# Bài giảng Toán 2

Giảng viên
Nguyễn Anh Thi

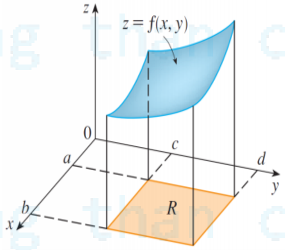
2016

Chương 2

# TÍCH PHÂN BỘI

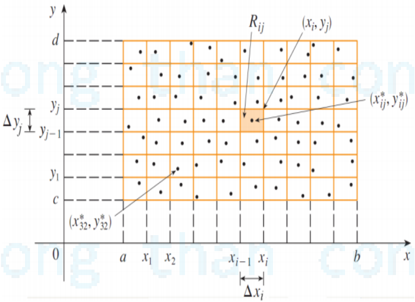
Giả sử $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in R$. Ta cần tính thể tích $V$ của khối $S$:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in R\}$$



# Phân hoạch

Giả sử $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ và $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m; y_1^*, \ldots, y_m^*\}$ là các phân hoạch của $[a, b]$ và $[c, d]$. Thì $P = P_1 \times P_2$ gọi là một phân hoạch của $R = [a, b] \times [c, d]$.

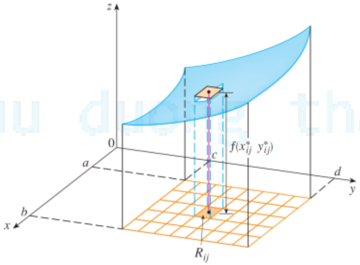


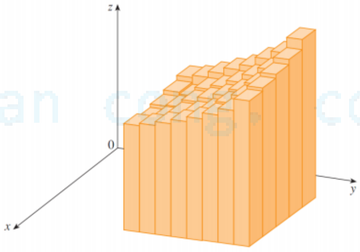
# Tổng Riemann

Tổng Riemann của hàm số $f$ ứng với phân hoạch $P$ như trên được định nghĩa là:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j$$

Với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$



# Định nghĩa tích phân hai lớp

Gọi $P(R)$ là tập các phân hoạch của $R = [a,b] \times [c,d]$. Với $P \in P(R)$, đặt:

$$|P| = max\{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

### Định nghĩa

Hàm $f$ gọi là khả tích Riemann trên $R$ nếu có $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ thỏa:

$$|S(f,P) - \alpha| \leq \epsilon, \forall P \in P(R), |P| < \delta$$

Khi đó ta gọi $\alpha$ là tích phân của $f$ trên $R$ và ký hiệu:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \alpha$$

Tích phân hai lớp có các tính chất sau:

1.
$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy + \iint_R g(x,y)dxdy$$

2.
$$\iint_R c[f(x,y)+g(x,y)]dxdy = c\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dxdy$$

3. Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in R$ thì:
$$\iint_R f(x,y)dxdy \le \iint_R g(x,y)dxdy$$

# Tích phân lặp

Cho $f$ là hàm xác định trên $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Cố định $x \in [a, b]$, lấy tích phân theo $y$, ta được:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

- Lấy tích phân $A(x)$ từ $a$ đến $b$ ta được

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

Tích phân trên gọi là tích phân lặp.
Nếu ta lấy tích phân theo $x$ trước và tích phân theo $y$ sau thì ta cũng được tích phân lặp.

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy$$

## Ví dụ

Tính

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

## Định lý (Định lý Fubini)

*Nếu f liên tục trên hình chữ nhật* $R = [a, b] \times [c, d]$ *thì:*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

## Ví dụ



1. Tính tích phân hai lớp $\iint_R (x - 3y^2)dxdy$ với $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$.
2. Tính tích phân hai lớp $\iint_R 2x\sin^2 y dxdy$ với $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

## Chú ý

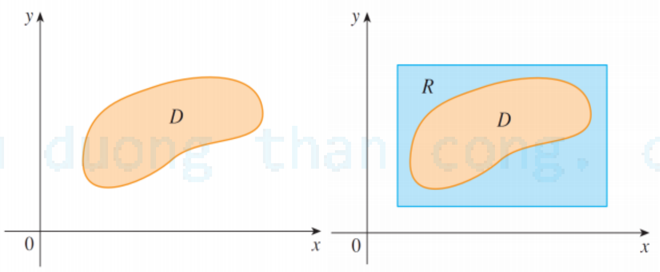


*Nếu* $R = [a, b] \times [c, d]$ *thì:*

$$\iint_R g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

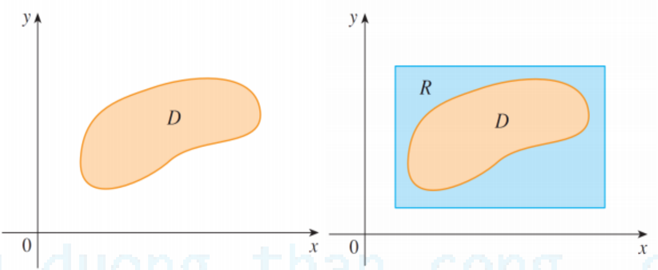
# Tích phân hai lớp-miền tổng quát

Cho $D$ là miền bị chặn được giới hạn trong hình chữ nhật $R$




Ta định nghĩa hàm số xác định trên $R$ như sau:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$






## Định nghĩa

Nếu $F$ khả tích trên $R$ ta nói $f$ khả tích trên $D$ và định nghĩa



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R F(x,y)dxdy$$

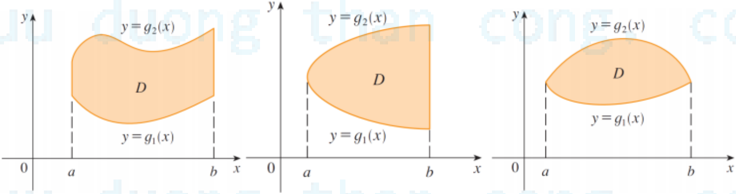
# Một số tính chất

- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
- $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$
- Nếu $f(x,y) \leq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$, thì:
$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$
- Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1$, $D_2$ không che phủ nhau, thì
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$
- Diện tích miền $D$ là:
$$\iint_D dxdy$$
- Thể tích của khối trụ có đáy là miền $D$ và giới hạn trên bởi mặt $z = f(x,y) \geq 0$ là:
$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Miền phẳng $D$ được nói là đơn giản theo $Oy$ (loại 1) nếu nó nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục, tức là:

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Với $g_1, g_2$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$.



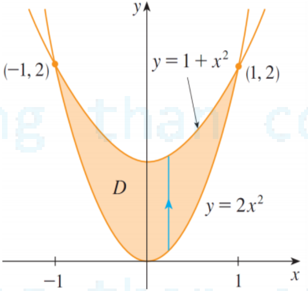

Nếu $f$ liên tục trên miền:

$D = \{(x,y) : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

## Ví dụ

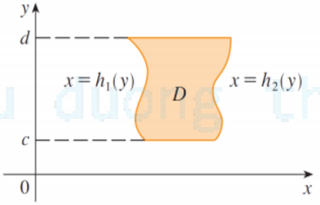
Tính $I = \iint_D (x + 2y)dxdy$ với $D$ là miền giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$

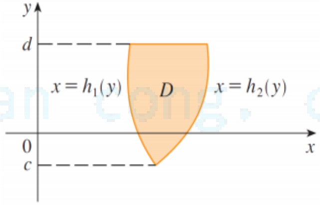


# Miền đơn giản theo $Ox$ (loại II)

Miền phẳng $D$ gọi là đơn giản theo $Ox$ (loại II) nếu:

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



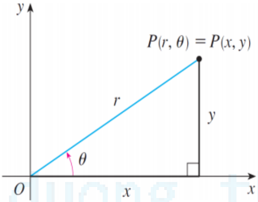




Nếu $f$ liên tục thì

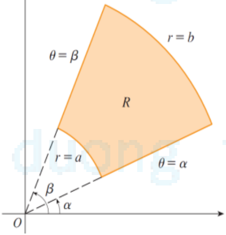
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

## Ví dụ

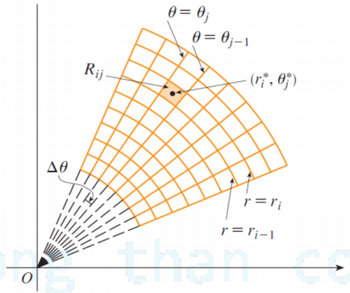
Tính $\iint_D xydxdy$, với $D$ là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$




$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$




*Hình chữ nhật trong tọa độ cực* là tập có dạng:
$R = \{(x, y) :$
$a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$




Diện tích của $R_{ij}$:

$\Delta A_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta =$
$\frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta$

Với $r_i^* = (r_{i-1} + r_i)/2$

# Đổi biến sang tọa độ cực (1)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j, r_i^*\sin\theta_j) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

Nếu $f$ liên tục trên miền:

$$R: 0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta$$

Trong đó $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Thì ta có

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

## Ví dụ

- Tính $\iint_R (3x + 4y^2)dxdy$, với $R$ là miền trong nửa mặt phẳng trên, giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$
- Tính thể tích của khối giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$ và parabol tròn xoay $z = 1 - x^2 - y^2$

# Đổi biến sang tọa độ cực (2)

Nếu $f$ liên tục trên miền có dạng:

$$D = \{(x, y) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

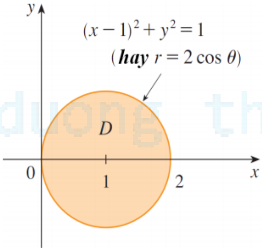
thì

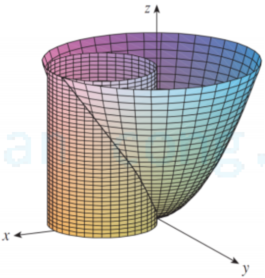
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

## Ví dụ

Tìm thể tích vật thể nằm bên dưới parabol tròn xoay $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt phẳng $Oxy$ và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$








$$D = \{(x, y) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$$

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 rdrd\theta = \frac{3\pi}{2}$$

## Ví dụ

Tính các tích phân sau:

1. $\iint_D (x+y)dxdy$ miền $D$ được giới hạn bởi $y=\sqrt{x}, y=x^2$.
2. $\iint_D (2x-4y)dydx$, với $D$ là miền giới hạn bởi parabol $x=y^2-2y$ và đường thẳng $x=3$.
3. $\iint_D xydxdy$, $D$ giới hạn bởi trục $Oy$, $x+y=1$ và $x-2y=4$
4. $\iint_D y^3dxdy$, $D$ là tam giác với đỉnh: $(0,2),(1,1),(3,2)$.
5. $\iint_D (x+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy$, với $D$ là miền: $x^2+y^2\leq 4, y\geq x$.

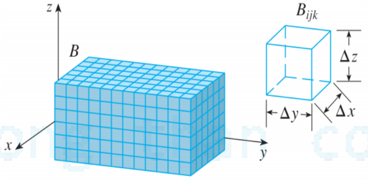
# Tích phân trên hình hộp chữ nhật

- Xét hàm $f$ xác định trên hình hộp chữ nhật:

$$B = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\}$$

- Nếu $P_x, P_y, P_z$ là một phân hoạch của $[a,b]$, $[c,d]$, $[r,s]$. Thì $P = P_x \times P_y \times P_z$ gọi là một phân hoạch của $B$.





$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

gọi là tổng Riemann của $f$ ứng với $P$. Ký hiệu $\mathcal{P}(B)$ là tập các phân hoạch của $B$ và $|P| = max\{\Delta V_{ijk}\}$.

## Định nghĩa

Hàm $f$ gọi là khả tích Riemann trên $B$ nếu có $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ thỏa:

$$|S(f,P) - \alpha| \leq \epsilon, \forall P \in \mathcal{P}(B), |P| \leq \delta$$

Khi đó ta gọi $\alpha$ là tích phân của $f$ trên $B$ và ký hiệu:

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \alpha$$

## Định lý

*Nếu $f$ liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, thì*

$$\iiint_B f(x, y, z) dxdydz = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dxdydz$$

*Tích phân ở vế phải là tích phân lặp.*
*Có 6 thứ tự lấy tích phân trong tích phân lặp ở vế phải, và tất cả các cách lấy thứ tự đó đều cho kết quả giống nhau.*



## Ví dụ

Tính tích phân 3 lớp $\iiint_B xyz^2 dxdydz$, với $B$ là:

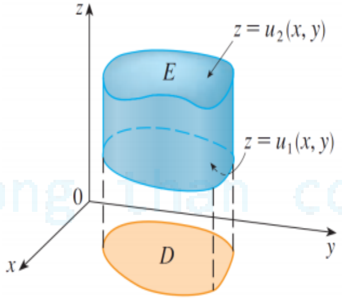
$$B = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

# Tích phân trên khối bị chặn

Gọi $E$ là khối bị chặn bất kỳ được bao bởi hình hộp chữ nhật $B$. Ta định nghĩa hàm $F$ trên $B$ như sau:

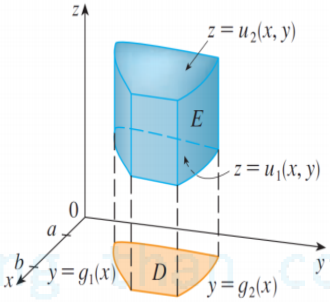
$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in E \\ 0 & (x,y,z) \in B \backslash E \end{cases}$$

# Khối đơn giản theo $0z$ (loại 1)




$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$
Nếu $f$ liên tục trên $E$ thì

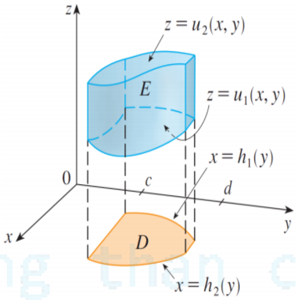
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[ \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$




$E = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$



$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$



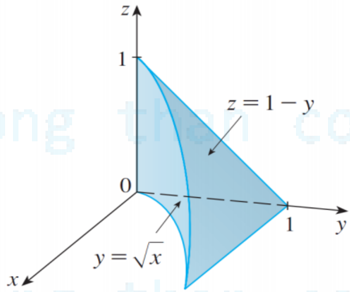

$E = \{(x,y,z) : c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$



$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

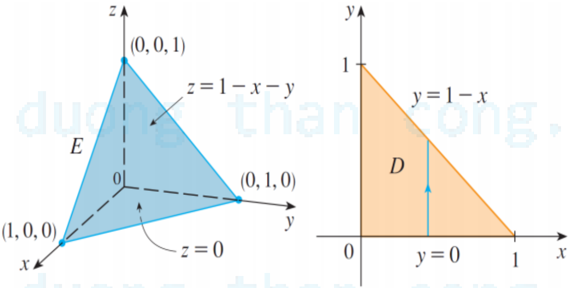
## Ví dụ

Tính tích phân $\iiint_E y dxdydz$. Trong đó $E$ là khối trong $\mathbb{R}^3$ giới hạn bởi $0 \leq z \leq 1 - y, \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$.

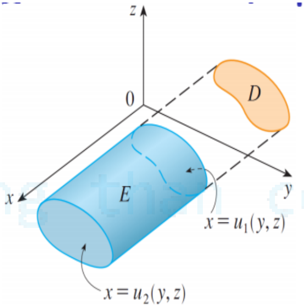


## Ví dụ

Tính $\iiint_E z dxdydz$, với $E$ là khối tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$, và $x + y + z = 1$.



# Khối đơn giản theo $Ox$ (loại 2)

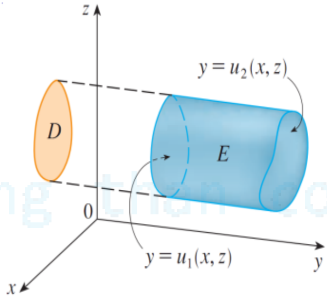





$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left[ \int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right] dydz$$

# Khối đơn giản theo $Oy$ (loại 3)

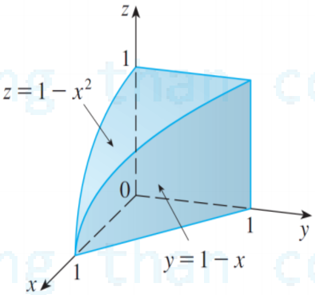



$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, u_1(y, z) \leq y \leq u_2(y, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left[ \int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)dy \right] dxdz$$

## Ví dụ

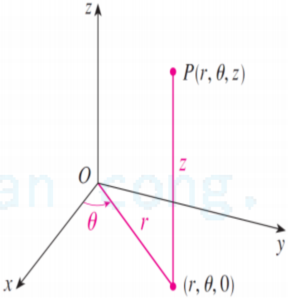
Tính tích phân $\iiint_E z dx dy dz$. Trong đó $E$ là khối trong $\mathbb{R}^3$ giới hạn bởi $0 \le y \le 1 - x$, $(x, z) \in D$ với $D$ là miền trong mặt phẳng $zOx$ giới hạn bởi các đường $z = 0, z = 1 - x^2, x \in [0, 1]$.



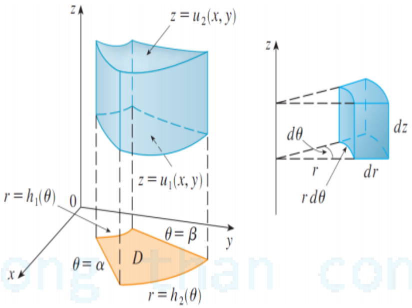
# Tích phân ba lớp trong tọa độ trụ

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$




$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$ với
$D = \{(r, \theta) : \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$

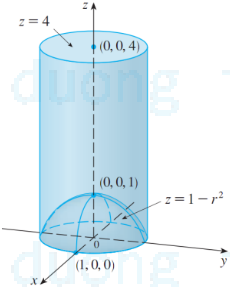



$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dzdrd\theta$$

## Ví dụ

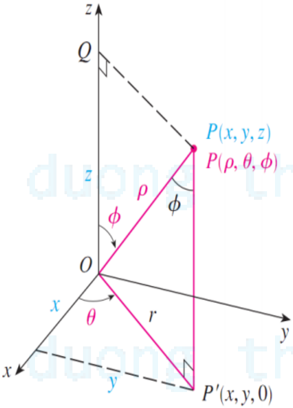
Tính $I = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$. Trong đó $E$ là khối nằm bên trong mặt trụ $x^2+y^2=1$, bên dưới mặt $z=4$ và bên trên parabol tròn xoay $z = 1 - x^2 - y^2$.




$$E = \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1, 1 - r^2 \le z \le 4\}$$

$$I = \frac{12\pi}{5}$$

# Tích phân ba lớp trong tọa độ cầu




$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

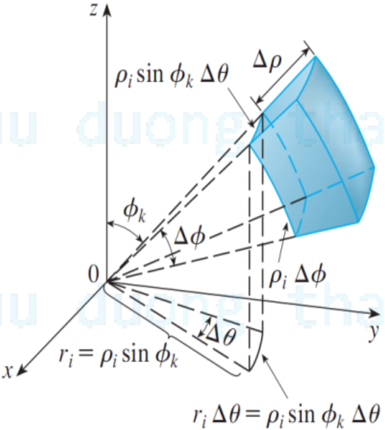
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

## *Hình chữ nhật trong tọa độ cầu*

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$




Thể tích của $E_{ijk}$:

$$\Delta V_{ijk} \approx \rho_i^2 \sin\phi_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

*Tổng Riemann*:

$$\sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

# Đổi biến trong tọa độ cầu

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

Với miền tổng quát hơn

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) : \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

## Ví dụ

Tính tích phân ba lớp

$$\iiint_E (x+y)\,dxdydz$$

trong đó $E$ là khối giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le 4$ và $z \le 0$, $y \ge 0$.