# PHƯƠNG PHÁP TÍNH 1:
# PHƯƠNG TRÌNH và HÀM SỐ

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên
vdhuycuong@gmail.com

**Giới thiệu môn học**

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

**Nội dung môn học**

- Sai số trong tính toán.
- Giải gần đúng phương trình đại số.
- Giải hệ phương trình đại số tuyến tính.
- Xấp xỉ và nội suy.

**Tài liệu môn học**

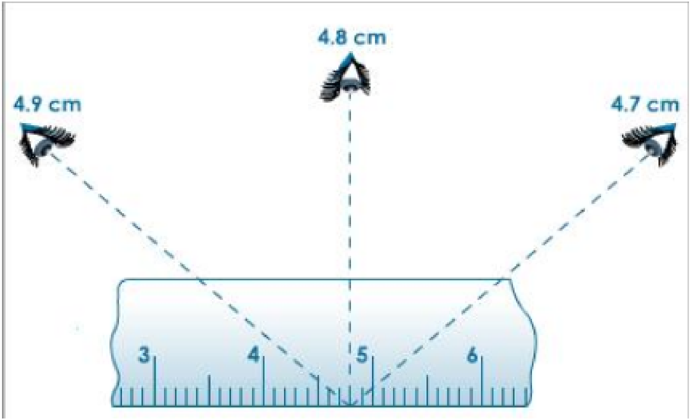
- Giáo trình Phương pháp tính.
- Giáo trình Giải tích số.

# Mục lục

# Chương 1

# Sai số trong tính toán

# 1. Sai số trong đo lường và tinh toán



# 1. Sai số trong đo lường và tinh toán

Sai số là giá trị chênh lệch giữa giá trị đo được (hoặc tính được) và giá trị thực (hay giá trị chính xác) của một đại lượng nào đó.

Khi đo đạc nhiều lần một đại lượng nào đó, thông thường dù cẩn thận đến mấy, vẫn thấy các kết quả giữa các lần đo được hầu như đều khác nhau. Điều đó chứng tỏ rằng trong kết quả đo được luôn luôn có sai số và kết quả chúng ta nhận được chỉ là giá trị gần đúng của nó mà thôi.

Có hai loại sai số thường gặp là sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống. Sai số ngẫu nhiên là sai số do những yếu tố ngẫu nhiên có tính bất kì gây ra. (Sai số mỗi lần đo là khác nhau). Sai số hệ thống là sai số do những yếu tố thường xuyên hay các yếu tố có quy luật tác động. (Sai số mỗi lần đo đều như nhau).

# 1.1. Khái niệm sai số

**Định nghĩa 1.1.** Giả sử $a^*$ là số đúng, $\overline{a}$ (hoặc $a$) là số gần đúng của $a^*$.
Ta gọi hiệu số $a^* - \overline{a}$ là sai số xấp xỉ của số gần đúng $a$. Khi đó

$\Delta a = |a^* - \overline{a}|$ được gọi là sai số tuyệt đối.

$\delta a = \left|\dfrac{a^* - \overline{a}}{a^*}\right|$ được gọi là sai số tương đối.

**Ví dụ 1.1.** Cho $a^* = 9.8$ và $\overline{a} = 10$. Tìm sai số tuyệt đối và sai số tương đối.

Sai số tuyệt đối $\Delta a = |a^* - \overline{a}| = |9.8 - 10| = 0.2$,

Sai số tương đối $\delta a = \left|\dfrac{a^* - \overline{a}}{a^*}\right| = \dfrac{0.2}{9.8} = 0.0204\ldots$

Lưu ý: Trong công thức tính sai số tương đối, có thể thay $a^*$ dưới mẫu bởi $\overline{a}$.

# 1.1. Khái niệm sai số

Bài tập: Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng sau.

1.1. Một cây cầu được dự tính dài 24.5 $m$. Trong thực tế nó dài 25.2 $m$.

1.2. Lượng kem trong bánh theo quảng cáo là chiếm 25% khối lượng cái bánh (120 $g$). Trong thực tế nó chỉ chiếm 10%.

1.3. Thể tích một lon nước ngọt tiêu chuẩn là 330 $ml$. Một lon nước được bơm đến 333 $ml$.

1.4. Một tiết học tiêu chuẩn là 50 phút. Tuy nhiên giáo viên chỉ dạy 45 phút.

**Định nghĩa 1.2.**

Sai số tuyệt đối giới hạn của số $a$ là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của $a$ và kí hiệu là $\overline{\Delta}$ a.

Sai số tương đối giới hạn của số $\overline{a}$ là số không nhỏ hơn sai số tương đối của $a$ và kí hiệu là $\overline{\delta}$ a.

Khi viết $\overline{a} \pm \overline{\Delta} a$ nghĩa là: $\overline{a} - \overline{\Delta} a \leq a^* \leq \overline{a} + \overline{\Delta} a$.
Trong trường hợp này $\overline{a}$ thường là giá trị lý thuyết (tham khảo) và $a^*$ là giá trị thực tế.

# 1.1. Khái niệm sai số

Bài tập: Kiểm tra xem các giá trị sau có thỏa yêu cầu sai số lớn nhất hay không?

1.5. Gói mì có khối lượng tiêu chuẩn là $100 \pm 3$ *g*. Một gói mì có khối lượng 105 *g*.

1.6. Hộp sữa có thể tích tiêu chuẩn là $180 \pm 5$ *ml*. Một hộp sữa có thể tích là 178 *ml*.

1.7. Bánh trung thu có khối lượng tiêu chuẩn là $250 \pm 8$ *g*. Một cái bánh có khối lượng là 260 *g*.

1.8. Người mẫu nam quảng cáo áo thun có chiều cao tiêu chuẩn là $185 \pm 6$ *cm*. Một người mẫu nam có chiều cao là 179 *cm*.

# 1.2. Phân loại sai số

Dựa vào nguyên nhân gây sai số, ta có các loại sau:

- Sai số giả thiết: xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.
- Sai số do số liệu ban đầu: xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.
- Sai số phương pháp: xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.
- Sai số tính toán: xuất hiện do làm tròn số trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

Ví dụ 1.2.

a) Cho $\pi^2 \simeq 10$.

b) Cho 1 nam $=$ 365 ngày.

c) Cho $\sin x \simeq x$.

d) Tính $e^3$.

# 1.3. Làm tròn số

Xét số thập phân

$$A = s_m s_{m-1} \ldots s_1 s_0 . s_{-1} s_{-2} \ldots s_n s_{n+1} \ldots$$

Khi đó $A$ được làm tròn với $n$ số thập phân bởi số $a$ có dạng

$$a = s_m s_{m-1} \ldots s_1 s_0 . s_{-1} s_{-2} \ldots \overline{s_n}$$

với qui tắc làm tròn sau

- Nếu $s_{n+1} \geq 5$ thì $\overline{s_n} = s_n + 1$.
- Nếu $s_{n+1} < 5$ thì $\overline{s_n} = s_n$.

Ví dụ 1.3. Làm tròn các số sau với 4 số thập phân

a) $356.3468123766 \simeq 356.3468$

b) $0.312893123 \simeq 0.3129$

c) $0.55555555 \simeq 0.5556$

Ngoài ra người ta còn sử dụng phương pháp chặt cụt với $\overline{s_n} = s_n$.

# 1.4. Tính toán sai số

Giả sử dùng $n$ số gần đúng $x_1, x_2, ..., x_n$ để tính đại lượng $y$ theo công thức $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Trong đó $f$ là hàm khả vi liên tục theo các đối số $x_i$. Khi đó sai số của y được xác định theo công thức sau

- Sai số tuyệt đối:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

- Sai số tương đối:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \quad \text{hay} \quad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|}$$

Lưu ý:

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln x^y = y \ln x$$

Ví dụ 1.4. Tìm sai số tuyệt đối và tương đối của $y = x_1 - x_2$

Sai số tuyệt đối $\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Sai số tương đối $\delta y = \dfrac{1}{|x_1 - x_2|}\Delta x_1 + \dfrac{1}{|x_1 - x_2|}\Delta x_2$.

Ví dụ 1.5. Tìm sai số tuyệt đối và tương đối của $y = x_1 \cdot x_2$

Sai số tuyệt đối $\Delta y = |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2$.

Sai số tương đối $\delta y = \dfrac{1}{|x_1|}\Delta x_1 + \dfrac{1}{|x_2|}\Delta x_2$.

Ví dụ 1.6. Tìm sai số tuyệt đối và tương đối của $y = x_1^{x_2}$

Sai số tuyệt đối $\Delta y = |x_2 \cdot x_1^{x_2 - 1}|\Delta x_1 + |x_1^{x_2} \ln x_1|\Delta x_2$.

Sai số tương đối $\delta y = \left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|\Delta x_1 + |\ln x_1|\Delta x_2$.

# 1.4. Tính toán sai số

Bài tập: Tìm sai số tuyệt đối và tương đối của các đại lượng $y$ sau biết $a = 10, \Delta a = 0.25, b = 0.324, \Delta b = 0.015, c = 13.12, \Delta c = 0.1$.

1.9. $y_1 = ab + ac - b/c$. 1.10. $y_2 = a^2 - \sqrt{bc}$.

1.11. $y_3 = a^3 - b\sqrt{c}$. 1.12. $y_4 = \dfrac{a^3}{b\sqrt{c}}$.

Bài tập: Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và tương đối giới hạn của các đại lượng $a, b, c$ sau biết $a = 5.5, b = 6.568, c = 24.138$.

1.13. $y_1 = abc, \Delta y_1 = 0.025$.

1.14. $y_2 = a\sqrt{b} - b\sqrt{c}, \Delta y_2 = 0.12$.

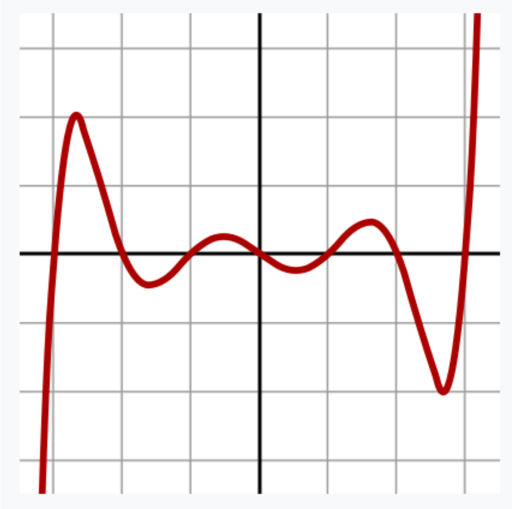
1.15. $y_3 = c\sin(\dfrac{a}{b}), \Delta y_3 = 1.2$.

1.16. $y_4 = \dfrac{b}{c}e^a, \Delta y_4 = 0.02$.

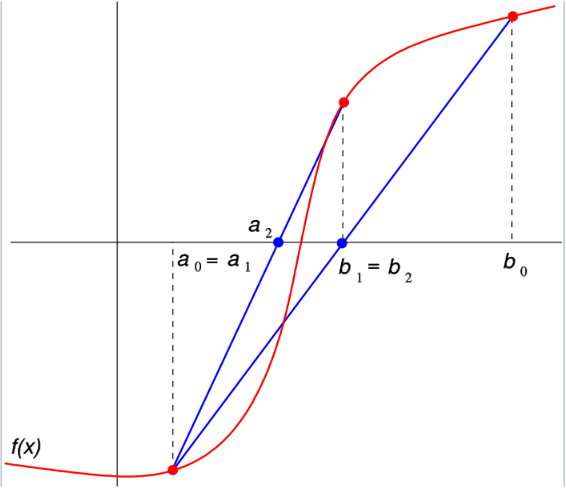
# Chương 2

# Giải gần đúng phương trình

# 2. Giải gần đúng phương trình



# 2. Giải gần đúng phương trình



# 2. Giải gần đúng phương trình

Trong mục này, ta tìm hiểu những phương pháp giải các phương trình đại số và siêu việt dạng: $f(x) = 0 \quad (*)$, với $f(x)$ là một hàm phi tuyến.

Phương trình trên, trừ một vài trường hợp đặc biệt, có công thức giải đúng, còn nói chung không có công thức giải đúng. Ngoài ra, các hệ số của $f(x)$ trong nhiều trường hợp cũng chỉ là các số gần đúng hoặc nghiệm của $f(x)$ là một biểu thức rất phức tạp, cho nên vấn đề giải đúng phương trình $(*)$ cũng không thật sự cần thiết. Do đó, chúng ta cần quan tâm đến những phương pháp giải gần đúng, nhất là những phương pháp có thể dùng máy tính hỗ trợ.

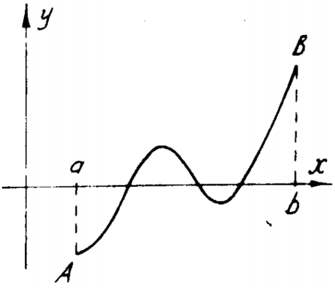
Để giải gần đúng phương trình $(*)$, ta tiến hành các bước sau:
Thứ nhất là tách nghiệm, nghĩa là tìm một khoảng $[a, b]$ đủ nhỏ sao cho phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.
Thứ hai là chính xác hóa nghiệm xấp xỉ đến độ chính xác cần thiết.

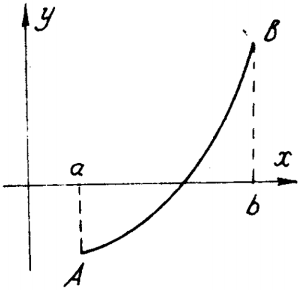
# 2.1. Khoảng phân ly nghiệm

Cơ sở để tách nghiệm là những định lý về sự liên tục của hàm số:

(i) Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a, b)$.

(ii) Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$, hơn nữa, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f'(x)$ không đổi dấu trên $[a, b]$ thì nghiệm nói trên là duy nhất.



# 2.1. Khoảng phân ly nghiệm

Khoảng phân ly nghiệm là đoạn $[a, b]$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Phương pháp tìm khoảng phân ly nghiệm:
Sử dụng đồ thị: Vẽ đồ thị và tìm hai điểm trên đồ thị sao cho một điểm trên trục hoành và một điểm dưới trục hoành.
Sử dụng giá trị: Chọn $a$ bất kì trên tập xác định. Tìm $b$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ví dụ 2.1. Tìm khoảng phân ly nghiệm của phương trình $e^x + x = 4$
Dễ thấy $f(x) = e^x + x - 4$ có đạo hàm $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Vậy $f(x)$ là hàm tang.
Chọn $a = 0$ thì $f(a) = e^0 + 0 - 4 = -3 < 0$. Ta chọn $b > a$.
Chọn $b = 1$ thì $f(b) = e^1 + 1 - 4 = -0.2817 < 0$. Không thỏa.
Chọn lại $b = 2$ thì $f(b) = e^2 + 2 - 4 = 5.3891 > 0$. Thỏa.
Vậy khoảng phân ly nghiệm là $[0, 2]$

# 2.1. Khoảng phân ly nghiệm

Bài tập: Tìm khoảng phân ly nghiệm của các phương trình sau:

2.1. $e^x - 10x + 7 = 0$.

2.2. $x^3 + x - 5 = 0$.

2.3. $\cos 2x + x - 5 = 0$.

2.4. $x^4 - 4x - 1 = 0$.

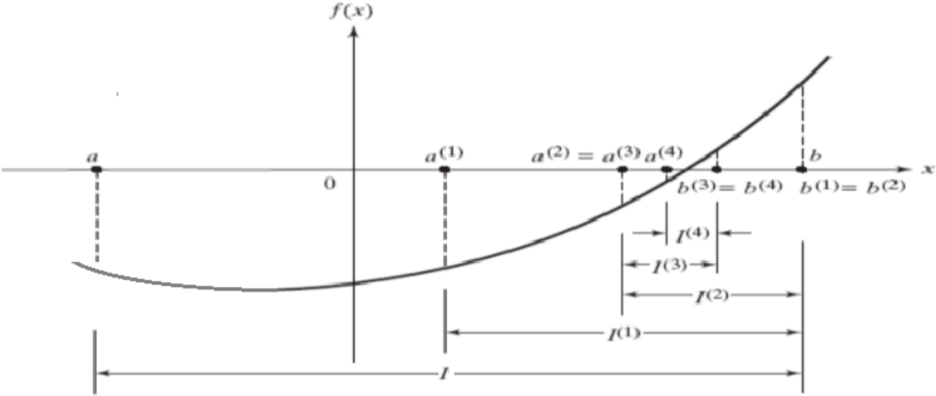
2.5. $x \sin x = 3$.

2.6. $x^5 - 3x^2 + x = 2$.

2.7. $\ln x - x + 6 = 0$.

2.8. $3 \tan x - 2x - 3 = 0$.

# 2.2. Phương pháp chia đôi



Bisection method:

Mục tiêu: Tìm $\overline{x} \in [a, b]$ thỏa $f(\overline{x}) \simeq 0$.

Giả thiết: Hàm $f$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ý tưởng: Ta sẽ thu nhỏ $[a, b]$ (mà vẫn giữ được giả thiết).

Điều kiện dừng: Giá trị $f(\overline{x})$ nhỏ hơn sai số cho phép .

Thực hiện:

B1: Lấy $c = \dfrac{a+b}{2}$ nếu $|f(c)| \simeq 0$ thì $\overline{x} = c$ và DỪNG.

B2: Nếu $f(c) \not\simeq 0$ thì ta chọn $[a_1, b_1]$ là một trong hai đoạn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$ sao cho $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

B3: Thực hiện lại B1 với $[a, b]$ được thay bởi $[a_1, b_1]$.

Sai số: Sau $n$ lần chia đôi bài toán sẽ dừng. Khi đó

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{và} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Sai số mắc phải khi đó là $|x^* - \overline{x}| \leq |b_n - c_n| = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

# 2.2. Phương pháp chia đôi

Thuật toán Bisection method:

1. Khai báo hàm $f(x)$ đồng thời kiểm tra sự liên tục của $f(x)$.
2. Nhập *tol*, $a$ và $b$ đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Gán $a_0 = a$ và $b_0 = b$.

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

4. Gán $c = \dfrac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$.
5. Nếu $|f(c)| < tol$, BREAK vòng lặp.
   Ngược lại gán $k = k + 1$.
6. Nếu $f(a_{k-1}) \cdot f(c) > 0$, $a_k = c$, $b_k = b_{k-1}$.
   Ngược lại $b_k = c$, $a_k = a_{k-1}$.

(Đóng vòng lặp)

7. Đáp án $\overline{x} = c$.

Ví dụ 2.2. Tìm nghiệm của phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ trong khoảng $[1, 2]$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Đặt $f(x) = x^3 + x - 5$.

Đây là hàm liên tục có $f(1) \cdot f(2) = (-3) \cdot 5 < 0$.

Lần lượt thực hiện các bước sau

$(k = 1)$ $a = 1, b = 2, c = 1.5$, $f(c) = -0.1250$,
$|f(c)| > 3 \cdot 10^{-3}$, $f(c) \cdot f(a) > 0$, $a = c = 1.5$.

$(k = 2)$, $a = 1.5, b = 2, c = 1.75$, $f(c) = 2.1094$,
$|f(c)| > 3 \cdot 10^{-3}$, $f(c) \cdot f(a) < 0$, $b = c = 1.75$.

$(k = 3)$, $a = 1.5, b = 1.75, c = 1.625$, $f(c) = 0.9160$,
$|f(c)| > 3 \cdot 10^{-3}$,$f(c) \cdot f(a) < 0$, $b = c = 1.625$.

...

$(k = 6)$, $a = 1.5, b = 1.5313, c = 1.5156$, $f(c) = -0.0028$,
$|f(c)| < 3 \cdot 10^{-3}$

Kết luận $x = 1.5156$ là nghiệm của $f(x) = 0$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

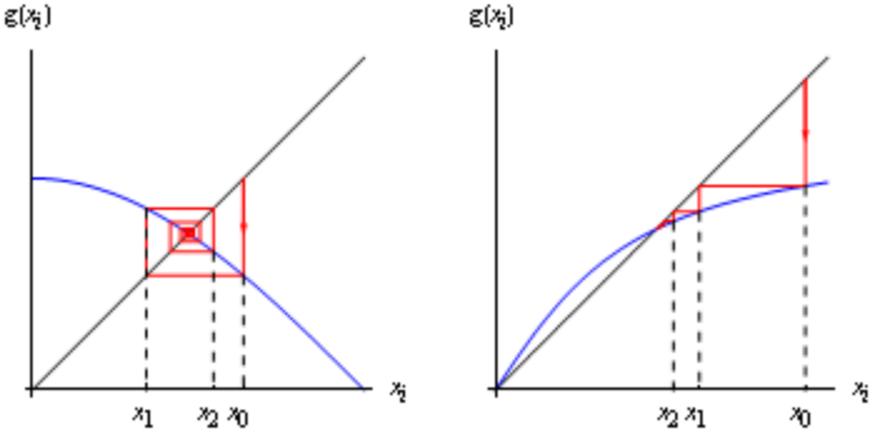
Bài tập: Thực hiện đến bước lặp thứ 3 trong việc giải các phương trình sau:

2.9. $x^3 - 2x - 10 = 0$ với $x \in [2, 3]$
2.10. $x^3 + x^2 + x = 1$ với $x \in [0, 1]$.
2.11. $e^x - 3x^2 = 0$ với $x \in [3, 5]$.
2.12. $x - \ln(x + 1) = 4$ với $x \in [5, 7]$.

Bài tập: Giải các phương trình sau với sai số $10^{-3}$:

2.13. $x - \sin x = 0.25$.
2.14. $x^3 - x = 1000$.
2.15. $x \ln x - 1.2 = 0$.
2.16. $2^x - x - 4 = 0$

# 2.3. Phương pháp lặp



# 2.3. Phương pháp lặp

Fixed point iteration:

Mục tiêu: Tìm $\overline{x} \in [a, b]$ thỏa $f(\overline{x}) \simeq 0$.

Giả thiết: Hàm $f$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ý tưởng: Ta đưa về dạng $\tilde{x} = \varphi(x)$ tạo nên dãy $x_k$.

Điều kiện dừng: $f(x_k) \simeq 0$.

Thực hiện:

B1: Biến đổi $f(x) = 0$ thành $x = \varphi(x)$.

B2: Tìm $x_1 = \varphi(x_0)$ với $x_0$ tùy ý trong $[a, b]$.

Nếu $f(x_1) \simeq 0$ thì $\overline{x} = x_1$ và DỪNG.

B3: Thực hiện lại B2 với $x_0 = x_1$.

Sai số: Theo công thức Lagrange thì tại bước thứ $k$:

$$|x^* - x_k| \leq |\varphi'(c)||x^* - x_{k-1}|.$$

Sau $n$ bước bài toán sẽ dừng, khi đó

$$|x^* - x_n| \leq |\varphi'(c)|^n|a - b|$$

Nhận xét: Bài toán hội tụ nếu $|\varphi'(x)| < 1$ với mọi $x \in [a, b]$.

## 2.3. Phương pháp lặp

Thuật toán Fixed point iteration:

1. Khai báo hàm $f(x)$, $\varphi(x)$ đồng thời kiểm tra sự liên tục của $f$ và $\varphi$. Kiểm tra $|\varphi'(x)| < 1$ với mọi $x \in [a, b]$.
2. Nhập $tol$,$a$ và $b$ đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Nhập $x_0 \in [a, b]$.

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

4. Gán $x_k = \varphi(x_{k-1})$.
5. Nếu $|f(x_k)| < tol$, BREAK vòng lặp.
   Ngược lại gán $k = k + 1$.

(Đóng vòng lặp)

6. Đáp án $\overline{x} = x_k$.

# 2.3. Phương pháp lặp

Ví dụ 2.3. Tìm nghiệm của phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ trong khoảng $[1, 2]$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Đặt $f(x) = x^3 + x - 5$ và $\varphi(x) = \sqrt[3]{5 - x}$. Hàm $f$ liên tục có $f(1) \cdot f(2) = (-3) \cdot 5 < 0$ và $|\varphi'(x)| < 1|$ với mọi $x \in [1, 2]$.

Chọn $x_0 = 1.3$.

Lần lượt thực hiện các bước sau

$(k = 1)$ $x_1 = \sqrt[3]{5 - x_0} = 1.5467, f(x_1) = 0.2467,$
$|f(x_1)| > 3 \cdot 10^{-3}$

$(k = 2)$ $x_2 = \sqrt[3]{5 - x_1} = 1.5115, f(x_2) = -0.0352,$
$|f(x_2)| > 3 \cdot 10^{-3}$

$(k = 3)$ $x_3 = \sqrt[3]{5 - x_2} = 1.5166, f(x_3) = 0.0051,$
$|f(x_3)| > 3 \cdot 10^{-3}$

$(k = 4)$ $x_4 = \sqrt[3]{5 - x_3} = 1.5159, f(x_4) = -0.0007,$
$|f(x_4)| < 3 \cdot 10^{-3}$

Kết luận $x = 1.5159$ là nghiệm của $f(x) = 0$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Bài tập: Thực hiện đến bước lặp thứ 3 trong việc giải các phương trình sau:

2.17. $x^3 - 2x - 10 = 0$ với $x \in [2, 3]$

2.18. $x^3 + x^2 + x = 1$ với $x \in [0, 1]$.

2.19. $e^x - 3x^2 = 0$ với $x \in [3, 5]$.

2.20. $x - \ln(x + 1) = 4$ với $x \in [5, 7]$.

Bài tập: Giải các phương trình sau với sai số $10^{-3}$:

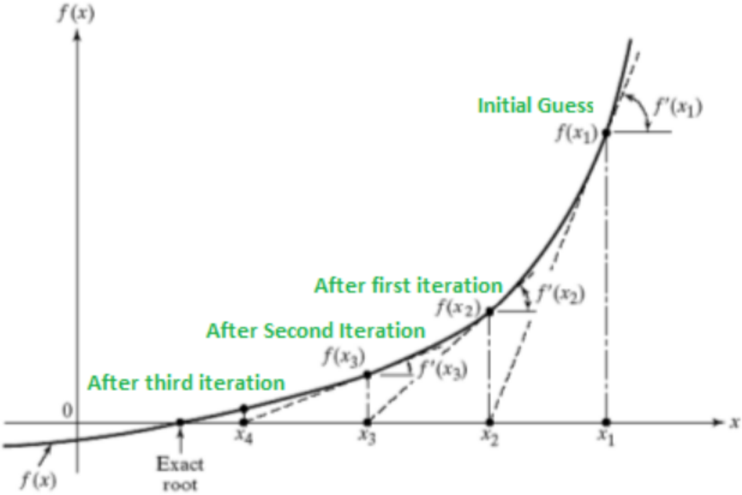
2.21. $x - \sin x = 0.25$.

2.22. $x^3 - x = 1000$.

2.23. $x \ln x - 1.2 = 0$.

2.24. $2^x - x - 4 = 0$

# 2.4. Phương pháp tiếp tuyến



# 2.4. Phương pháp tiếp tuyến

Newton method:

Mục tiêu: Tìm $\overline{x} \in [a,b]$ thỏa $f(\overline{x}) \simeq 0$.

Giả thiết: Hàm $f$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ý tưởng: Vẽ liên tiếp các tiếp tuyến của đồ thị $f$ tạo nên dãy $x_k$.

Điều kiện dừng: $f(x_k) \simeq 0$.

Thực hiện:

B1: Từ $x_0$ tùy ý trong $[a,b]$ vẽ tiếp tuyến đồ thị cắt $Ox$ tại $x_1$.

Nếu $f(x_1) \simeq 0$ thì $\overline{x} = x_1$ và DỪNG.

B2: Thực hiện lại B1 với $x_0 = x_1$.

Sai số: Người ta chứng minh được

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \qquad \text{với} \qquad 0 < m \leq |f'(x)|.$$

Nhận xét: Bài toán hội tụ khi $f'$ và $f''$ không đổi dấu trên $(a,b)$.

# 2.4. Phương pháp tiếp tuyến

Thuật toán Newton method:

1. Khai báo hàm $f(x)$ đồng thời kiểm tra sự liên tục và dấu của $f'(x)$, $f''(x)$.
2. Nhập $tol$, $a$ và $b$ đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Nhập $x_0$ với $a < x_0 < b$.

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

4. Gán $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$.
5. Nếu $|f(x_k)| < tol$, BREAK vòng lặp.
   Ngược lại gán $k = k + 1$.

(Đóng vòng lặp)

6. Đáp án $\overline{x} = x_k$.

Ví dụ 2.4. Tìm nghiệm của phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ trong khoảng $[1, 2]$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Đặt $f(x) = x^3 + x - 5$ và $f'(x) = 3x^2 + 1$. Hàm $f$ liên tục có $f(1) \cdot f(2) = (-3) \cdot 5 < 0$.

Chọn $x_0 = 1.3$.

Lần lượt thực hiện các bước sau

$(k = 1)$ $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 1.5476$, $f(x_1) = 0.2543$.

$$|f(x_1)| > 3 \cdot 10^{-3}$$

$(k = 2)$ $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1.5165$, $f(x_2) = -0.0045$.

$$|f(x_2)| > 3 \cdot 10^{-3}$$

$(k = 3)$ $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1.5159$, $f(x_3) = 0.0000$.

$$|f(x_3)| < 3 \cdot 10^{-3}$$

Kết luận $x = 1.5159$ là nghiệm của $f(x) = 0$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Bài tập: Thực hiện đến bước lặp thứ 3 trong việc giải các phương trình sau:

2.25. $x^3 - 2x - 10 = 0$ với $x \in [2, 3]$

2.26. $x^3 + x^2 + x = 1$ với $x \in [0, 1]$.

2.27. $e^x - 3x^2 = 0$ với $x \in [3, 5]$.

2.28. $x - \ln(x + 1) = 4$ với $x \in [5, 7]$.

Bài tập: Giải các phương trình sau với sai số $10^{-3}$:

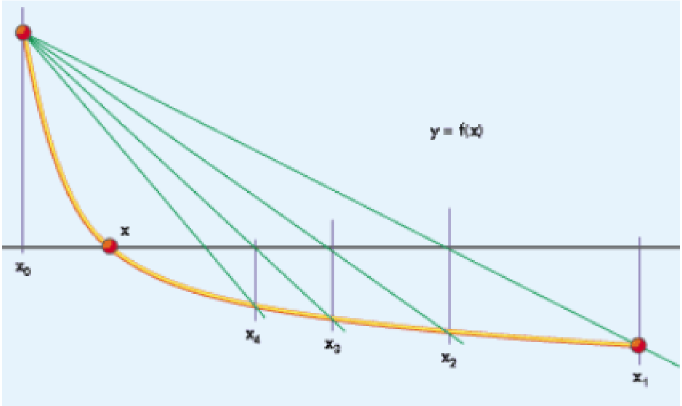
2.29. $x - \sin x = 0.25$.

2.30. $x^3 - x = 1000$.

2.31. $x \ln x - 1.2 = 0$.

2.32. $2^x - x - 4 = 0$

# 2.5. Phương pháp dây cung



# 2.5. Phương pháp dây cung

Secant method:

Mục tiêu: Tìm $\overline{x} \in [a, b]$ thỏa $f(\overline{x}) \simeq 0$.

Giả thiết: Hàm $f$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ý tưởng: Vẽ liên tiếp các dây cung của đồ thị $f$ tạo nên dãy $x_k$.

Điều kiện dừng: $f(x_k) \simeq 0$.

Thực hiện:

B1: Từ hai đầu mút $[a, b]$ vẽ cát tuyến đồ thị cắt $Ox$ tại $c$.

Nếu $f(c) \simeq 0$ thì $\overline{x} = c$ và DỪNG.

B2: Nếu $f(c) \not\simeq 0$ thì ta gọi $[a_1, b_1]$ là một trong hai đoạn $[a, c]$ hoặc $[b, c]$ mà ở đó $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

B3: Thực hiện lại B1 với $[a, b]$ được thay bởi $[a_1, b_1]$.

Sai số: Người ta chứng minh được

$$|x^* - x_n| \leq \left(\frac{M - m}{m}\right)^n (b - a) \qquad \text{với} \qquad 0 < m \leq |f'(x)| \leq M.$$

# 2.5. Phương pháp dây cung

Thuật toán Secant method:

1. Khai báo hàm $f(x)$ đồng thời kiểm tra sự liên tục của $f(x)$.
2. Nhập *tol*, $a$ và $b$ đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

3. Gán $x_k = a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$.
4. Nếu $f(x_k) \cdot f(a) < 0$ thì $b = x_k$. Ngược lại $a = x_k$.
5. Nếu $|f(x_k)| < tol$, BREAK vòng lặp.
   Ngược lại gán $k = k + 1$.

(Đóng vòng lặp)

6. Đáp án $\overline{x} = x_k$.

# 2.5. Phương pháp dây cung

Ví dụ 2.5. Tìm nghiệm của phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ trong khoảng $[1, 2]$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

Đặt $f(x) = x^3 + x - 5$. Hàm $f$ liên tục có $f(1) \cdot f(2) = (-3) \cdot 5 < 0$.

Lần lượt thực hiện các bước sau

$(k = 1)$

$$a = 1, b = 2, x_1 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a) = 1.375, f(x_1) = -1.0254.$$

$$|f(x_1)| > 3 \cdot 10^{-3}, f(x_1) \cdot f(a) > 0, a = x_1 = 1.375.$$

$(k = 2)$

$$a = 1.375, b = 2, x_2 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a) = 1.4814, f(x_2) = -0.2679.$$

$$|f(x_2)| > 3 \cdot 10^{-3}, f(x_2) \cdot f(a) > 0, a = x_2 = 1.4814.$$

...

$(k = 6)$

$$a = 1.5155, b = 2, x_6 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a) = 1.5159, f(x_2) = -0.0009.$$

$$|f(c)| < 3 \cdot 10^{-3}$$

Kết luận $x = 1.5159$ là nghiệm của $f(x) = 0$ với sai số $3 \cdot 10^{-3}$.

# 2.5. Phương pháp dây cung

Bài tập: Thực hiện đến bước lặp thứ 3 trong việc giải các phương trình sau:

2.33. $x^3 - 2x - 10 = 0$ với $x \in [2, 3]$

2.34. $x^3 + x^2 + x = 1$ với $x \in [0, 1]$.

2.35. $e^x - 3x^2 = 0$ với $x \in [3, 5]$.

2.36. $x - \ln(x + 1) = 4$ với $x \in [5, 7]$.

Bài tập: Giải các phương trình sau với sai số $10^{-3}$:

2.37. $x - \sin x = 0.25$.

2.38. $x^3 - x = 1000$.

2.39. $x \ln x - 1.2 = 0$.

2.40. $2^x - x - 4 = 0$

# Chương 3

# Giải hệ phương trình Đại số tuyến tính

# 3. Hệ phương trình Đại số tuyến tính

$$
\begin{bmatrix}
N & \Sigma w & \Sigma x & \Sigma y & \Sigma x^2 & \Sigma wy & \Sigma xy & \Sigma wx & \Sigma w^2 & \Sigma y^2 & \Sigma x^3 & \Sigma w^3 & \Sigma y^3 \\
\Sigma w & \Sigma w^2 & \Sigma wx & \Sigma wy & \Sigma wx^2 & \Sigma w^2y & \Sigma wxy & \Sigma w^2x & \Sigma w^3 & \Sigma wy^2 & \Sigma wx^3 & \Sigma w^4 & \Sigma wy^3 \\
\Sigma x & \Sigma wx & \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma x^3 & \Sigma wxy & \Sigma x^2y & \Sigma wx^2 & \Sigma w^2x & \Sigma xy^2 & \Sigma x^4 & \Sigma xw^3 & \Sigma xy^3 \\
\Sigma y & \Sigma wy & \Sigma xy & \Sigma y^2 & \Sigma x^2y & \Sigma wy^2 & \Sigma xy^2 & \Sigma wxy & \Sigma w^2y & \Sigma y^3 & \Sigma x^3y & \Sigma w^3y & \Sigma y^4 \\
\Sigma x^2 & \Sigma wx^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^2y & \Sigma x^4 & \Sigma wx^2y & \Sigma x^3y & \Sigma wx^3 & \Sigma w^2x^2 & \Sigma x^2y^2 & \Sigma x^5 & \Sigma w^3x^2 & \Sigma x^2y^3 \\
\Sigma wy & \Sigma w^2y & \Sigma wxy & \Sigma wy^2 & \Sigma wx^2y & \Sigma w^2y^2 & \Sigma wxy^2 & \Sigma w^2xy & \Sigma w^3y & \Sigma wy^3 & \Sigma wyx^3 & \Sigma w^4y & \Sigma wy^4 \\
\Sigma xy & \Sigma wxy & \Sigma x^2y & \Sigma xy^2 & \Sigma x^3y & \Sigma wxy^2 & \Sigma x^2y^2 & \Sigma wx^2y & \Sigma w^2xy & \Sigma xy^3 & \Sigma x^4y & \Sigma w^3xy & \Sigma xy^4 \\
\Sigma wx & \Sigma w^2x & \Sigma wx^2 & \Sigma wxy & \Sigma wx^3 & \Sigma w^2xy & \Sigma wx^2y & \Sigma w^2x^2 & \Sigma w^3x & \Sigma wxy^2 & \Sigma wx^4 & \Sigma w^4x & \Sigma wxy^3 \\
\Sigma w^2 & \Sigma w^3 & \Sigma w^2x & \Sigma w^2y & \Sigma w^2x^2 & \Sigma w^3y & \Sigma w^2xy & \Sigma w^3x & \Sigma w^4 & \Sigma w^2y^2 & \Sigma w^2x^3 & \Sigma w^5 & \Sigma w^2y^3 \\
\Sigma y^2 & \Sigma wy^2 & \Sigma xy^2 & \Sigma y^3 & \Sigma x^2y^2 & \Sigma wy^3 & \Sigma xy^3 & \Sigma wxy^2 & \Sigma w^2y^2 & \Sigma y^4 & \Sigma x^3y^2 & \Sigma w^3y^2 & \Sigma y^5 \\
\Sigma x^3 & \Sigma wx^3 & \Sigma x^4 & \Sigma x^3y & \Sigma x^5 & \Sigma wx^3y & \Sigma x^4y & \Sigma wx^4 & \Sigma w^2x^3 & \Sigma x^3y^2 & \Sigma x^6 & \Sigma w^3x^3 & \Sigma x^3y^3 \\
\Sigma w^3 & \Sigma w^4 & \Sigma w^3x & \Sigma w^3y & \Sigma w^3x^2 & \Sigma w^4y & \Sigma w^3xy & \Sigma w^4x & \Sigma w^5 & \Sigma w^3y^2 & \Sigma w^3x^3 & \Sigma w^6 & \Sigma w^3y^3 \\
\Sigma y^3 & \Sigma wy^3 & \Sigma xy^3 & \Sigma y^4 & \Sigma x^2y^3 & \Sigma wy^4 & \Sigma xy^4 & \Sigma wxy^3 & \Sigma w^2y^3 & \Sigma y^5 & \Sigma x^3y^3 & \Sigma w^3y^3 & \Sigma y^6
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \\ L \\ M \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \Sigma z \\ \Sigma wz \\ \Sigma xz \\ \Sigma yz \\ \Sigma x^2z \\ \Sigma wyz \\ \Sigma xyz \\ \Sigma wxz \\ \Sigma w^2z \\ \Sigma y^2z \\ \Sigma x^3z \\ \Sigma w^3z \\ \Sigma y^3z \end{bmatrix}
$$

# 3. Hệ phương trình Đại số tuyến tính

Nhiều vấn đề của khoa học kĩ thuật, kinh tế, môi trường quy về việc giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Các phương pháp giải hệ có thể phân làm hai nhóm chính: nhóm các phương pháp trực tiếp và nhóm các phương pháp lặp. Đối với các phương pháp trực tiếp thì số các phép toán có thể dự đoán trước được, còn đối với phương pháp lặp thì nói chung không thể dự đoán trước được số lần cần lặp để có được nghiệm xấp xỉ với sai số mong muốn. Các phương pháp lặp thường được sử dụng đối với hệ có số ẩn và số phương trình lớn, hệ gần suy biến (định thức gần 0).

Hai phương pháp phổ biến nhất của nhóm phương pháp trực tiếp là phương pháp Cramer (dùng định thức) và phương pháp Gause (khử biến) đã được trình bày trong môn học Đại số Tuyến Tính.

Phương pháp khử Gauss:

Mục tiêu: Tìm $X^*$ thỏa $AX = C$.

Giả thuyết: Ma trận $A$ có đường chéo khác 0.

Ý tưởng: Đưa ma trận $A$ về dạng tam giác và tìm nghiệm nhờ quá trình thế ngược.

Điều kiện dừng: Tìm được hết các thành phần của $X^*$.

Thực hiện:

B1: Biến đổi ma trận $A$ về dạng bậc thang (cùng lúc biến đổi $C$).

B2: Tìm các giá trị $X_i$ với $i$ từ $n$ đến 1.

Ví dụ 3.1. Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

# 3.1. Phương pháp khử Gauss

$$\overline{A} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - \frac{6}{5}d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_3 = -\dfrac{29}{5} \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{19}{5}; x_2 = -\frac{24}{5}; x_3 = -\frac{29}{5}$$

# 3.1. Phương pháp khử Gauss

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau

3.1. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

3.2. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

3.3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

3.4. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

# 3.2. Phương pháp phân tích

Phương pháp phân tích LU:

Mục tiêu: Tìm $X^*$ thỏa $AX = C$.

Giả thuyết: Ma trận $A$ có đường chéo khác 0.

Ý tưởng: Biến đổi $A$ thành tích $LU$ với $L$ là ma trận tam giác dưới (có đường chéo chính bằng 1) và $U$ là ma trận tam giác trên. Bài toán thành $LY = C, UX = Y$.

Điều kiện dừng: Tìm được hết các thành phần của $L$ và $U$.

Thực hiện:

B1: Biến đổi ma trận $A$ về dạng $LU$.

B2: Tìm giá trị $Y$ của bài toán $LY = C$.

B3: Tìm giá trị $X$ của bài toán $UX = Y$.

# 3.2. Phương pháp phân tích

Thuật toán phân tích LU:

1. Khai báo ma trận $A$ và vector $C$.
2. Xây dựng ma trận $L$ và $U$ như sau

   $U_{1j} = A_{1j}\ \forall 1 \leq j \leq n, \qquad L_{i1} = A_{i1}/U_{11}\ \forall 2 \leq j \leq n.$

   Với $2 \leq k \leq n-1$

   $$U_{k,j} = A_{k,j} - \sum_{l=1}^{k-1} L_{k,l}U_{l,j} \quad \forall k \leq j \leq n$$

   $$L_{i,k} = (A_{i,k} - \sum_{l=1}^{k-1} L_{i,l}U_{k,l})/U_{k,k} \quad \forall k+1 \leq i \leq n$$

   $$U_{n,n} = A_{n,n} - \sum_{l=1}^{n-1} L_{n,l}U_{l,n}$$
3. Tìm $Y$ thỏa $LY = C$.
4. Tìm $X$ thỏa $UX = Y$.

# 3.2. Phương pháp phân tích

Ví dụ 3.2. Phân tích ma trận sau thành dạng LU

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cdot & 1 & \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -2 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -2 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & 4 & -1 \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & 4 & -1 \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ & 4 & -1 \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau

3.5. $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 8 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = -3 \\ 2x_1 & & +2x_3 & = 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = -2 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 4 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 4 \\ -4x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = -2 \\ -4x_1 & -2x_2 & +8x_3 & +4x_4 & = 4 \\ 2x_1 & +x_2 & & +4x_4 & = 8 \end{cases}$

Phương pháp lặp:

Mục tiêu: Tìm $\overline{X}$ thỏa $AX \simeq C$.

Ý tưởng: Xây dựng dãy $X_{k+1} = BX_k + G$ tạo nên dãy $X_k$.

Điều kiện dừng: $AX_k - C \simeq 0$.

Thực hiện:

B1: Tìm $B = -A./(a_{11}a_{22}...a_{nn})^T + I_n$ và $G = C./(a_{11}a_{22}...a_{nn})^T$.

B2: Tìm $X_1 = BX_0 + G$ với $X_0$ tùy ý.

Nếu $AX_1 - C \simeq 0$ thì $\overline{X} = X_1$ và DỪNG.

B3: Thực hiện lại B2 với $X_0 = X_1$.

Sai số: $||X_k - X^*||_\infty \leq \dfrac{||B||_\infty}{1 - ||B||_\infty} ||X_k - X_{k-1}||_\infty$.

Nhận xét: Điều kiện hội tụ $||B||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{1 \leq j \leq n}^{n} |b_{ij}| < 1$.

# 3.3. Phương pháp lặp

Thuật toán Phương pháp lặp:

1. Khai báo $A$ và $C$.
2. Tính $B$ và $G$.
3. Nhập *tol* và chọn $X_0$ (thường chọn $X_0 = G$).

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

4. Gán $X_k = BX_{k-1} + G$
5. Nếu $|AX_k - C| < tol$, BREAK vòng lặp.
   Ngược lại gán $k = k + 1$.

(Đóng vòng lặp)

6. Đáp án $\overline{X} = X_k$

# 3.3. Phương pháp lặp

Ví dụ 3.3. Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa

$$\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ x + 10y + z = 12 \\ x + y + 20z = 22 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0 & -0,1 \\ -0,05 & -0,05 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 1,2 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

Đặt $x^{(0)} = g = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 1,2 \\ 1,1 \end{pmatrix}$. Xét dãy $\{x^{(n)}\}_{n=\overline{0,\infty}}$ được thiết lập như sau $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + g, \forall n \geq 0$.

Từ đây ta suy ra $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,940000 \\ 0,950000 \\ 0,970000 \end{pmatrix}; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,016000 \\ 1,009000 \\ 1,005500 \end{pmatrix}; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,997100 \\ 0,997850 \\ 0,998750 \end{pmatrix}; x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1,000680 \\ 1,000415 \\ 1,000253 \end{pmatrix}$

# 3.3. Phương pháp lặp

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau

3.9. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

3.10. $$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

3.11. $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

3.12. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

# 3.4. Phương pháp Seidel

Phương pháp Seidel:

Mục tiêu: Tìm $\overline{X}$ thỏa $AX \simeq C$.

ý tưởng: Xây dựng dãy $X_{k+1} = BX_{k+1/2} + G$ tạo nên dãy $X_k$.

Điều kiện dừng: $AX_k - C \simeq 0$.

Thực hiện:

B1: Tìm $B = -A./(a_{11}a_{22}...a_{nn})^T + I_n$ và $G = C./(a_{11}a_{22}...a_{nn})^T$.

B2: Tìm $X_1 = BX_{0,5} + G$ với $X_0$ tùy ý.

Nếu $AX_1 - C \simeq 0$ thì $\overline{X} = X_1$ và DỪNG.

B3: Thực hiện lại B2 với $X_0 = X_1$.

Sai số: $||X_k - X^*||_\infty \leq \dfrac{||U||_\infty}{1 - ||B||_\infty} ||X_k - X_{k-1}||_\infty$.

Nhận xét: Điều kiện hội tụ $||B||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{1 \leq j \leq n}^{n} |b_{ij}| < 1$.

# 3.4. Phương pháp Seidel

Thuật toán Phương pháp Seidel:

1. Khai báo $A$ và $C$.
2. Tính $B$ và $G$.
3. Nhập *tol* và chọn $X_0$ (thường chọn $X_0 = G$).

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

4. Gán $(X_k)_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{1j}(X_{k-1})_j + G_1$

   Gán $(X_k)_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(X_k)_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(X_{k-1})_j + G_j$ với $2 \leq i \leq n$.

5. Nếu $|AX_k - C| < tol$ phá vòng lặp.

   Ngược lại gán $k = k + 1$.

(Đóng vòng lặp)

6. Đáp án $\overline{X} = X_k$

Ví dụ 3.4. Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa

$$\begin{cases} x + 0,1y + 0,1z = 1,2 \\ 0,1x + y + 0,1z = 1,2 \\ 0,1x + 0,1y + z = 1,2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

Xét dãy $\{x^{(n)}\}_{n=\overline{0,\infty}}$ được thiết lập như sau

$$\begin{cases} x_{n+1} = -0,1y_n - 0,1z_n + 1,2 \\ y_{n+1} = -0,1x_{n+1} - 0,1z_n + 1,2 \\ z_{n+1} = -0,1x_{n+1} - 0,1y_{n+1} + 1,2 \end{cases} \quad \text{trong đó } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta suy ra $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,200000 \\ 1,080000 \\ 0,972000 \end{pmatrix}; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,994800 \\ 1,003320 \\ 1,000188 \end{pmatrix}; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,999649 \\ 1,000016 \\ 1,000033 \end{pmatrix}; x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,999995 \\ 0,999997 \\ 1,000001 \end{pmatrix}$

# 3.4. Phương pháp Seidel

Ta đánh giá sai số của $x^{(4)}$. Ta có

$$\left\|x^{(4)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\|U\|_\infty}{1-\|B\|_\infty}\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = \frac{0,2}{1-0,2}.0,000301 = 0,000075$$

trong đó $U = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau

3.13. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

3.14. $$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

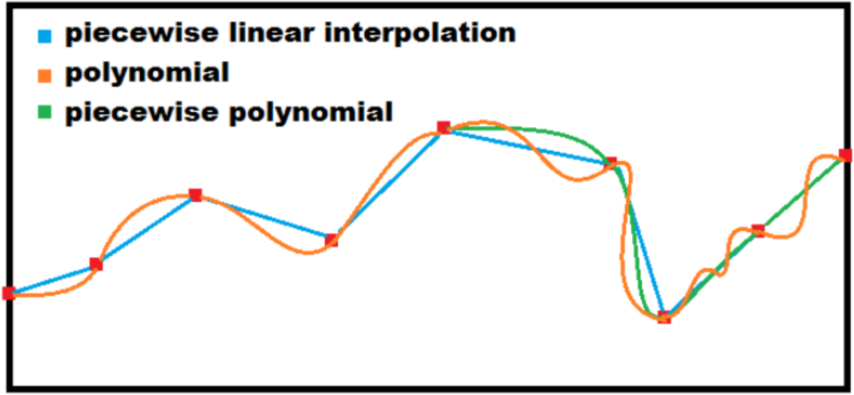
3.15. $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

3.16. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

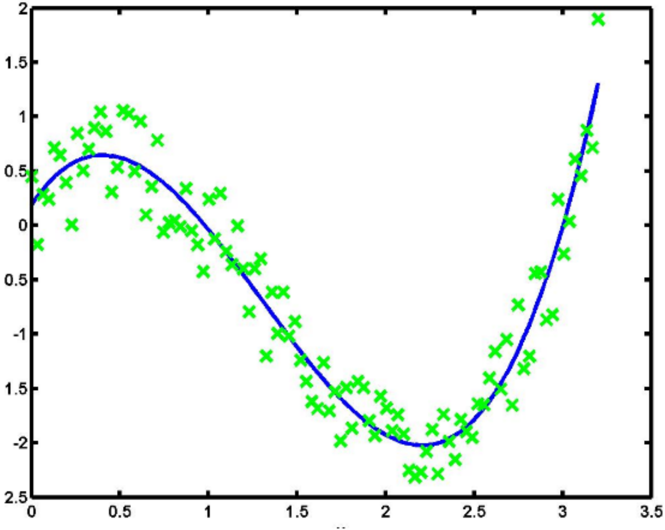
# Chương 4

# Xấp xỉ
# và
# nội suy

# 4. Xấp xỉ và nội suy



# 4. Xấp xỉ và nội suy



# 4. Xấp xỉ và nội suy

Trong toán học ta thường gặp các bài toán liên quan đến khảo sát và tính giá trị các hàm $y = f(x)$ nào đó. Tuy nhiên trong thực tế có trường hợp ta không xác định được biểu thức của hàm $f(x)$ mà chỉ nhận được các giá trị rời rạc: $y_0, y_1, ..., y_n$ tại các điểm tương ứng $x_0, x_1, ..., x_n$. Vấn đề đặt ra là làm sao để xác định giá trị của hàm tại các điểm còn lại? Thuật toán tìm giá trị $y_i$ như vậy được gọi là phép nội suy.

Phép nội suy có thể xem là phép "chèn" hay phép liên tục hóa các giá trị của hàm số cho dưới dạng bảng tại các giá trị của biến số không trùng với các mốc. Việc liên tục hóa là cơ sở cho việc thực hiện các phép tính vi tích phân như đạo hàm và tích phân. Vì vậy phép nội suy là nền tảng của việc xây dựng đạo hàm số và tích phân số.

Hàm nội suy cũng được áp dụng trong trường hợp đã xác định được biểu thức của $f(x)$ nhưng nó quá phức tạp trong việc khảo sát, tính toán. Khi đó ta tìm hàm nội suy xấp xỉ với nó để đơn giản phân tích và khảo sát hơn.

# 4.1. Đa thức tổng quát

Mục tiêu: Từ một bảng giá trị, ta xây dựng một đa thức đi qua tất cả các điểm trong bảng dữ liệu. Bậc của đa thức bằng tổng số các điểm trừ đi 1.

Giả sử $f(x)$ nhận giá trị $y_i$ tại các điểm tương ứng $x_i$ $(0 \leq i \leq n)$ , khi đó đa thức nội suy tổng quát có dạng

$$\overline{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (1)$$

Với yêu cầu $\overline{f}(x_i) = y_i$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_0^n, \\ y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n, \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_{n-1} x_2^{n-1} + a_n x_2^n, \\ \qquad\qquad ... \\ y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n. \end{cases}$$

# 4.1. Đa thức tổng quát

Hệ trên được viết lại dưới dạng $XA = Y$ với

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ & & \dots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n, \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots, \\ y_n \end{bmatrix}$$

trong đó $X$ và $Y$ là ma trận và vector đã biết giá trị còn $A$ là vector chứa các tham số cần tìm.

Giải hệ trên ta thu được $A = X^{-1}Y$. Sau đó thay các giá trị $a_i$ vừa tìm được vào công thức (1) ta được đa thức xấp xỉ cần tìm.

Để nội suy một giá trị tương ứng với biến $\tilde{x}$ với $x_1 < \tilde{x} < x_n$, ta chỉ việc tính giá trị $\overline{f}(\tilde{x})$.

# 4.1. Đa thức tổng quát

Ví dụ 4.1. Cho dữ liệu của hàm $f(x)$ như sau

| x | 1 | 1.4 | 1.7 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 4.2 | 3.7 | 3.2 |

Hãy nội suy giá trị của $f(x)$ tại $x = 1.5$ sử dụng đa thức nội suy bậc nhất, bậc hai và bậc ba.

Để xây dựng đa thức nội suy bậc nhất ta chọn bộ dữ liệu $(x_1, y_1) = (1.4, 4.2)$ và $(x_2, y_2) = (1.7, 3.7)$.

Đặt

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 \\ 1 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4.2 \\ 3.7 \end{bmatrix}$$

Kết quả là $A = X^{-1}Y = [6.5333, -1.6667]^T$

Vậy $\overline{f_1}(1.5) = 6.5333 + (-1.6667)1.5 = 4.0333$

# 4.1. Đa thức tổng quát

Để xây dựng đa thức nội suy bậc hai ta chọn 3 dữ liệu cuối. Đặt

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & 1.4^2 \\ 1 & 1.7 & 1.7^2 \\ 1 & 2.0 & 2.0^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4.2 \\ 3.7 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

Kết quả là $A = X^{-1}Y = [6.5333, -1.6667, 0]^T$

Vậy $\overline{f_2}(1.5) = 6.5333 + (-1.6667)1.5 + 0 \cdot 1.5^2 = 4.0333$

Để xây dựng đa thức nội suy bậc ba ta chọn hết bộ dữ liệu. Đặt

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 1.4 & 1.4^2 & 1.4^3 \\ 1 & 1.7 & 1.7^2 & 1.7^3 \\ 1 & 2.0 & 2.0^2 & 2.0^3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 4.2 \\ 3.7 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

Kết quả là $A = X^{-1}Y = [-25.2, 55.5333, -34, 6.6667]^T$

Vậy

$$\overline{f_3}(1.5) = (-25.2) + 55.5333 \cdot 1.5 + (-34) \cdot 1.5^2 + 6.6667 \cdot 1.5^3 = 4.1$$

# 4.1. Đa thức tổng quát

Bài tập: Cho bảng dữ liệu của hàm $f(x)$ như sau

| x | 2 | 4 | 7 | 8.5 |
|---|---|---|---|---|
| y | 7.2 | 4.2 | 5.8 | 4.9 |

4.1. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(5.5)$ bằng đa thức bậc 1.
4.2. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(8)$ bằng đa thức bậc 1.
4.3. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(2.5)$ bằng đa thức bậc 1.
4.4. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(1.5)$ bằng đa thức bậc 1.
4.5. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(9.5)$ bằng đa thức bậc 1.
4.6. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(6)$ bằng đa thức bậc 2.
4.7. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(3)$ bằng đa thức bậc 2.
4.8. Tìm giá trị xấp xỉ của $f(6.5)$ bằng đa thức bậc 3.

# 4.2. Đa thức Lagrange

Mục tiêu: Từ một bảng giá trị, ta xây dựng một đa thức đi qua tất cả các điểm trong bảng dữ liệu.

Giả sử $f(x)$ nhận giá trị $y_i$ tại các điểm tương ứng $x_i$ $(0 \leq i \leq n)$ , khi đó đa thức nội suy Lagrange của $f(x)$ là đa thức bậc $n$ và được xác định theo công thức sau:

$$\bar{f}(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{i,n}(x) y_i$$

trong đó $L_{i,n}(x)$ là những đa thức bậc $n$ theo $x$ có dạng

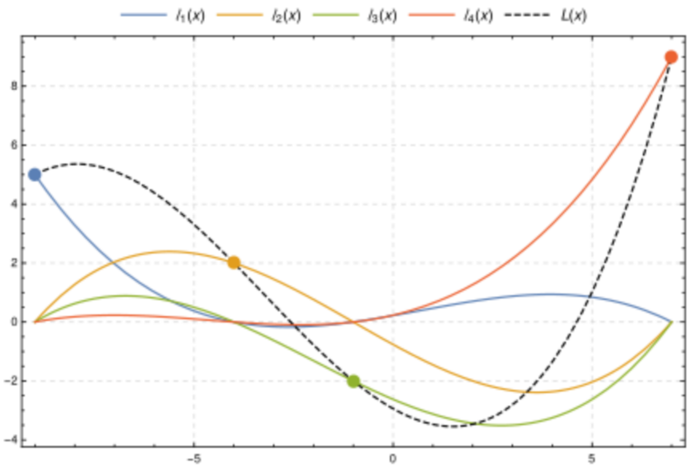
$$L_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Dễ thấy $L_{i,n}(x)$ có tính chất sau

$$L_{i,n}(x_i) = 1 \quad \text{và} \quad L_{i,n}(x_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Điều này dẫn đến $\bar{f}(x_i) = L_n(x_i) = y_i$ với mọi $0 \leq i \leq n$.

# 4.2. Đa thức Lagrange



# 4.2. Đa thức Lagrange

Ví dụ 4.2. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange cho bộ dữ liệu sau

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 4 |
| y | 1 | 0 | 2 | 1 |

Theo công thức nội suy Lagrange, ta có

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0 L_{0,3}(x) + y_1 L_{1,3}(x) + y_2 L_{2,3}(x) + y_3 L_{3,3}(x) \\
&= 1.\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + 0.\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} \\
&+ 2.\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} + 1.\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{1}{12}\left(-7x^3 + 39x^2 - 44x + 12\right).
\end{aligned}
$$

Bài tập: Cho bảng dữ liệu của hàm $f(x)$ như sau

| x | 2 | 4 | 7 | 8.5 | 9.5 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 7.2 | 4.2 | 5.8 | 4.9 | 4.0 | 5.5 |

4.9. Xây dựng đa thức Lagrange với 2 dữ liệu đầu và tìm $\overline{f}(3)$.
4.10. Xây dựng đa thức Lagrange với 2 dữ liệu giữa và tìm $\overline{f}(8)$.
4.11. Xây dựng đa thức Lagrange với 2 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(10.5)$.
4.12. Xây dựng đa thức Lagrange với 3 dữ liệu đầu và tìm $\overline{f}(5)$.
4.13. Xây dựng đa thức Lagrange với 3 dữ liệu kế đầu và tìm $\overline{f}(5)$.
4.14. Xây dựng đa thức Lagrange với 3 dữ liệu kế cuối và tìm $\overline{f}(9)$.
4.15. Xây dựng đa thức Lagrange với 3 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(9)$.
4.16. Xây dựng đa thức Lagrange với 4 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(8)$.

# 4.2. Đa thức Newton

Mục tiêu: Từ một bảng giá trị, ta xây dựng một đa thức đi qua tất cả các điểm trong bảng dữ liệu.

Giả sử $f(x)$ nhận giá trị $y_i$ tại các điểm tương ứng $x_i$ $(0 \leq i \leq n)$, khi đó ta định nghĩa các tỷ sai phân như sau:

Tỷ sai phân cấp 1 tại mốc $x_i, x_{i+1}$ là

$$f[x_i; x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Tỷ sai phân cấp 2 tại mốc $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ là

$$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}; x_{i+2}] - f[x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Tỷ sai phân cấp $n$ tại mốc $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}$ là

$$f[x_i; x_{i+1}; ...; x_n] = \frac{f[x_{i+1}; ...; x_{i+n}] - f[x_i; ...; x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}.$$

Ghi chú: các tỷ sai phân có tính đối xứng: $f[x_i; x_j] = f[x_j; x_i]$.

# 4.2. Đa thức Newton

Ví dụ 4.3. Tìm tỷ sai phân của bảng giá trị sau

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 5 | 22 | 57 |

Ta lập bảng tỷ sai phân như sau

| x | y | TSP 1 | TSP 2 | TSP 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| | | 5 | | |
| 2 | 5 | | 6 | |
| | | 17 | | 1 |
| 3 | 22 | | 9 | |
| | | 35 | | |
| 4 | 57 | | | |

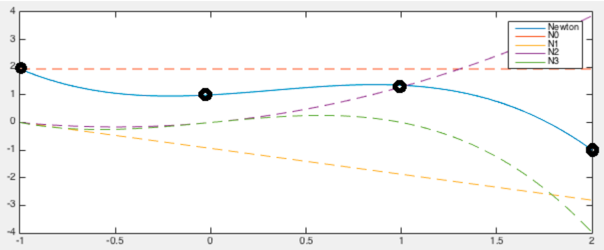
Khi đó, đa thức nội suy Newton được định nghĩa như sau:

Đa thức Newton tiến xuất phát từ $x_0$.

$$N_n(x) = y_0 + (x - x_0)f[x_0; x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0; x_1; x_2] + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_i; x_{i+1}; ...; x_n].$$

Đa thức Newton lùi xuất phát từ $x_n$.

$$M_n(x) = y_n + (x - x_n)f[x_n; x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})f[x_n; x_{n-1}; x_{n-2}] + ... + (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)f[x_n; x_{n-1}; ...; x_0].$$



Ví dụ 4.4. Cho bảng giá trị sau

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0 | 5 | 22 | 57 |

Tìm giá trị $y$ tại $x = 1.5, x = 2.5, x = 3.5$ bởi đa thức nội suy Newton.

Đa thức Newton tiến xuất phát từ $x_0 = 1$.

$$N_3(x) = 0 + 5(x-1) + 6(x-1)(x-2) + 1(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$\Rightarrow N_3(1.5) = 1.375; N_3(2.5) = 11.625; N_3(3.5) = 36.875$$

Đa thức Newton lùi xuất phát từ $x_3 = 4$.

$$M_3(x) = 57 + 35(x-4) + 9(x-4)(x-3) + 1(x-4)(x-3)(x-2).$$

$$\Rightarrow M_3(1.5) = 1.375; M_3(2.5) = 11.625; M_3(3.5) = 36.875$$

Cả $N_3(x)$ và $M_3(x)$ đều là đa thức $x^3 - 2x + 1$

# 4.2. Đa thức Newton

Bài tập: Cho bảng dữ liệu của hàm $f(x)$ như sau

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 4 | 7 | 8.5 | 9.5 | 11 |
| y | 7.2 | 4.2 | 5.8 | 4.9 | 4.0 | 5.5 |

4.17. Xây dựng đa thức Newton với 2 dữ liệu đầu và tìm $\overline{f}(3)$.
4.18. Xây dựng đa thức Newton với 2 dữ liệu giữa và tìm $\overline{f}(8)$.
4.19. Xây dựng đa thức Newton với 2 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(10.5)$.
4.20. Xây dựng đa thức Newton với 3 dữ liệu đầu và tìm $\overline{f}(5)$.
4.21. Xây dựng đa thức Newton với 3 dữ liệu kế đầu và tìm $\overline{f}(5)$.
4.22. Xây dựng đa thức Newton với 3 dữ liệu kế cuối và tìm $\overline{f}(9)$.
4.23. Xây dựng đa thức Newton với 3 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(9)$.
4.24. Xây dựng đa thức Newton với 4 dữ liệu cuối và tìm $\overline{f}(8)$.

# 4.3. Đa thức Spline

Việc xây dựng một đa thức đi qua các điểm nội suy trong trường hợp bộ dữ liệu lớn là một công việc rất khó khuan và khó ứng dụng. Một trong những cách khắc phục là trên từng đoạn liên tiếp của các cặp điểm nút nội suy ta nối chúng bằng những đường cong đơn giản và đơn giản nhất là đường thẳng. Tuy nhiên khi đó tại các điểm nút hàm sẽ mất tính khả vi.

Do đó người ta cố gắng xây dựng một đường cong bằng cách nối các đường cong nhỏ lại với nhau sao cho vẫn bảo toàn tính khả vi của hàm số của hàm. Đường cong như vậy gọi là đường spline (đường ghép trơn). Các đoạn cong nhỏ thông thường là các đa thức. Chúng ta sẽ xét hai loại đường spline phổ biến nhất là đường spline bậc hai và spline bậc ba.

# 4.3. Đa thức Spline

Nội suy Spline bậc ba:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và một phép phân hoạch $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Một Spline bậc ba $\overline{f}(x)$ nội suy hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ là hàm thỏa các điều kiện sau:

1. Hàm số $\overline{f}(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên đoạn $[a, b]$.
2. Trên mỗi đoạn con $[x_i, x_{i-1}]$, hàm số $\overline{f}(x)$ là một đa thức bậc ba.
3. $\overline{f}(x_i) = f(x_i), \forall 0 \leq i \leq n$.
4. Một trong hai điều kiện sau được thỏa
   (i) $\overline{f}''(a) = \overline{f}''(b) = 0$ (điều kiện biên tự nhiên).
   (ii) $\overline{f}'(a) = f'(a), \overline{f}'(b) = f'(b)$. (điều kiện biên ràng buộc).

Một spline bậc ba thỏa điều kiện biên tự nhiên gọi là Spline tự nhiên. Còn nếu thỏa điều kiện biên ràng buộc thì gọi là spline ràng buộc.

# 4.3. Đa thức Spline

Thuật toán Tìm Spline tự nhiên bậc ba:

1. Tính độ dài khoảng phân hoạch $h_i = x_{i+1} - x_i, 0 \leq i \leq n-1$.
2. Giải hệ phương trình sau để tìm $m_i, 0 \leq i \leq n$.
$$\begin{cases} m_i \dfrac{h_i}{6} + m_{i+1} \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} + m_{i+2} \dfrac{h_{i+1}}{6} = \dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \\ m_0 = m_n = 0 \end{cases}$$
3. Tính $M_i, N_i$ theo công thức
$$\begin{cases} M_i = y_i - m_i \dfrac{h_i^2}{6}, 0 \leq i \leq n-1 \\ N_i = y_{i+1} - m_{i+1} \dfrac{h_i^2}{6}, 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$
4. Xây dựng $\bar{f}(x)$ theo công thức
$$\bar{f}(x) = m_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + N_i \frac{x - x_i}{h_i}$$
với $x \in [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq n-1$

Ví dụ 4.5. Tìm một spline bậc ba tự nhiên nội suy hàm số $y = 3^x$ trong đoạn $[0, 4]$ với các mốc nội suy lần lượt là $0, 1, 3, 4$.

Dễ thấy $h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 1$ và $y_0 = 1, y_1 = 3, y_2 = 27, y_3 = 81$.

Ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} m_0 = 0, m_3 = 0, \\ \dfrac{1}{6}m_0 + \dfrac{1+2}{3}m_1 + \dfrac{2}{6}m_2 = \dfrac{27-3}{2} - \dfrac{3-1}{1} = 10, \\ \dfrac{2}{6}m_1 + \dfrac{2+1}{3}m_2 + \dfrac{1}{6}m_3 = \dfrac{81-27}{1} - \dfrac{27-3}{2} = 42. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0 = 0, \quad m_3 = 0, \\ m_1 = \dfrac{108}{35}, \quad m_2 = \dfrac{1452}{35}. \end{cases}$$

# 4.3. Đa thức Spline

Với $i = 0$ ta có $M_0 = y_0 - m_0\dfrac{h_0^2}{6} = 1, N_0 = y_1 - m_1\dfrac{h_0^2}{6} = \dfrac{87}{35}$.

$$\Rightarrow \bar{f}_0(x) = m_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_0} + m_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_0} + M_0\frac{x_1-x}{h_0} + N_0\frac{x-x_0}{h_0}$$
$$= \frac{18}{35}x^3 + (1-x) + \frac{87}{35}x = \frac{18}{35}x^3 + \frac{52}{35}x + 1.$$

Với $i = 1$ ta có $M_1 = y_1 - m_1\dfrac{h_1^2}{6} = \dfrac{33}{35}, N_1 = y_2 - m_2\dfrac{h_1^2}{6} = -\dfrac{23}{35}$.

$$\Rightarrow \bar{f}_1(x) = m_2\frac{(x-x_1)^3}{6h_1} + m_1\frac{(x_2-x)^3}{6h_1} + M_1\frac{x_2-x}{h_1} + N_1\frac{x-x_1}{h_1}$$
$$= \frac{121}{35}(x-1)^3 + \frac{9}{35}(3-x)^3 + \frac{33}{70}(3-x) - \frac{23}{70}(x-1).$$

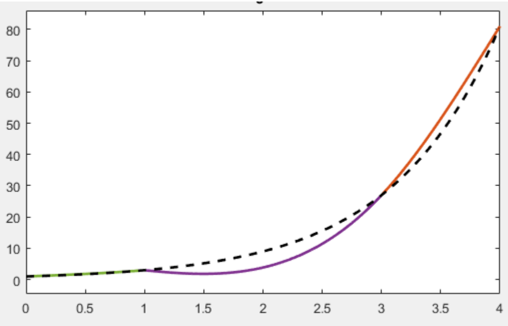
Với $i = 2$ ta có $M_2 = y_2 - m_2\dfrac{h_2^2}{6} = \dfrac{703}{35}, N_2 = y_3 - m_3\dfrac{h_2^2}{6} = 81$.

$$\Rightarrow \bar{f}_2(x) = m_3\frac{(x-x_2)^3}{6h_2} + m_2\frac{(x_3-x)^3}{6h_2} + M_2\frac{x_3-x}{h_2} + N_2\frac{x-x_2}{h_2}$$
$$= \frac{242}{35}(4-x)^3 + \frac{703}{35}(4-x) + 81(x-3).$$

# 4.3. Đa thức Spline

Như vậy spline bậc ba cần tìm có dạng

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{18}{35}x^3 + \frac{52}{35}x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{121}{35}(x-1)^3 + \frac{9}{35}(3-x)^3 + \frac{33}{70}(3-x) - \frac{23}{70}(x-1) & 1 \le x \le 3 \\ \frac{242}{35}(4-x)^3 + \frac{703}{35}(4-x) + 81(x-3) & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$



Bài tập: Tìm Spline tự nhiên bậc ba của các bộ dữ liệu sau

4.25.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 4 | 7 | 8 |
| y | 2.2 | 1.8 | 2.7 | 3.1 |

4.26.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 5 | 7 | 9 |
| y | 3 | 5 | 4 | 2 |

4.27.

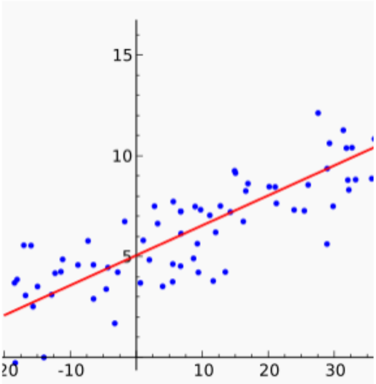
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 5 | 7 | 8 | 10 |
| y | 1.5 | 1.9 | 2.5 | 2 |

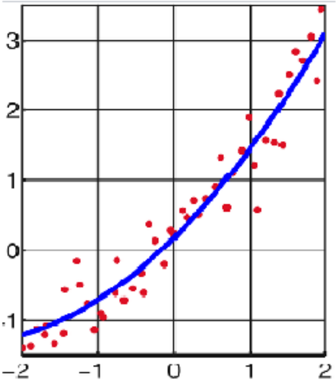
4.28.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -0.5 | 0.5 | 2 |
| y | 1.5 | 0.8 | 1.0 | 1.9 |

# 4.4. Bình phương bé nhất

Mục tiêu: Từ một bộ dữ liệu, ta xây dựng một đường cong (có dáng điệu biết trước) đi "gần" tất cả các điểm trong bảng dữ liệu.



## 4.4. Bình phương bé nhất

Giả sử $f(x)$ nhận giá trị $y_i$ tại các điểm tương ứng $x_i$ $(0 \leq i \leq n)$. Ta xây dựng hàm xấp xỉ $\overline{f}(x)$ sao cho sai số $S = \sum_{i=1}^{n} (\overline{f}(x_i) - y_i)^2$ là nhỏ nhất.

Hàm xấp xỉ $\overline{f}(x)$ thường được chọn trước như sau:

$$\overline{f_1}(x) = ax + b. \qquad \overline{f_2}(x) = ae^{bx}. \qquad \overline{f_3}(x) = ax^b.$$

$$\overline{f_4}(x) = a + bx + cx^2 \qquad \overline{f_5}(x) = a + b\sin x + c\cos x.$$

Như vậy hàm $\overline{f}(x)$ phụ thuộc các tham số $a, b, c$. Các tham số này là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0, \end{cases}$$

Trường hợp $\overline{f}(x) = \overline{f_1}(x) = ax + b$. Khi đó $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$.

Các tham số $a$ và $b$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb & = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

Người ta chứng minh được hệ trên luôn có nghiệm duy nhất.

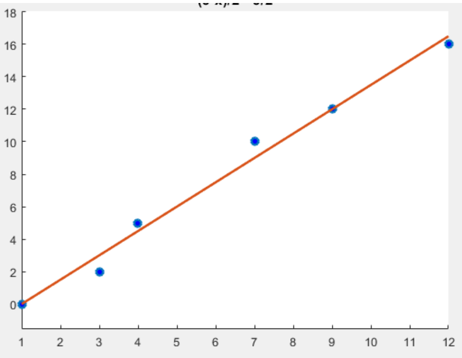
Ví dụ 4.6. Cho bảng số liệu thực nghiệm sau biết $y = ax + b$

| $x$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 5 | 10 | 12 | 16 |

Hãy tính $a, b$ bằng phương pháp bình phương bé nhất và tìm $y(10)$.
Ta lập bảng

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 9 | 6 |
| 4 | 5 | 16 | 20 |
| 7 | 10 | 49 | 70 |
| 9 | 12 | 81 | 108 |
| 12 | 16 | 144 | 192 |
| $\sum = 36$ | 45 | 300 | 396 |

# 4.4. Bình phương bé nhất



# 4.4. Bình phương bé nhất

Từ hệ bảng trên ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 300a + 36b = 396, \\ 36a + 6b = 45 \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$\begin{cases} a = 1.5, \\ b = -1.5 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = 1.5x - 1.5$.
Khi đó ta nhận được $y(10) = 1.5 \cdot 10 - 1.5 = 1.35$.

Bài tập: Tìm đường thẳng xấp xỉ bảng dữ liệu sau

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 4 | 7 | 8.5 | 9.5 | 11 |
| y | 2.2 | 4.2 | 6.8 | 8.1 | 9.7 | 10.5 |

# 4.4. Bình phương bé nhất

Trường hợp $y = \overline{f_2}(x) = ae^{bx}$. Lấy logarit hai vế ta thu được

$$\ln y = \ln(ae^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx = bx + \ln a. \qquad (2)$$

Đặt $Y = \ln y$, $A = b$ và $B = \ln a$ thì bài toán $y = ae^{bx}$ trở thành $Y = Ax + B$. Sử dụng phương pháp trên để tìm $A$ và $B$ sau đó xác định $a = e^B$ và $b = A$. Nghĩa là

Cho $x, y$ có quan hệ $y = ae^{bx}$ với bảng số liệu:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |

Ta lập bảng mới với quan hệ $Y = Ax + B$

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y = \ln y$ | $\ln y_1$ | $\ln y_2$ | $\dots$ | $\ln y_n$ |

# 4.4. Bình phương bé nhất

Ví dụ 4.7. Cho bảng số liệu thực nghiệm sau biết $y = ae^{bx}$

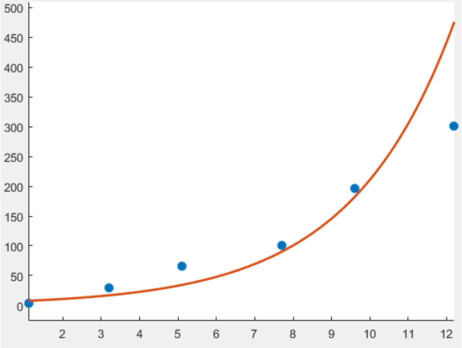
| $x$ | $1,1$ | $3,2$ | $5,1$ | $7,7$ | $9,6$ | $12,2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3,1$ | $29,9$ | $65,7$ | $100,4$ | $195,7$ | $300,4$ |

Hãy tính $a, b$ bằng phương pháp bình phương bé nhất và tìm $y(10.2)$.

Ta lập bảng

| $x$ | $y$ | $Y = \ln y$ | $x^2$ | $xY$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 3,1 | 1,1314 | 1,21 | 1,2445 |
| 3,2 | 29,9 | 3,3978 | 10,24 | 10,8730 |
| 5,1 | 65,7 | 4,1851 | 26,01 | 21,3440 |
| 7,7 | 100,4 | 4,6092 | 59,29 | 35,4908 |
| 9,6 | 195,7 | 5,2766 | 92,16 | 50,6554 |
| 12,2 | 300,4 | 5,7051 | 148,84 | 69,6022 |
| $\sum = 38,9$ | | 24,3052 | 337,75 | 189,2099 |

# 4.4. Bình phương bé nhất



# 4.4. Bình phương bé nhất

Từ hệ bảng trên ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 337.75A + 38.9B = 189.2099, \\ 38.9A + 6B = 24.3052 \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$\begin{cases} A = 0.3697, \\ B = 1.6538 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0.3697, \\ a = 5.2268 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = 5.2268e^{0.3697x}$.
Khi đó ta nhận được $y(10.2) = 5.2268e^{0.3697 \cdot 10.2} = 226.6569$.

Bài tập: Tìm đường cong $y = ae^{bx}$ xấp xỉ bảng dữ liệu sau

| x | 2 | 4 | 7 | 8.5 | 9.5 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2.2 | 2.5 | 2.7 | 3.1 | 3.2 | 3.5 |