PHƯƠNG PHÁP TÍNH 2:
VI PHÂN và TÍCH PHÂN

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên
vdhuycuong@gmail.com

Giới thiệu môn học

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

Nội dung môn học

- Tính xấp xỉ giá trị tích phân.
- Giải gần đúng phương trình vi phân.

Tài liệu môn học

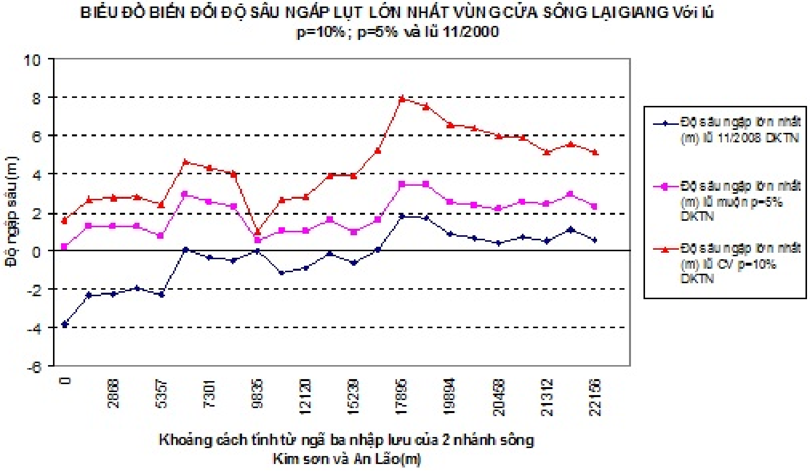
- Giáo trình Phương pháp tính.
- Giáo trình Giải tích số.

Mục lục

Chương 1

Đạo hàm số

1. Đạo hàm số


BIỂU ĐỒ BIẾN ĐỔI ĐỘ SÂU NGẬP LỤT LỚN NHẤT VÙNG CỬA SÔNG LẠI GIANG Với lũ
p=10%; p=5% và lũ 11/2000
Độ ngập sâu (m)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
2868
5357
7301
9835
12120
15239
17895
19894
20458
21312
22156
Khoảng cách tính từ ngã ba nhập lưu của 2 nhánh sông
Kim sơn và An Lão(m)
Độ sâu ngập lớn nhất (m) lũ 11/2008 DKTN
Độ sâu ngập lớn nhất (m) lũ muộn p=5% DKTN
Độ sâu ngập lớn nhất (m) lũ CV p=10% DKTN

1. Đạo hàm số

Năm / Độ tuổi	**1950**	**1970**	**1997**	**2005**	**2010**	**2014**	**Dự báo 2025**
Dưới 15 tuổi (%)	35,4	23,9	15,3	13,9	13,3	12,9	11,7
Từ 15 – 64 tuổi	59,6	69,0	69,0	66,9	63,8	60,8	60,1
Trên 65 tuổi (%)	5,0	7,1	15,7	19,2	22,9	26,3	28,2
Số dân (triệu người)	83,0	104,0	126,0	127,7	127,3	126,6	117,0

1. Đạo hàm số

Trong thực tế, các đại lượng cần nghiên cứu chỉ được biểu diễn dưới dạng bảng số liệu chứ không thể có dạng hàm số liên tục. Ví dụ như ta chỉ có thể đo độ sâu một vài điểm trên lòng sông, không thể đo hết cả lòng sông. Hoặc ta chỉ thống kê dân số vài nam một lần, không thể mỗi ngày một thống kê được. Do không có dạng hàm số liên tục nên việc tìm tốc độ biến thiên (đạo hàm) của các đại lượng này là cực kì phức tạp.

Để tính đạo hàm của các đại lượng rời rạc này. Cách đơn giản nhất là sử dụng sai phân, một ước lượng gần đúng của đạo hàm khi ta cho biến phụ thuộc thay đổi một đoạn nhỏ. Hơn nữa, người ta sử dụng một công cụ mạnh của giải tích là phép khai triển Taylor để đánh giá sai số của đạo hàm xấp xỉ này.

Việc tính đạo hàm số là bài toán quan trọng, đặt nền móng cho các nội dung tích phân số, giải phương trình vi phân ...

1.1. Công thức sai phân

Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$. Khi đó đạo hàm của $f(x)$ tại $x_0 \in (a, b)$ được định nghĩa bởi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Để tính đạo hàm gần đúng, ta thay giới hạn $h \to 0$ bởi giá trị h nhỏ. Kết quả là ta có công thức sai phân sau

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân tiến và sai phân lùi

$$\overline{f'_{SPT}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \overline{f'_{SPL}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{2}$$

Quan hệ giữa đạo hàm và sai phân là

$$f'(x_0) = \overline{f'_{SP}}(x_0) - \frac{h}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_0 + h) \tag{3}$$

1.1. Công thức sai phân

Ví dụ 1.1. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$$f'(x) = e^x - 1, f'(1) = e - 1 = 1,7183.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân tiến và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{SPT}}(1) \simeq \frac{f(1,05) - f(1)}{0,05} = 1,7874 \,,$$

$$\delta\overline{f'_{SPT}}(1) = \left|\frac{\overline{f'}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0402.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân lùi và sai só tương đối:

$$\overline{f'_{SPL}}(1) \simeq \frac{f(1) - f(0,95)}{0,05} = 1,6514,$$

$$\delta\overline{f'_{SPL}}(1) = \left|\frac{\tilde{f'}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0389.$$

1.2. Công thức ba điểm

Sử dụng kết quả về đa thức nội suy, người ta đưa ra được công thức

Công thức ba điểm cuối:

$$\overline{f'_{3DC}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\Big) \tag{4}$$

Công thức ba điểm giữa:

$$\overline{f'_{3DG}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-f(x_0-h) + f(x_0+h)\Big) \tag{5}$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức ba điểm và sai số tương đối:

$$f'(x_0) = \overline{f'_{3DC}}(x_0) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \qquad f'(x_0) = \overline{f'_{3DG}}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\eta) \tag{6}$$

với $\xi \in (x_0, x_0+2h)$ và $\eta \in (x_0-h, x_0+h)$

1.2. Công thức ba điểm

Ví dụ 1.2. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$$f'(x) = e^x - 1, f'(1) = e - 1 = 1,7183.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT ba điểm cuối và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{3DC}}(1) \simeq \frac{-3f(1) + 4f(1,05) - f(1,1)}{2 \cdot 0,05} = 1,7159\ ,$$

$$\delta\overline{f'_{3DC}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{3DC}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0014.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT ba điểm giữa và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{3DG}}(1) \simeq \frac{-f(0,95) + f(1,05)}{2 \cdot 0,05} = 1,7194,$$

$$\delta\overline{f'_{3DG}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{3DG}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0007.$$

1.3. Công thức nam điểm

Sử dụng kết quả về đa thức nội suy, người ta đưa ra được công thức

Công thức nam điểm cuối:

$$\overline{f'_{5DC}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h \tag{7}$$

Công thức nam điểm giữa:

$$\overline{f'_{5DG}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\Big) \tag{8}$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức nam điểm và sai số tương đối:

$$f'(x_0) = \overline{f'_{5DC}}(x_0) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi), \qquad f'(x_0) = \overline{f'_{5DG}}(x_0) - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta) \tag{9}$$

với $\xi \in (x_0, x_0+4h)$ và $\eta \in (x_0-2h, x_0+2h)$

1.3. Công thức nam điểm

Ví dụ 1.3. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác: $f'(x) = e^x - 1$, $f'(1) = e - 1 = 1,7183$.

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT nam điểm cuối và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{5DC}}(1) \simeq \frac{-25f(1) + 40f(1,05) - 36f(1,1) + 16f(1,15) - 3f(1,2)}{12 \cdot 0,05} = 1,7183\ ,$$

$$\delta\overline{f'_{5DC}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{5DC}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0000.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT nam điểm giữa và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{5DG}}(1) \simeq \frac{f(0,9) - 8f(0,95) + 8f(1,05) - 8(1,1)}{12 \cdot 0,05} = 1,7183,$$

$$\delta\overline{f'_{5DG}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{5DG}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0000.$$

1.3. Công thức nam điểm

Bài tập: Cho các hàm số sau. Tính đạo hàm số và tính sai số của nó

1.1. $f(x) = x^2 - 2x$; $x_0 = 2$; $h = 0,02$.

1.2. $f(x) = \sin x$; $x_0 = 1$; $h = 0,05$.

1.3. $f(x) = \ln x + x$; $x_0 = 3$; $h = 0,1$.

1.4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $x_0 = \sqrt{5}$; $h = 0,02$.

Bài tập: Tính đạo hàm số tại $x = 3$ của hàm số cho bởi bảng dữ liệu.

x	1	2	3	4	5
f(x)	1,2183	5,3891	18,5855	54,5982	150,9132

1.5. Dùng công thức sai phân.

1.6. Dùng công thức ba điểm.

1.7. Dùng công thức nam điểm.

1.4. Đạo hàm cấp hai

Từ các kết quả của công thức sai phân, ba điểm, nam điểm ta có thể xây dựng đạo hàm cấp kế tiếp. Nhưng đó là một công việc nhàm chán và có sai số khá lớn.
Sử dụng khai triển Taylor cho hàm số khả vi cấp cao, ta tìm được công thức đạo hàm cấp hai

Công thức xấp xỉ đạo hàm cấp hai

$$\overline{f''}(x_0) = \frac{1}{h^2}\Big(f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)\Big) \tag{10}$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ có sai só tương đối:

$$f''(x_0) = \overline{f''}(x_0) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \tag{11}$$

với $\xi \in (x_0 - h, x_0 + 4h)$ và $\eta \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Ví dụ 1.4. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính đạo hàm xấp xỉ cấp hai tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$$f'(x) = e^x - 1, f''(x) = e^x, f''(1) = e = 2,7183.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ cấp hai và sai số tương đối:

$$\overline{f''}(1) \simeq \frac{f(0,95) - 2f(1) + f(1,01)}{0,05^2} = 2,7188 \ ,$$

$$\delta\overline{f''}(1) = \left|\frac{\overline{f''}(1) - f''(1)}{f''(1)}\right| = 0,0002.$$

Bài tập: Cho các hàm số sau. Tính đạo hàm số cấp hai và tính sai số của nó

1.8. $f(x) = x^2 - 2x$; $x_0 = 2$; $h = 0,02$.

1.9. $f(x) = \sin x$; $x_0 = 1$; $h = 0,05$.

1.10. $f(x) = \ln x + x$; $x_0 = 3$; $h = 0,1$.

1.11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $x_0 = \sqrt{5}$; $h = 0,02$.

Bài tập: Tính đạo hàm số cấp hai tại $x = 3$ của hàm số cho bởi bảng dữ liệu sau.

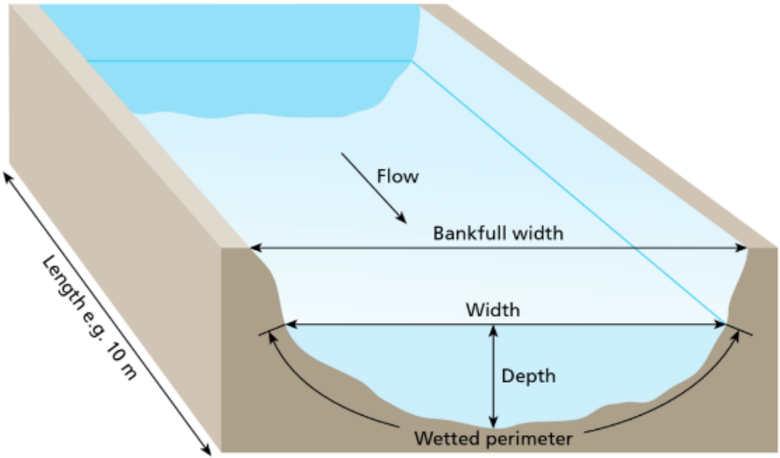
x	1	2	3	4	5
f(x)	1,2183	5,3891	18,5855	54,5982	150,9132

Chương 2

Tích phân số

2. Tích phân số

2. Tích phân số



2. Tích phân số

Rất nhiều vấn đề về khoa học, kĩ thuật dẫn đến việc tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ là một hàm phức tạp (hàm mà nguyên hàm của nó không thể biểu diễn qua các hàm đơn giản đã biết) hoặc hàm chỉ được cho bằng bảng. Vì thế vấn đề tính gần đúng tích phân $f(x)$ được đặt ra là tự nhiên.

Một phương pháp đơn giản là sử dụng đa thức để xấp xỉ hàm số đang khảo sát, sau đó tích phân đa thức này và xem đây là giá trị gần đúng của bài toán đang giải. Phương pháp này được nhiều người sử dụng và rất phổ biến trong các bài toán thực tế.

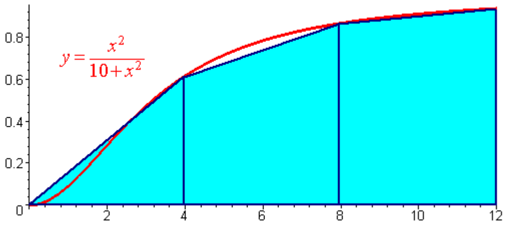
Một phương pháp khác, cũng dùng đa thức để xấp xỉ hàm số đang khảo sát, nhưng yêu cầu bậc đa thức cao hơn. Điều này khiến thuật giải trở nên phức tạp hơn và chỉ thường được sử dụng trong toán học.

2.1. Tích phân hình thang

Công thức tích phân hình thang

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{2}(y_d + y_c) \qquad (12)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(y_{i-1} + y_i) \qquad (13)$$



2.1. Tích phân hình thang

Ví dụ 2.1. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	2,5	4	6	7,3	8,6	9
f	6,142	6,967	7,391	7,386	6,702	6,090	6,870	8,196	8,568

Giải

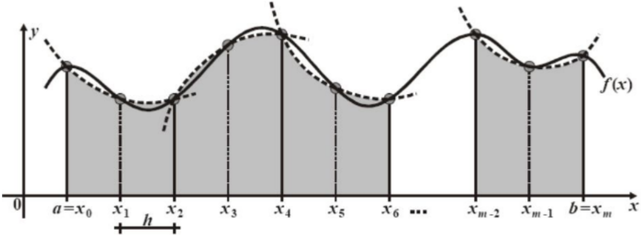
$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx \; &\simeq \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{2,5} f(x)dx + \int_{2,5}^4 f(x)dx \\ &+ \int_4^6 f(x)dx + \int_6^{7,3} f(x)dx + \int_{7,3}^{8,6} f(x)dx + \int_{8,6}^9 f(x)dx \\ &\simeq 6,554 + 7,179 + 3,694 + 10,566 + 12,792 + 8,424 \\ &+ 9,793 + 3,.353 \\ &\simeq 62,355\end{aligned}$$

2.2. Tích phân Simpson

Công thức tích phân Simpson 1/3

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{6}(y_d + 4y_g + y_c) \tag{14}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i) \tag{15}$$



2.2. Tích phân Simpson

Ví dụ 2.2. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	2,5	3	5	7	8	9
f	6,142	6,967	7,391	7,386	7,245	6,178	6,612	7,575	8,568

Giải

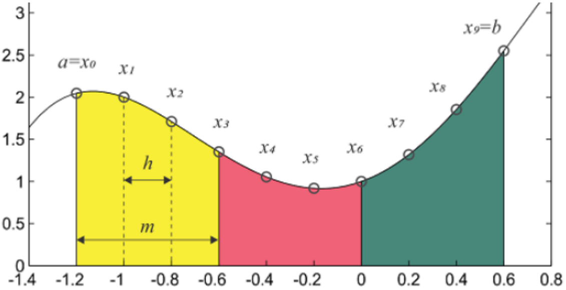
$$\begin{aligned}
\int_0^9 f(x)dx &\simeq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx \\
&\simeq \frac{1}{3}(6,142 + 4\cdot 6,967 + 7,391) + \frac{0,5}{3}(7,391 + 4\cdot 7,386 + 7,245) \\
&= \frac{2}{3}(7,245 + 4\cdot 6,178 + 6,612) + \frac{1}{3}(6,612 + 4\cdot 7,575 + 8,568) \\
&\simeq 13,800 + 7,363 + 25,712 + 15,159 \\
&\simeq 62,035
\end{aligned}$$

2.2. Tích phân Simpson

Công thức tích phân Simpson 3/8

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{(x_c - x_d)}{8}(y_d + 3y_t + 3y_p + y_c) \tag{16}$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})}{8}(y_{i-1} + 3y_{i-2/3} + 3y_{i-1/3} + y_i) \tag{17}$$



2.2. Tích phân Simpson

Ví dụ 2.3. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	3	5	7	9
f	6,142	6,967	7,391	7,245	6,178	6,612	8,568

Giải

$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx &\simeq \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx \\ &\simeq \frac{3\cdot 1}{8}(6,142 + 3\cdot 6,967 + 3\cdot 7,391 + 7,245) \\ &\quad + \frac{3\cdot 2}{8}(7,245 + 3\cdot 6,178 + 3\cdot 6,612 + 8,568) \\ &\simeq 21,173 + 40,636 \\ &\simeq 61,809\end{aligned}$$

2.2. Tích phân Simpson

Bài tập: Tính tích phân hàm số cho bởi bảng dữ liệu sau và tính sai số của nó biết tích phân chính xác $I = 2,7266$.

x	0	1	2	3
f(x)	1	0,9689	0,8776	0,7317

2.1. Dùng công thức hình thang.
2.2. Dùng công thức Simpson $1/3$.
2.3. Dùng công thức Simpson $3/8$.

Bài tập: Tính tích phân hàm số cho bởi bảng dữ liệu sau và tính sai số của nó biết tích phân chính xác $I = 402,4288$

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	1,2183	5,3891	18,5855	54,5982	150,9132	409,4288

2.4. Dùng công thức hình thang.
2.5. Dùng công thức Simpson $1/3$.
2.6. Dùng công thức Simpson $3/8$.

2.3. Tích phân Newton-Cotes

Công thức tích phân Newton-Cotes

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq (x_c - x_d) \sum_{k=0}^{n} H_{i,n} y_i \qquad (18)$$

trong đó $H_{i,n} = \dfrac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n \cdot n!} \displaystyle\int_0^n \dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-i} dt$

Công thức trên xuất phát từ việc sử dụng đa thức nội suy Lagrange và thực hiện việc đổi biến $x = x_0 + th$. Với t là biến mới và h là độ dài khoảng chia trong phân hoạch $[x_0, x_n]$.

Như vậy ta phải có phân hoạch đều $h_i = h$ với mọi i.

Ví dụ 2.4. : Tính các $H_{i,n}$ trong công thức Newton-Cotes với $n = 3$.

Giải:

$$H_{0,3} = \frac{(-1)^{3-0}C_3^0}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-0}dt = \frac{(-1)\cdot 1}{3\cdot 6}\frac{(-9)}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$H_{1,3} = \frac{(-1)^{3-1}C_3^1}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-1}dt = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$H_{2,3} = \frac{(-1)^{3-2}C_3^2}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-2}dt = \frac{(-1)\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{(-9)}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$H_{3,3} = \frac{(-1)^{3-3}C_3^3}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-3}dt = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{9}{4} = \frac{1}{8}.$$

2.3. Tích phân Newton-Cotes

Cho hàm số $f(x) \in C^{n+1}_{[a,b]}$. Đặt $M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, ta có

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\phi(x)| = \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_a^b |f(x) - L_n(x)|dx \leq \int_a^b \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|dx$$

Mà $\displaystyle\int_a^b |f(x) - L_n(x)|dx \geq \left| \int_a^b f(x) - L_n(x)dx \right|$

và $\displaystyle\int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)| \leq h^{n+2} \int_0^n |t(t-1)...(t-n)|dt.$

Kết quả là

$$\left| \int_a^b f(x) - L_n(x)dx \right| \leq h^{n+2} \frac{Mh^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n \Big| t(t-1)...(t-n) \Big| dt$$

Bài tập: Xây dựng các hệ số $H_{i,n}$ trong công thức Newton - Cotes

2.7. Tìm các giá trị $H_{i,n}$ với $n = 1$.

2.8. Tìm các giá trị $H_{i,n}$ với $n = 2$.

2.9. Tìm các giá trị $H_{i,n}$ với $n = 3$.

2.10. Tìm các giá trị $H_{i,n}$ với $n = 4$.

Bài tập: Đánh giá sai số của tích phân Newton - Cotes

2.11. Xét $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ với $x \in [2, 3]$ và $n = 2$.

2.12. Xét $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ với $x \in [-2, 2]$ và $n = 3$.

2.13. Xét $f(x) = e^x$ với $x \in [0, 1]$ và $n = 2$.

2.14. Xét $f(x) = \sin(x)$ với $x \in [0, \pi]$ và $n = 3$.

2.4. Tích phân Gauss

Tích phân hàm $f(x)$ được xấp xỉ dưới dạng

$$\int f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \tag{19}$$

trong đó w_k là các trọng số tương ứng với các vị trí x_k. Ta tìm các giá trị w_k sao cho (19)chính xác với các đa thức có bậc nhỏ hơn $2n$. Nghĩa là

$$\begin{cases} b - a = w_1 + w_2 + ... + w_n, & f(x) = 1 \\ \dfrac{b^2 - a^2}{2} = w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n, & f(x) = x \\ \quad ... & \\ \dfrac{b^n - a^n}{n} = w_1x_1^{n-1} + w_2x_2^{n-1} + ... + w_nx_n^{n-1}, & f(x) = x^{n-1} \\ \quad ... & \\ \dfrac{b^{2n} - a^{2n}}{2n} = w_1x_1^{2n-1} + w_2x_2^{2n-1} + ... + w_nx_n^{2n-1}, & f(x) = x^{2n-1} \end{cases} \tag{20}$$

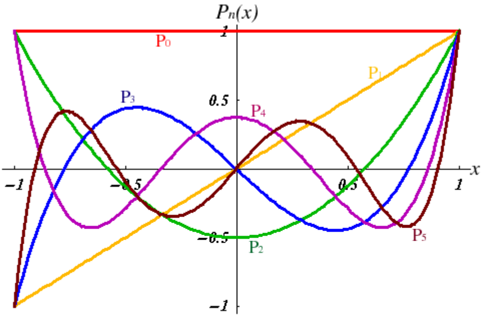
Đa thức Legendre: $W_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$.

Một vài đa thức Legendre đầu tiên ứng với $n = 0, 1, ..., 6$.

$W_0(x) = 1$, $W_1(x) = x$, $W_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$W_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $W_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$.

$W_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$, $W_6(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$.



Tính chất của đa thức Legendre:

1. Với mọi n, đa thức $W_n(x)$ có bậc n.
2. Đa thức $W_n(x)$ có n nghiệm thực trong khoảng $[-1, 1]$.
3. Nếu $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn n thì $\int_{-1}^{1} P(x)W_n(x)dx = 0$.

Hệ quả: Với mọi $n < m < 2n$, tích phân trên đoạn $[-1, 1]$ của $f(x) = x^m$ có thể thay thế bởi tích phân của đa thức $r(x)$ có bậc nhỏ hơn n. Thật vậy, thực hiện phép chia đa thức ta thu được

$$f(x) = P(x)W(x) + r(x)$$

vơi $r(x)$ là đa thức phần dư có bậc nhỏ hơn n. Do đó

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} P(x)W_n(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)dx$$

$\Rightarrow$ Chỉ cần nửa trên hệ (20) có nghiệm là đủ.

Ví dụ 2.5. Xây dựng công thức tích phân Gauss với $n = 3$.

Đa thức $W_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ có ba nghiệm $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.
Thế ba tọa độ này vào nửa trên hệ phương trình 20, ta thu được

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2, \\ -w_1\sqrt{\frac{3}{5}} + w_2 0 + w_3\sqrt{\frac{3}{5}} = 0, \\ w_1(-\sqrt{\frac{3}{5}})^2 + w_2 0^2 + w_3(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là $w_1 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}, w_3 = \frac{5}{9}$.

Như vậy công thức tích phân Gauss với $n = 3$ là

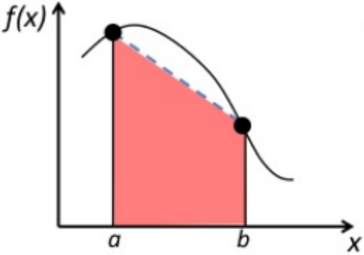
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

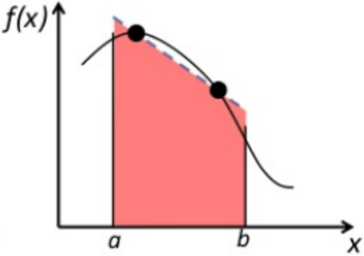
2.4. Tích phân Gauss

Cho hàm số $f(x) \in C^{2n}_{[a,b]}$. Đặt $M = \max_{x \in [a,b]} |f^{2n}(x)|$, ta có

$$\left| \int_a^b f(x) - r(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} M$$

Sự khác biệt giữa tích phân Newton-Cotes và tích phân Gauss





Bài tập: Tinh tích phân bằng Phương pháp Gauss và Simpson $3/8$. Tìm sai số của chúng với nghiệm chính xác.

2.15. $\int_{-1}^{1}(x+1)dx.$

2.16. $\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx.$

2.17. $\int_{-1}^{1}(x+1)^3dx.$

2.18. $\int_{-1}^{1}(x+1)^4dx.$

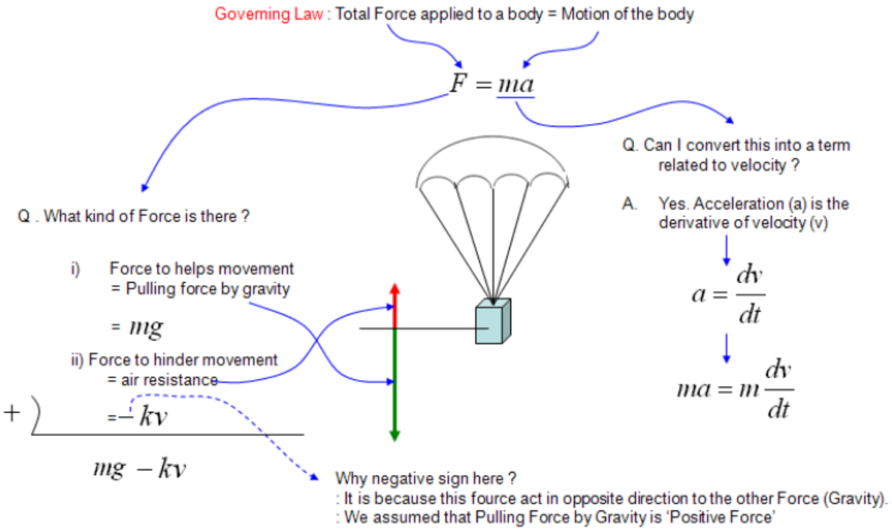
2.19. $\int_{-1}^{1}(x+1)^5dx.$

2.20. $\int_{-1}^{1}(x+1)^6dx.$

Chương 3

Phương trình vi phân

3. Phương trình vi phân



3. Phương trình vi phân

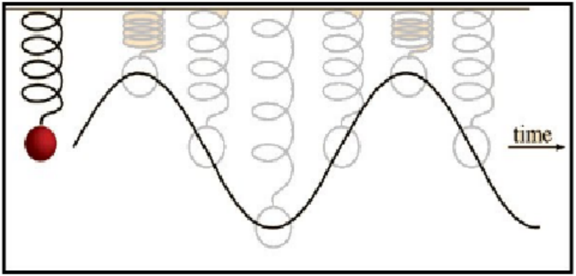
Spring Force

Damping Fource

Applied Force

Movement of Mass

$$F(t) = kx(t) + M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$



3. Phương trình vi phân

Trong khoa học, kĩ thuật chúng ta gặp rất nhiều bài toán liên quan đến phương trình vi phân thường (chẳng hạn như bài toán tính vận tốc của một vật thể khi biết độ dài quãng đường trong những khoảng thời gian khác nhau, bài toán tính toán cường độ dòng điện theo điện lượng). Có nhiều trường hợp nghiệm đúng của phương trình vi phân không thể tìm ra được.

Các phương pháp gần đúng có thể chia làm hai nhóm: Nhóm thứ nhất được gọi là phương pháp giải tích, nhóm thứ hai được gọi là phương pháp số;

Các phương pháp giải tích cho phép tìm nghiệm gần đúng dưới dạng một biểu thức giải tích.

Các phương pháp số cho phép tìm nghiệm dưới dạng bảng. Dưới đây, ta chỉ giới thiệu một phương pháp giải tích thường dùng gọi là phương pháp lặp đơn, và một số phương pháp số (bao gồm phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge - Kutta).

3.1. Phương pháp lặp

Xét bài toán giá trị ban đầu sau

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{21}$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$ và $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$.
Tích phân phương trình thứ nhất kết hợp với điều kiện thứ hai, ta được

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{22}$$

Ta thiết lập dãy

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds \end{cases} \tag{23}$$

3.1. Phương pháp lặp

Giả sử hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $D_x \times D_y$ và trên đó thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai

$$\Big| f(x, y_1) - f(x, y_2) \Big| < L|y_1 - y_2|, \forall x \in D_x, y_1, y_2 \in D_y \tag{24}$$

Khi đó dãy $y_k(x)$ sẽ hội tụ tới nghiệm duy nhất của phương trình 21 trên $[x_0 - h, x_0 + h]$ với $h = \min(a, \frac{b}{M})$ và $M = \max\limits_{(x,y)\in D_x \times D_y} |f(x, y)|$.

Sai số tuyệt đối của phương pháp lặp

$$|y^*(x) - y_k(x)| < L^k M \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{25}$$

Ví dụ 3.1. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

Ta lần lượt thực hiện các phép lặp sau:

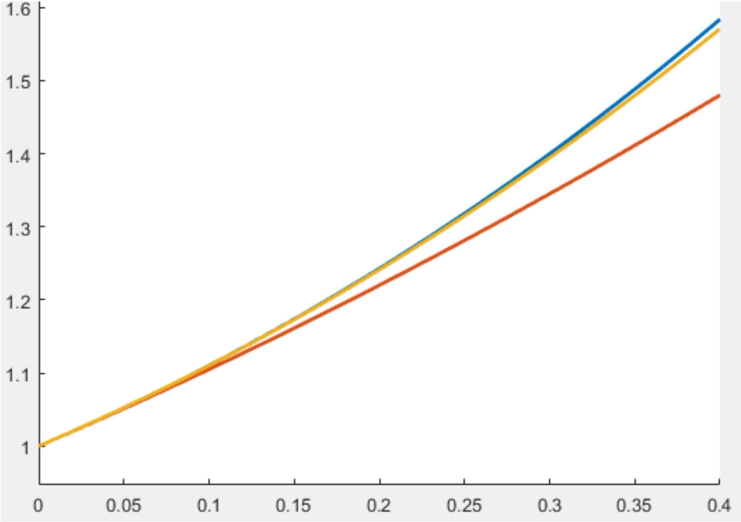
$$y_0(x) = 1.$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x s + 1ds = \frac{x^2}{2} + x + 1.$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x s + \frac{s^2}{2} + s + 1ds = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1.$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x s + \frac{s^3}{6} + s^2 + s + 1ds = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1.$$

3.1. Phương pháp lặp



Nghiệm chính xác $y(x) = 2e^x - x - 1$

Bài tập: Giải các PTVP sau bằng phương pháp lặp

3.1.

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

3.2.

$$\begin{cases} y' = e^x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

3.3.

$$\begin{cases} y' = y(2x + 1) \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad x \in [1, 1.5]$$

3.4.

$$\begin{cases} y' = ye^{x+1} \\ y(-1) = 1 \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]$$

3.2. Phương pháp Euler

Xét bài toán giá trị ban đầu sau đây:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{26}$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$ và $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$.

Giả sử hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm bậc m trên $D_x \times D_y$. Ta tính được các đạo hàm bậc cao của y

$$\begin{aligned} y'' &= f_x(x, y) + f_y(x, y)y' \\ y''' &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}y' + f_yy(x, y)(y')^2 + f_y(x, y)y'' \\ y^{(4)} &= .... \end{aligned} \tag{27}$$

3.2. Phương pháp Euler

Sử dụng khai triển Taylor đối với hàm số $y(x)$ tại điểm x_0, ta thu được

$$y(x) \simeq \sum_{k=0}^{m} \frac{y^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k \tag{28}$$

Xấp xỉ trên chỉ đúng với những tọa độ x nằm gần x_0. Trường hợp x nằm xa x_0, ta dựa vào xấp xỉ trên để tính $y(x_1)$ với x_1 nằm giữa x_0 và x. Sau đó ta thực hiện lại phép khai triển Taylor vơi điều kiện đầu $y(x_1)$ để tìm xấp xỉ mới. Cứ như thế di chuyển x_k đến gần x.

Trường hợp đơn giản nhất ứng với $m = 1$, ta có

$$y_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k) \tag{29}$$

Ví dụ 3.2. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

Ta xây dựng phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]. Khi đó

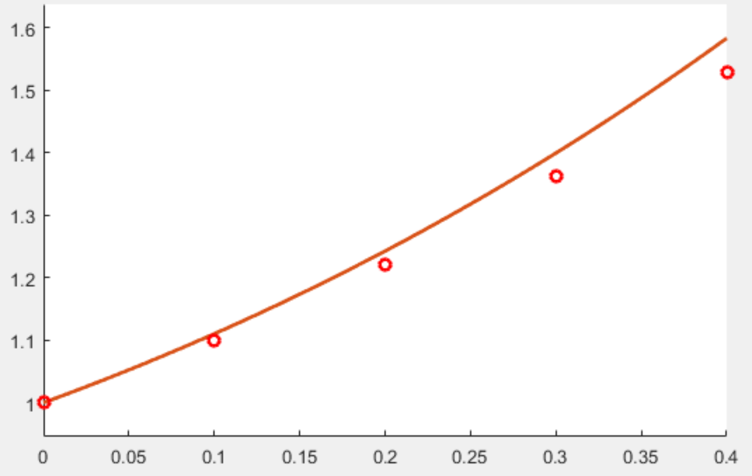
$h_0 = 0.1; y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1.$

$h_1 = 0.1; y_2 = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22.$

$h_2 = 0.1; y_3 = 1.22 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.22) = 1.362.$

$h_3 = 0.1; y_4 = 1.362 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.362) = 1.5282.$

3.2. Phương pháp Euler



Nghiệm chính xác $y(x) = 2e^x - x - 1$

3.3. Phương pháp Euler cải tiến

Ta có

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+s)ds \tag{30}$$

Áp dụng công thức hình thang cho tích phân, ta được

$$y(x+h) \simeq y(x) + \frac{h}{2}[y'(x) + y'(x+h)] \tag{31}$$

hay

$$y_{k+1} \simeq y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \tag{32}$$

Do vế phải vẫn chứa y_{k+1} là ẩn chưa biết, nên ta thay nó bởi (29). Kết quả ta được

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} \simeq y_k + \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\Big) \end{cases} \tag{33}$$

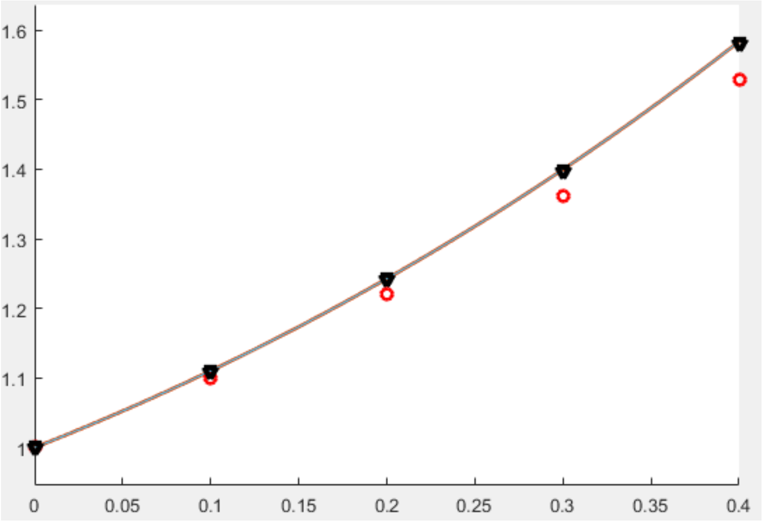
Ví dụ 3.3. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

Ta xây dựng phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]. Khi đó

$$h_0 = 0.1; \tilde{y}_1 = 1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1) = 1.1.$$
$$y_1 = 1 + 0.05(0 + 1 + 0.1 + 1.1) = 1.11.$$
$$h_1 = 0.1; \tilde{y}_2 = 1.11 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.11) = 1.231.$$
$$y_2 = 1.11 + 0.05(0.1 + 1.11 + 0.2 + 1.231) = 1.2421.$$
$$h_2 = 0.1; \tilde{y}_3 = 1.2421 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.2421) = 1.3863.$$
$$y_3 = 1.2421 + 0.05(0.2 + 1.2421 + 0.3 + 1.3863) = 1.3985.$$
$$h_3 = 0.1; \tilde{y}_4 = 1.3985 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.3985) = 1.5683.$$
$$y_4 = 1.3985 + 0.05(0.3 + 1.3985 + 0.4 + 1.5683) = 1.5818.$$

3.3. Phương pháp Euler cải tiến



Nghiệm chính xác $y(x) = 2e^x - x - 1$

Bài tập: Giải các PTVP sau bằng PP Euler và Euler cải tiến

3.5.

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

3.6.

$$\begin{cases} y' = e^x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

3.7.

$$\begin{cases} y' = y(2x + 1) \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad x \in [1, 1.5]$$

3.8.

$$\begin{cases} y' = ye^{x+1} \\ y(-1) = 1 \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]$$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Nội dung cơ bản của phương pháp Runge-Kutta là tang độ chính xác của y_{i+1} ta cần thêm các điểm trung gian giữa x_i và x_{i+1}.

Đặt $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ và biển diễn phần số gia ở dạng

$$\Delta y_i = c_1 k_1(h_i) + c_2 k_2(h_i) + ... + c_r k_r(h_i) \tag{34}$$

với c_j là các hệ số và $k_j(h_i)$ là các hàm số được xác định như sau

$$k_j(h_i) = h_i(\xi_j, \eta_j); \xi_j = \alpha_j h_i; \eta_j = y_0 + \beta_{j1} k_1 + ... + \beta_{j(j-1)} k_{j-1} \tag{35}$$

Tiếp theo ta lập hàm số biểu diễn sai số địa phương ở dạng

$$\varphi(h_i) = y^*(x_{i+1}) - y_i - \Delta y_i \tag{36}$$

và mong muốn sai số địa phương có bậc $s + 1$, nghĩa là

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = ... = \varphi^{(s)}(0) = 0, \varphi^{(s+1)}(0) \neq 0 \tag{37}$$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Hệ phương trình để xác định các hệ số $c_j, \alpha_j, \beta_{ij}$ được thu từ điều kiện (37). Ta có

$$\varphi^{(m)}(0) = y_c^{(m)} - \sum_{j=1}^{r} c_j k_j^{(m)}(0) \tag{38}$$

Từ đây và từ (37) ta nhận được hệ các đẳng thức

$$\begin{cases} c_1 k_1(0) + c_2 k_2(0) + \ldots + c_r k_r(0) = 0 \\ c_1 k_1'(0) + c_2 k_2'(0) + \ldots + c_r k_r'(0) = y'(0) \\ \qquad \ldots \\ c_1 k_1^{(s)}(0) + c_2 k_2^{(s)}(0) + \ldots + c_r k_r^{(s)}(0) = y^{(s)}(0) \end{cases} \tag{39}$$

Có tất cả $\dfrac{r^2+3r-2}{2}$ ẩn số $c_j, \alpha_j, \beta_{ij}$. Ta hãy xem (39) tạo được bao nhiêu phương trình?

Dòng thứ nhất là đẳng thức nên không có phương trình nào.

Dòng thứ hai, khi lấy $h = 0$ cả hai vế chỉ chứa $f(x_0, y_0)$ nên nó tạo ra được một phương trình.

Dòng thứ ba, khi lấy $h = 0$ hai vế đều chứa $f(x_0, y_0), f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ nên nó tạo ra được hai phương trình.

Tương tự, dòng thứ m tạo được $m-1$ phương trình.

Do vậy số phương trình của hệ là $\dfrac{s(s+1)}{2}$.

So sánh số ẩn và số phương trình, ta lấy $s = r$. Hệ phương trình có nghiệm và không chỉ một nghiệm.

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Công thức Runge-Kutta bậc hai

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_{i+1}, y_i + k_1) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \tag{40}$$

Công thức Runge-Kutta bậc ba

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \tag{41}$$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Ví dụ 3.4. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

Sử dụng Runge-Kutta bậc 2 với phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]:

$$h_0 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0 + 1) = 0.1; k_2 = 0.1 \cdot (0.1 + (1 + 0.1)) = 0.12;$$
$$y_1 = 1 + (0.1 + 0.12)/2 = 1.11.$$
$$h_1 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.1 + 1.11) = 0.121;$$
$$k_2 = 0.1 \cdot (0.2 + (1.21 + 0.121)) = 0.1431;$$
$$y_2 = 1.11 + (0.121 + 0.1431)/2 = 1.2421.$$
$$h_2 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.2 + 1.2421) = 0.1442;$$
$$k_2 = 0.1 \cdot (0.3 + (1.2421 + 0.121)) = 0.1686;$$
$$y_3 = 1.2421 + (0.1442 + 0.1686)/2 = 1.3985.$$
$$h_3 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.3 + 1.3985) = 0.1698;$$
$$k_2 = 0.1 \cdot (0.4 + (1.3985 + 0.1698)) = 0.1968;$$
$$y_4 = 0.3985 + (0.1698 + 0.1968)/2 = 1.5818.$$

Sử dụng Runge-Kutta bậc 3 với phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]:

$h_0 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0 + 1) = 0.1;$

$k_2 = 0.1 \cdot ((0 + 0.1/2) + (1 + 0.1/2)) = 0.11;$

$k_3 = 0.1 \cdot ((0 + 0.1) + (1 - 0.1 + 2 \cdot 0.11)) = 0.122;$

$y_1 = 1 + (1/6) \cdot (0.1 + 0.11 + 0.122) = 1.11;$

$h_1 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.1 + 1.11) = 0.121;$

$k_2 = 0.1 \cdot ((0.1 + 0.1/2) + (1.11 + 0.121/2)) = 0.1321;$

$k_3 = 0.1 \cdot ((0.1 + 0.1) + (1.11 - 0.121 + 2 \cdot 0.1321)) = 0.1453;$

$y_2 = 1.11 + (1/6) \cdot (0.121 + 0.1321 + 0.1453) = 1.2428;$

$h_2 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.2 + 1.2428) = 0.1443;$

$k_2 = 0.1 \cdot ((0.2 + 0.1/2) + (1.2428 + 0.1443/2)) = 0.1565;$

$k_3 = 0.1 \cdot ((0.2 + 0.1) + (1.2428 - 0.1443 + 2 \cdot 0.1565)) =$
$0.1711;$

$y_3 = 1.2428 + (1/6) \cdot (0.1443 + 0.1565 + 0.1711) = 1.3997;$

Bài tập: Giải các PTVP sau bằng PP Runge-Kutta bậc hai và bậc ba

3.9.

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

3.10.

$$\begin{cases} y' = e^x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

3.11.

$$\begin{cases} y' = y(2x + 1) \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad x \in [1, 1.5]$$

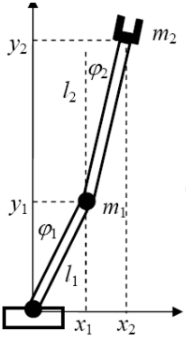
3.12.

$$\begin{cases} y' = ye^{x+1} \\ y(-1) = 1 \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]$$

Chương 4

Hệ phương trình vi phân

Mô hình hóa tay máy hai bậc tự do



l_1, l_2 : chiều dài của 2

m_1, m_2 : khối lượng

φ_1, φ_2 : góc quay của các khớp cánh tay

τ_1, τ_2 : moment làm quay các khớp nối

Tọa độ của cánh tay máy trong hệ tọa độ De-cac

$$x_1 = -l_1 \sin \varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos \varphi_1$$
$$x_2 = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2$$
$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$$

Vận tốc: $v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -l_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -l_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}$

4. Hệ phương trình vi phân

Navier–Stokes Equations
3 – dimensional – unsteady

Glenn Research Center

Coordinates: (x,y,z)
Velocity Components: (u,v,w)

Time : t   Pressure: p
Density: ρ   Stress: τ
Total Energy: Et

Heat Flux: q
Reynolds Number: Re
Prandtl Number: Pr

Continuity:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

X – Momentum:
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right]$$

Y – Momentum:
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right]$$

Z – Momentum
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]$$

Energy:
$$\frac{\partial(E_T)}{\partial t}+\frac{\partial(uE_T)}{\partial x}+\frac{\partial(vE_T)}{\partial y}+\frac{\partial(wE_T)}{\partial z}=-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}-\frac{1}{Re_r Pr_r}\left[\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$+\frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\,\tau_{xx}+v\,\tau_{xy}+w\,\tau_{xz})+\frac{\partial}{\partial y}(u\,\tau_{xy}+v\,\tau_{yy}+w\,\tau_{yz})+\frac{\partial}{\partial z}(u\,\tau_{xz}+v\,\tau_{yz}+w\,\tau_{zz})\right]$$

4. Hệ phương trình vi phân

Các bài toán phổ biến liên quan đến phương trình vi phân thường không chỉ có một biến. Chúng thường gồm từ hai hoặc ba biến hàm trở lên. Ví dụ như chuyển động của chất lỏng phụ thuộc vào áp suất, vận tốc và nhiệt độ của các phân tử nước. Hoặc sự phát triển của một cá thể thực vật phụ thuộc vào ánh sáng, độ ẩm, khoáng chất ...

Rất khó để giải tìm nghiệm chính xác của hệ phương trình vi phân, dù cho đó là hệ đơn giản nhất. Vì vậy các phương pháp số được áp dụng triệt để vào việc giải quyết bài toán này. Ý tưởng đơn giản là xử lý từng phương trình vi phân bằng các công cụ đã nghiên cứu qua ở chương PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN. Đó là các phương pháp cơ bản như phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge - Kutta.

4.1. Phương pháp Euler

Xét bài toán hệ phương trình vi phân cấp một sau đây:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), & y_0 = y(x_0) \\ z' = g(x, y, z), & z_0 = z(x_0) \end{cases} \tag{42}$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$, $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$ và $z \in D_z = [z_0 - c, z_0 + c]$.

Phương pháp Euler cho ta hệ nghiệm số sau

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h; \\ y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k, z_k)h; \\ z_{k+1} &= z_k + g(x_k, y_k, z_k)h. \end{aligned} \tag{43}$$

4.2. Phương pháp Euler cải tiến

Phương pháp Euler cải tiến cho ta hệ nghiệm số sau

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + h_k;\\
\tilde{y}_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k, z_k)h_k\\
\tilde{z}_{k+1} &= z_k + g(x_k, y_k, z_k)h_k\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{f(x_k, y_k, z_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2}h_k\\
z_{k+1} &= z_k + \frac{g(x_k, y_k, z_k) + g(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2}h_k
\end{aligned}
\tag{44}
$$

4.3. Phương pháp Runge-Kutta

Công thức Runge-Kutta bậc ba cho ta hệ nghiệm số sau

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i, z_i) \\ l_1 = h_i g(x_i, y_i, z_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1) \\ l_2 = h_i g(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - l_1 + 2l_2) \\ l_3 = h_i g(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - l_1 + 2l_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ z_{i+1} \simeq z_i + \dfrac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3) \end{cases} \quad (45)$$

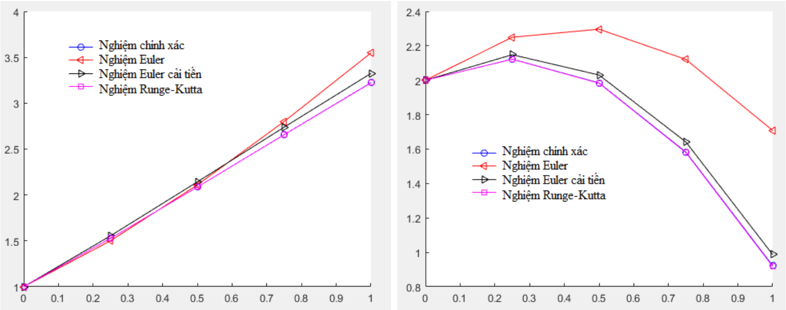
4.3. Phương pháp Runge-Kutta

Ví dụ 4.1. Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = -4y/3 + 5z/3 + 3x^2 + 2x, & y_0 = y(0) = 1 \\ z' = -5y/3 + 4z/3 + 3x^2 - 2x, & z_0 = z(0) = 2 \end{cases} \tag{46}$$

có nghiệm chính xác

$$\begin{cases} y(x) = 2\sin x + \cos x + x^2 \\ z(x) = \sin x + 2\cos x - x^2 \end{cases} \tag{47}$$



4.4. Phương pháp vi phân bậc hai

Phương trình vi phân bậc cao được đưa về hệ phương trình vi phân bằng cách đặt đạo hàm của hàm cần tìm như là một biến hàm mới.

Xét phương trình vi phân cấp hai:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0, \end{cases} \tag{48}$$

Đặt $z = y'$ khi đó $z' = y''$. Phương trình (48) trở thành hệ

$$\begin{cases} y' = z, & y(x_0) = y_0, \\ z' = f(x, y, z), & z(x_0) = z_0. \end{cases} \tag{49}$$

Sử dụng các phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến, Runge-Kutta để giải quyết bài toán trên.