

Bài giảng Toán 2

Giảng viên
Nguyễn Anh Thi

2016

Chương 1

ĐẠO HÀM RIÊNG

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

Hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$, một hàm số f trên D là một quy tắc mà ứng với mỗi phần tử của D cho tương ứng duy nhất một số thực

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. Khi đó ta gọi D là miền xác định của hàm f , và tập các giá trị có thể của f gọi là miền giá trị.

Ví dụ

Hàm số $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ là một hàm nhiều biến.

Hàm hai biến

Trường hợp $D \subset \mathbb{R}^2$, ta nói f là hàm hai biến.

Ví dụ

Một số hàm hai biến:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f : \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

Hàm ba biến

Trường hợp $D \subset \mathbb{R}^3$, ta nói f là hàm ba biến.

Ví dụ

Một số hàm ba biến:

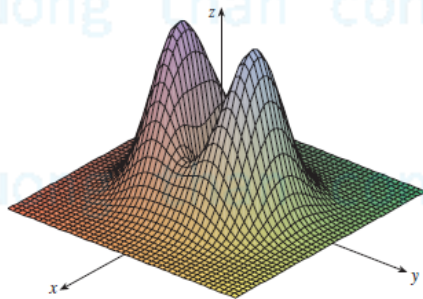
- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- c) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{xyz}$

Đồ thị hàm hai biến

Định nghĩa

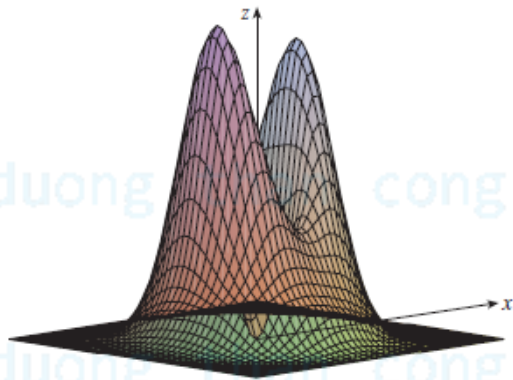
Tập hợp các điểm $(x, y, f(x, y))$ với (x, y) thuộc tập xác định của f được gọi là **đồ thị** của f .

Ví dụ



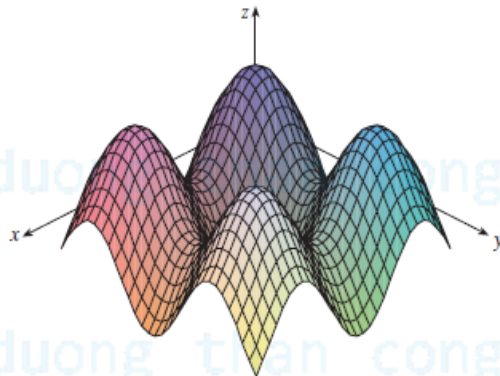
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Đồ thị hàm hai biến



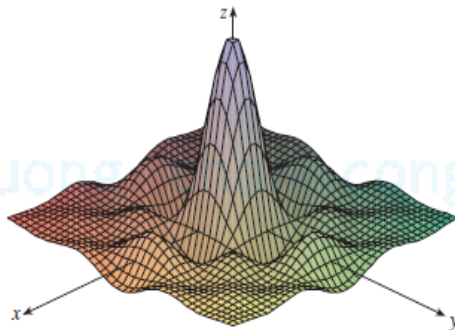
(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Đồ thị hàm hai biến



(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

Đồ thị hàm hai biến



(d) $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

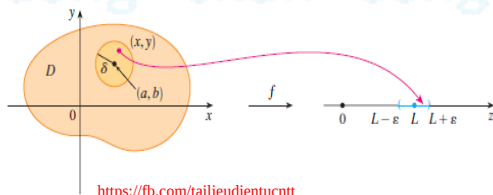
Định nghĩa

Ta nói $f(x, y)$ có **giới hạn** bằng L khi (x, y) tiến về (a, b) và viết

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi (x, y) thuộc miền xác định của f

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$$



Chú ý

Nếu $f(x, y) \rightarrow L_1$ khi $(x, y) \rightarrow (a, b)$ theo đường C_1 và $f(x, y) \rightarrow L_2$ khi $(x, y) \rightarrow (a, b)$ theo đường C_2 , với $L_1 \neq L_2$, thì $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ không tồn tại.

Ví dụ

Chúng minh rằng $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

$$\text{Đặt } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Xét (x, y) tiến đến $(0, 0)$ dọc theo trục Ox , khi đó $y = 0$, ta được $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ với $x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 1$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Ox .

Tương tự, ta được $f(x, y) \rightarrow -1$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Oy . Vì $f(x, y)$ có hai giới hạn khác nhau khi (x, y) tiến đến $(0, 0)$ theo hai đường khác nhau, nên $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ không tồn tại.

Tìm các giới hạn

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{2+3x^2+y^2}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln(1+x^2y^2)$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,5)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{1}{x^2+y^2}$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}$

Các hàm số sau có giới hạn tại $(0, 0)$ không?

1. $\frac{x^2+y^2}{1+x^2}$

2. $\frac{1-xy}{x^2+y^2}$

3. $\frac{x^2}{x^2-y}$

4. $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Sự liên tục của hàm hai biến

Định nghĩa

Hàm số hai biến f được gọi là **liên tục** tại điểm (a, b) nếu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Ta nói f liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm trên D .

Ví dụ

Tính $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

Vì $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ là một đa thức, nên nó liên tục tại mọi điểm, ta có giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 11$

Đạo hàm riêng

- ▶ Cho hàm hai biến $f(x, y)$. Cố định $y = y_0$ ta được hàm một biến $g(x) = f(x, y_0)$.
- ▶ Đạo hàm của hàm số này tại x_0 gọi là **đạo hàm riêng** theo biến x của f tại điểm (x_0, y_0) .

Định nghĩa

Đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) được định nghĩa là

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Đạo hàm riêng

- ▶ Một cách tương tự ta có thể định nghĩa $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{(x_0, y_0)}$
- ▶ Đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) được ký hiệu theo nhiều cách

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, f_x(x_0, y_0), \text{ hoặc } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, z_x(x_0, y_0)$$

- ▶ Đạo hàm riêng theo biến x của $z = f(x, y)$ cũng là **hàm số hai biến** và được ký hiệu

$$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x \text{ hoặc } \frac{\partial z}{\partial x}, z_x$$

Đạo hàm riêng

- ▶ Tương tự ta có định nghĩa

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{df}{dy} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- ▶ Đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) được ký hiệu theo nhiều cách

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, f_y(x_0, y_0), \text{ hoặc } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, z_y(x_0, y_0)$$

- ▶ Đạo hàm riêng theo biến y của $z = f(x, y)$ cũng là **hàm số hai biến** và được ký hiệu

$$\frac{\partial f}{\partial y}, f_y \text{ hoặc } \frac{\partial z}{\partial y}, z_y$$

Vector gradient

Khi hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ tại điểm

$(x_0, y_0) \in D$, ta gọi vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ là **vector gradient** của hàm số $f(x, y)$ và ký hiệu là ∇f hoặc *grad* f

Chú ý

Để tính đạo hàm riêng theo x , ta coi y là hằng số.

Để tính đạo hàm riêng theo y , ta coi x là hằng số.

Ví dụ

- ▶ Cho $f(x, y) = x^3y$. Hãy tính $\nabla f(x, y), \nabla f(1, 2)$.
- ▶ Cho $f(x, y) = y \sin(xy)$. Hãy tính $\nabla f(x, y)$.

Đạo hàm riêng hàm nhiều biến hơn

- ▶ Đạo hàm riêng cho hàm nhiều biến hơn được định nghĩa tương tự hàm hai biến.
- ▶ Giả sử hàm có n biến, ta có vector gradient $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$
- ▶ Để tính đạo hàm riêng theo một biến, ta coi tất cả các biến còn lại là hằng số.

Ví dụ

Tính f_x, f_y, f_z biết

$$f(x, y, z) = x \sin(y + 3z)$$

Đạo hàm riêng cấp cao

- ▶ Các đạo hàm riêng của f_x và f_y được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của f . Chúng được ký hiệu lần lượt là

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- ▶ Các đạo hàm riêng cấp cao hơn được định nghĩa tương tự.

Ví dụ

Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 của

a) $f(x, y) = x \cos y + ye^x$

b) $f(x, y) = x^y$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lý

Nếu $f(x, y)$ và các đạo hàm riêng của nó f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} tồn tại trên một miền mở chứa điểm (a, b) và tất cả đều liên tục tại (a, b) thì

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Nhận xét

- ▶ Nếu tất cả các đạo hàm riêng đều liên tục thì *thứ tự lấy đạo hàm không quan trọng*.
- ▶ Với hàm nhiều biến hơn thì các định nghĩa và ký hiệu cũng tương tự, ví dụ $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$

Ví dụ

Tính f_{yxyz} biết

$$f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$$

Tính khả vi

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và đặt

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Hàm số nói trên được gọi là **khả vi tại (x_0, y_0)** nếu $f_x(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0)$ tồn tại, đồng thời Δz thỏa mãn một phương trình có dạng

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

Trong đó mỗi ϵ_1 và ϵ_2 đều tiến về 0 khi cả $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Ta nói f khả vi nếu nó **khả vi** tại mọi điểm thuộc miền xác định.

Định lý

Nếu các đạo hàm riêng f_x, f_y của $f(x, y)$ đều liên tục trên một miền mở R thì f khả vi tại mọi điểm thuộc R .

Định lý

Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì nó liên tục tại (x_0, y_0) .

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

Đạo hàm hàm hợp 1

Trường hợp hàm 1 biến, nếu $w = f(x)$ và $x = g(t)$ thì

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Định lý

Nếu $w = f(x, y)$ khả vi và $x = x(t)$, $y = y(t)$ cũng là những hàm khả vi thì hàm hợp $w = f(x(t), y(t))$ khả vi theo t và

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Hay

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ví dụ

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

Định lý (Đạo hàm hàm hợp 3)

Nếu $w = f(x, y, z)$ khả vi và $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, và $z = k(r, s)$ cũng là những hàm khả vi thì hàm hợp $w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$ khả vi và

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

Chú ý

Trường hợp $w = f(x, y)$ và $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ta cũng có công thức tương tự

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Tổng quát $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và mỗi x_i là một hàm theo k biến $t_1, t_2, \dots, t_k$ thì với mỗi $j = \overline{1, k}$

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

Ví dụ

a) Tính $\partial w / \partial r$ và $\partial w / \partial s$ biết

$$w = x + 2y + z^2$$

$$x = \frac{r}{s}, y = r^2 + \ln s, z = 2r$$

b) Tính $\partial w / \partial r$ và $\partial w / \partial s$ biết $w = x^2 + y^2, x = r - s, y = r + s$

Ví dụ

Các phương trình

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 25 = 0$$

thể hiện mối liên hệ của y theo x .

Nhận xét

*Nếu từ phương trình $F(x, y) = 0$ ta có thể suy ra $y = y(x)$ (y là một hàm số theo x) thì khi đó ta nói y là một **hàm ẩn**.*

Một số trường hợp ta có thể suy ra công thức tường minh cho hàm ẩn $y = y(x)$. Tuy nhiên trong một số trường hợp ta không có công thức tường minh.

Giả sử rằng hàm số $F(x, y)$ khả vi và phương trình $F(x, y) = 0$ xác định được hàm ẩn khả vi $y = h(x)$.

Khi đó hàm hợp $w(x) = F(x, h(x))$ khả vi, do $w(x) = F(x, h(x)) = 0$ nên ta có

$$0 = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = F_x + F_y \frac{dy}{dx}$$

Nếu $F_y \neq 0$ thì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Định lý

Nếu $F(x, y)$ khả vi và phương trình $F(x, y) = 0$ xác định được y là hàm ẩn khả vi theo x thì tại những điểm $F_y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ví dụ

- a) Tính y' biết $y^2 = x$
- b) Tính y' biết $y^2 = x^2 + \sin(xy)$
- c) Tính y' biết $x^2 + y^2 = 25$ tại $(3, -4)$

Khi đó hàm hợp $w = F(x, y, f(x, y))$ khả vi, do $w = F(x, y, f(x, y)) = 0$ nên ta có

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} = F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y \frac{\partial y}{\partial y} + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \text{ và } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Tính $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$ tại điểm $(0, 0, 0)$ biết

$$x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0$$