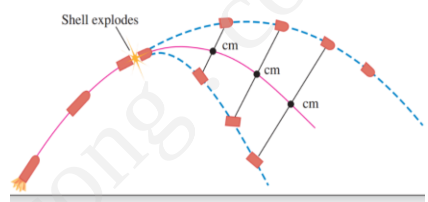
2. Vectơ vận tốc khối tâm

Khối tâm G dịch chuyển với vận tốc $\vec{v}_G$:

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i \qquad \boxed{\rightarrow \vec{v}_G = \frac{\vec{P}}{m}} \quad \text{hay} \quad \boxed{\vec{P} = m\vec{v}_G} \qquad (2.1)$$

Tổng động lượng của hệ bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc của khối tâm.



CƠ HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM – VẬT RẮN TS. Nguyễn Kim Quang

3. Phương trình chuyển động của khối tâm

Gia tốc của khối tâm G:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

$$\rightarrow \vec{a}_G = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_G} \qquad (3.1)$$

Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cả hệ chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực lên hệ.

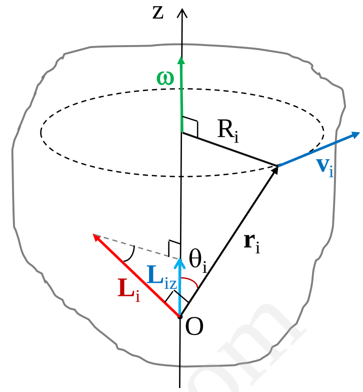
Bảo toàn động lượng hệ chất điểm

Hệ cô lập hay tổng ngoại lực tác dụng lên hệ bằng 0 thì tổng động lượng của hệ bảo toàn.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{v}_G = \overrightarrow{const}$$

Nếu $F_x = 0 \Rightarrow P_x = const \Rightarrow v_x = const$

4. Momen động lượng của vật rắn



Vận tốc chất điểm i:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad , v_i = \omega R_i$$

Momen động lượng của i đ/v O:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Momen động lượng trên trục quay z:

$$L_{iz} = L_i.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i r_i v_i.\sin\theta_i = m_i(r_i \sin\theta_i)(\omega R_i) = m_i {R_i}^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i {R_i}^2\right)\omega \rightarrow \boxed{L_z = I\omega} \quad (4.1)$$

Nếu z là trục đối xứng hay trục chính *(Một vật rắn bất kỳ có ít nhất 3 trục chính ⊥ nhau):* $\boxed{\vec{L} = \vec{L}_z = I\vec{\omega}}$ (4.2)

5. Phương trình động lực học quay của vật rắn

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \quad (5.1)$$

$\vec{M}$*: Tổng momen ngoại lực tác động lên vật rắn.*

Vật rắn quay quanh trục: $\boxed{\vec{L} = I.\vec{\omega}}$

Nếu I = const (trục quay cố định đối với vật rắn):

$$\boxed{I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta} = \vec{M}} \quad (5.2)$$

Nếu vật rắn cô lập hay tổng momen lực đối với trục quay bằng 0 thì vật rắn quay với vận tốc góc không đổi.

Thí dụ: Quả cầu m_1 nối với khối m_2 bởi dây nhẹ vắt qua ròng rọc m, bán kính R. Khối m_2 trượt không ma sát, tìm gia tốc của 2 vật.

Tổng momen động lượng đối với trục ròng rọc:

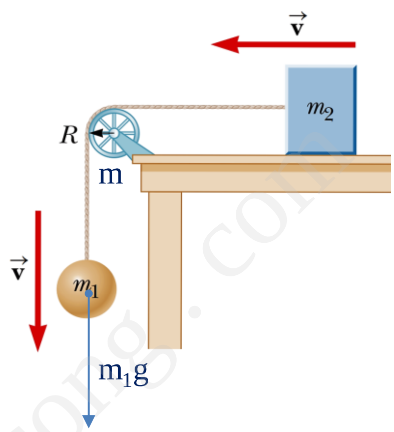
$$L = m_1 v.R + m_2 v.R + (mR^2)\frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow L = (m_1+m_2+m)vR$$

Áp dụng: $M = \dfrac{dL}{dt}$

$$m_1 gR = (m_1 + m_2 + m)R\frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2 + m)}$$



PP. Áp dụng phương trình cơ bản động lực học cho từng chuyển động:

- Chuyển động tịnh tiến của m_1 và m_2:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad (1)$$

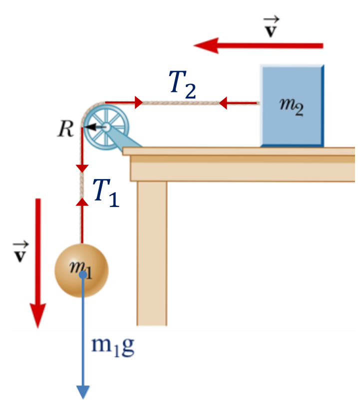
$$T_2 = m_2 a \qquad (2)$$

- Chuyển động quay của ròng rọc:

$$M = I\beta \Rightarrow (T_1 - T_2)R = (mR^2)\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = ma \qquad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \rightarrow a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2 + m)}$$



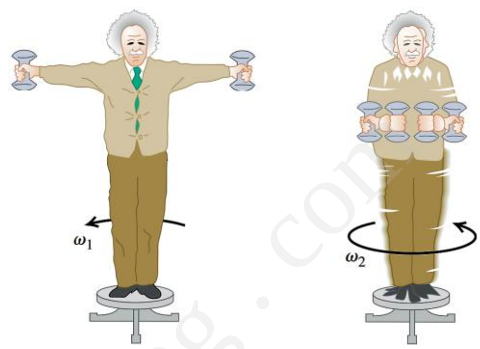
6. Bảo toàn momen động lượng

Từ phương trình $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ Nếu $\vec{M} = 0$ thì $\vec{L} = \text{const}$

Nếu hệ cô lập hay tổng momen lực đối với trục quay bằng 0 thì momen động lượng bảo toàn.

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

Nội lực của một hệ có thể truyền momen động lượng từ phần tử này sang phần tử khác trong hệ nhưng không làm thay đổi momen động lượng của hệ.



7. Momen quán tính của vật rắn

- Với hệ chất điểm rời rạc $\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i I_i}$ *(7.1)*

- Với vật rắn $\boxed{I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \int R^2 dm}$ *(7.2)*

+ Thanh dài: dm=(m/L)dx=λ.dx $I = \int \lambda x^2 dx$

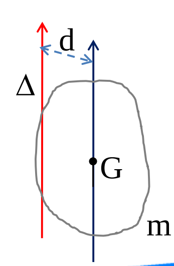
+ Bản mỏng: dm=(m/S)dS=σ.dS $I = \int \sigma r^2 dS$

+ Khối: dm=(m/V)dV=ρ.dV $I = \int \rho r^2 dV$

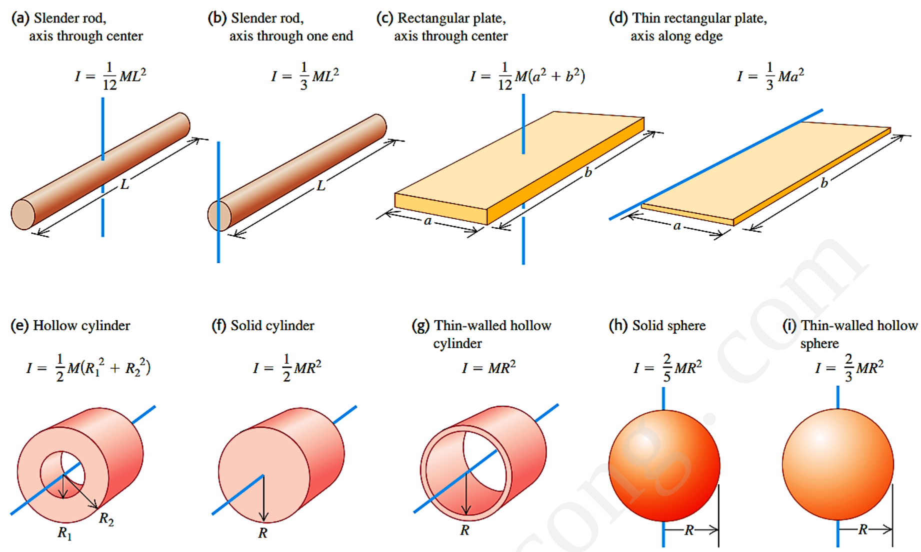
- Với trục quay không qua khối tâm

Công thức Steiner – Huygens (định lý trục //)

$\boxed{I_\Delta = I_G + md^2}$ *(7.3)*



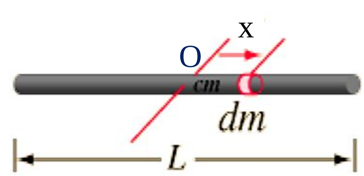
8. Công thức momen quán tính của vật rắn đối xứng



TD: Tính Momen quán tính của vật rắn

Thanh mảnh đồng nhất đối với trục quay vuông góc với thanh

$$I = \int R^2 dm$$



Chọn trục x // thanh, gốc O tại trục quay.

Thay $R = x$ và $dm = \frac{m}{L}dx$

- Đối với trục quay qua khối tâm:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L}x^2 dx = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{12}mL^2$$

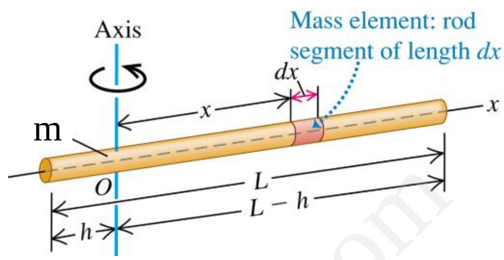
- Đối với trục quay qua một đầu thanh:

$$I = \int_0^L \frac{m}{L}x^2 dx = \frac{m}{3L}L^3 = \frac{1}{3}ML^2$$

TD: Tính Momen quán tính của vật rắn

Trường hợp trục quay không qua khối tâm

$$I = \int_{-h}^{L-h} \frac{m}{L} x^2 dx$$



$$I = \frac{m}{3L}[(L-h)^3 - (-h)^3]$$

$$I = \frac{m}{3L}[(L-h)^3 + h^3]$$

$$I = \frac{1}{3}m(L^2 - 3Lh + h^2)$$

Nếu áp dụng công thức Steiner - Huyghens:

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2} - h\right)^2 = \frac{1}{3}m(L^2 - 3Lh + h^2)$$

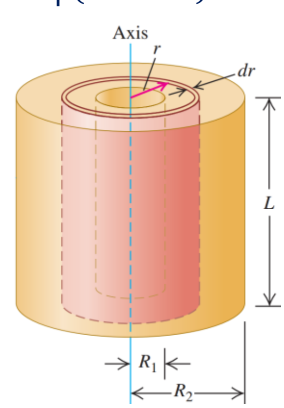
TD: Tính Momen quán tính của vật rắn

Trụ đồng nhất đối với trục quay là trục đối xứng

Momen quán tính của vành tròn hoặc trụ tròn mỏng: $I = mr^2$

Xét yếu tố vi cấp là hình trụ dày dr: $dm = \rho dv = \rho(2\pi rL.dr)$

$$\rightarrow I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi rL.dr)$$



$$\rightarrow I = 2\rho\pi L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2\rho\pi L}{4}\left(R_2^{\,4} - R_1^{\,4}\right)$$

$$\rightarrow I = \frac{\rho\pi L}{2}\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)\left(R_2^{\,2} + R_1^{\,2}\right)$$

Mà $m = \rho V = \rho.\pi L\left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}m\left(R_1^{\,2} + R_2^{\,2}\right)$$

9. Cơ năng của hệ chất điểm - vật rắn

- Động năng tịnh tiến của khối tâm G: $\boxed{E_{tt} = \frac{1}{2} m v_G{}^2}$ *(9.1)*

Động năng quay của chất điểm thứ i: $E_{q,i} = \frac{1}{2} m_i v_i{}^2 = \frac{1}{2} m_i r_i{}^2 \omega^2$

- Động năng quay của vật rắn đối với 1 trục:

$$E_q = \sum_i E_{q,i} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i{}^2\right)\omega^2 \rightarrow \boxed{E_q = \frac{1}{2} I\omega^2} \quad (9.2)$$

- Thế năng trọng trường của hệ chất điểm – vật rắn:

Giả sử chọn trục y thẳng đứng hướng lên, gốc thế năng tại y=0.

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \cdots = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_i\right) g = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) y_G . g$$

$\boxed{U = mgy_G}$ *(9.3)*

- Cơ năng của vật rắn: $\boxed{E = \left(\frac{1}{2} m v_G{}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2\right) + mgy_G}$ *(9.4)*

10. Bảo toàn cơ năng của hệ chất điểm - vật rắn

Công của lực F trong chuyển động (tịnh tiến) của khối tâm:

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_{G,1}}^{\vec{r}_{G,2}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_{G,2}{}^2 - \frac{1}{2} m v_{G,1}{}^2} \quad (10.1)$$

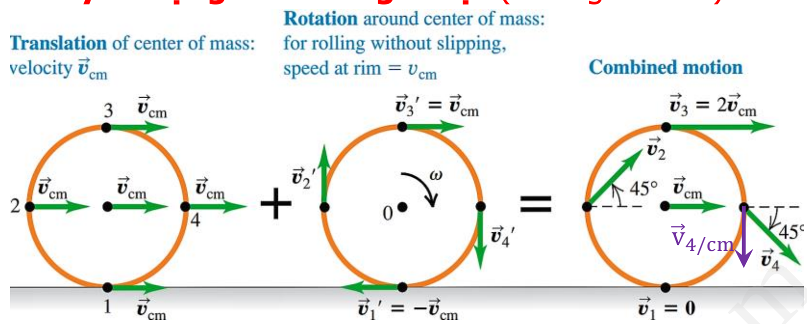
Công của momen lực M trong chuyển động quay của vật rắn:

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta = \frac{1}{2} I\omega_2{}^2 - \frac{1}{2} I\omega_1{}^2} \quad (10.2)$$

Nếu hệ cô lập hay chịu tác động bởi ngoại lực bảo toàn thì cơ năng của hệ bảo toàn $E = E_{tt} + E_q + U$: Không đổi

Nếu hệ chịu tác động bởi ngoại lực không bảo toàn f thì cơ năng của hệ biến đổi: $\Delta E = W_f$

11. Chuyển động lăn không trượt (Rolling motion)



- Vận tốc khối tâm v_G và vận tốc góc ω: $\boxed{v_G = R\omega}$

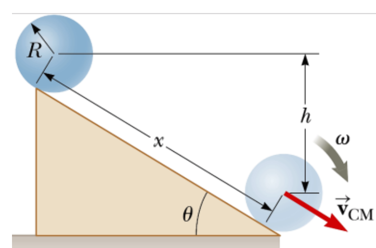
  Vận tốc một điểm trên vành tròn được xác định bằng cách cộng vectơ vận tốc. Thí dụ: $\vec{v}_4 = \vec{v}_{4/cm} + \vec{v}_{cm}$

- Gia tốc khối tâm a_G và gia tốc góc β: $\boxed{a_G = R\beta}$

- Động năng của vật rắn: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv_G{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$

Thí dụ Quả cầu lăn không trượt trên mặt nghiêng

Quả cầu m đang đứng yên ở độ cao h, bắt đầu lăn xuống. Tìm vận tốc quả cầu ở cuối mặt phẳng nghiêng.



I: momen quán tính đối với khối tâm;
v: vận tốc khối tâm

Động năng quả cầu:

$$E_k = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right)v^2$$

Áp dụng bảo toàn cơ năng: $\Delta E_k + \Delta U = 0$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right)v^2 - 0\right] + (0 - mgh) = 0 \quad \rightarrow v^2 = \frac{2gh}{1 + (I/mR^2)}$$

→ Vận tốc khối tâm: $v = \left[\frac{2gh}{1 + (I/mR^2)}\right]^{1/2} < \sqrt{2gh}$

Trường hợp vật trượt không ma sát: $v = \sqrt{2gh}$

Thí dụ quả cầu lăn không trượt trên mặt nghiêng (2)

Áp dụng momen quán tính quả cầu đặc: $I = \frac{2}{5}mR^2$

$$\rightarrow v = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Thay h=x.sin θ $\rightarrow v^2 = \frac{10}{7}gx.\sin\theta$ *(1)*

Ngoại lực trên phương chuyển động không đổi → gia tốc không đổi → Khối tâm chuyển động nhanh dần đều.

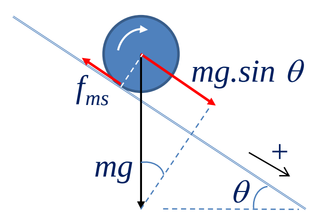
Áp dụng hệ thức trong chuyển động thay đổi đều của khối tâm:

$$v^2 = 2ax \quad (2)$$

Từ (1) và (2) → $a = \frac{5}{7}g.\sin\theta$

Thí dụ quả cầu lăn không trượt trên mặt nghiêng (3)

Phương pháp động lực học:



- Phương trình động lực học của khối tâm:

$$F_{\parallel} = mg\sin\theta - f_{ms} = ma \quad (3)$$

- Phương trình động lực học quay quanh trục qua khối tâm:

$$M = f_{ms}R = I\beta = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow f_{ms} = \frac{2}{5}ma \quad (4)$$

Từ (3) và (4) → $a = \frac{5}{7}g.\sin\theta$