Dãy số

Định nghĩa

- Dãy số là một dãy vô hạn các phần tử là số thực được xếp theo một thứ tự nào đó

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

- Hay nói cách khác, dãy số là một ánh xạ từ $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Dãy số $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ được ký hiệu là $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay (a_n)
- Dãy số cũng có thể được đánh số từ số 0 hoặc từ bất kỳ số tự nhiên nào khác.

Ví dụ

1. Dãy $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ có $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1} \dots\right\}$$

2. Dãy $\{(-1)^n\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ có $a_n = (-1)^n\sqrt{n-3}$

$$0, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, (-1)^n\sqrt{n-3} \dots$$

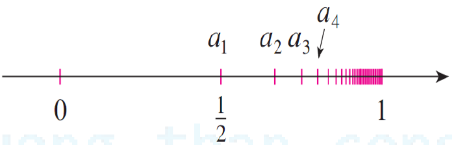
3. Dãy $\{\cos(n\pi/3)\}_{n=0}^{\infty}$ có $a_n = \cos(n\pi/3)$

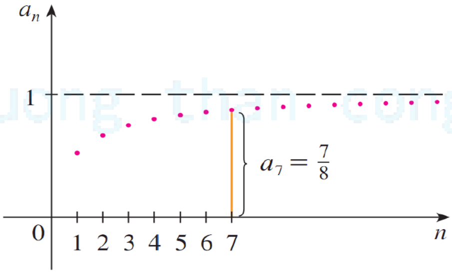
$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \dots, \cos(n\pi/3), \dots$$

4. Dãy Fibonacci $\{a_n\}$ được định nghĩa bằng quy nạp

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$$

Xét dãy số $a_n = \frac{n}{n+1}$





Ta thấy khi n càng lớn thì giá trị của $a_n = \frac{n}{n+1}$ tiến đến 1. Trong trường hợp này ta nói dãy $\{n/(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn là 1 và ta viết

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Định nghĩa

Dãy số (a_n) được nói là **hội tụ** nếu tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - L| < \epsilon, \forall n > N$$

Khi đó ta nói L là giới hạn của dãy (a_n), ký hiệu

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ hay viết tắt là } L = \lim a_n$$

Ta cũng viết là $a_n \to L$ (đọc là a_n tiến về L) khi $n \to \infty$ (đọc là n tiến về $+\infty$).

Ví dụ

- Dãy hằng $a_n = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, là dãy hội tụ và có giới hạn là α.
- Dãy $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy hội tụ và có giới hạn là 0.

Định nghĩa

Dãy (a_n) được nói là có giới hạn bằng ∞ (tương ứng $-\infty$) nếu mọi số thực M đều tồn tại số tự nhiên N sao cho $a_n > M, \forall n \geq N$ (tương ứng $a_n < M, \forall n > N$). Khi đó ta ký hiệu $\lim a_n = \infty$ (tương ứng $\lim a_n = -\infty$) và nói dãy (a_n) có giới hạn bằng ∞ hoặc $-\infty$. Nếu $\lim a_n = \pm\infty$ hoặc $\lim a_n$ không tồn tại thì ta nói (a_n) là dãy phân kỳ.

Một số tính chất

Nếu (a_n) và (b_n) là các dãy hội tụ và có giới hạn lần lượt là a và b thì các dãy $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$, $\sqrt{a_n}$, $(a_n)^r$, và αa_n, với $\alpha \in \mathbb{R}$ cũng là các dãy hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a},$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^r = a^r$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a.$$

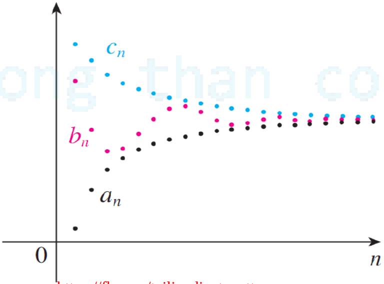
Khi $b \neq 0$ và $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, dãy $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Mệnh đề

i) *Nếu* (x_n) *là dãy hội tụ và* $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0.$
Tổng quát, nếu (x_n) *và* (y_n) *là hai dãy hội tụ và* $x_n \geq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

ii) *(Tiêu chuẩn giới hạn kẹp) Xét ba dãy số* (a_n), (b_n), *và* (c_n) *với* $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Nếu các dãy* (a_n) *và* (c_n) *hội tụ và có cùng giới hạn là* α *thì* (b_n) *cũng là dãy hội tụ và cũng có giới hạn là* α.



Định nghĩa

Dãy (a_n) được gọi là dãy tăng nếu: $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Dãy (a_n) được gọi là dãy giảm nếu: $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Nếu (a_n) là dãy tăng hoặc giảm thì ta nói dãy (a_n) là dãy đơn điệu.

Định nghĩa

Dãy (a_n) gọi là bị chặn trên nếu: $\exists M \in \mathbb{R}, a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Dãy (a_n) gọi là bị chặn dưới nếu: $\exists N \in \mathbb{R}, a_n \geq N, \forall n \in \mathbb{N}$.
Nếu (a_n) bị chặn trên và dưới thì ta nói nó bị chặn.

Mệnh đề (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Ta định nghĩa

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Các giới hạn cơ bản

1. Nếu $a > 0$, thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \infty$.
2. Nếu $|a| < 1$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, nếu $a > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
3. Nếu $a > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
4. Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. Đồng thời $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.
5. Giới hạn liên quan số e: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.

Ví dụ

Tính các giới hạn các dãy số sau:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1})$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{n}+1}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.5^n-2^n}{4^n+2.5^n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n2^n+1}{3^n+n^2}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin\sqrt{n}}{n^2+n-1}$

Định nghĩa

Dãy a_n gọi là dãy *Cauchy* nếu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \epsilon$$

Định lý

Dãy hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Ví dụ

Tính các giới hạn các dãy số sau:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+n^3}{1+2n^3}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3n^2+n} - n\sqrt{3})$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{3n})^{2n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3^{n+2}}{2^n+3^n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+n+1}{(n+1)!+2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{3n\sqrt{n}+2}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Định nghĩa

Xét dãy số thực $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ta định nghĩa tổng tất cả các số hạng của nó,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

và ta gọi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, hay vắn tắt $\sum a_n$, là một chuỗi số, đọc là chuỗi a_n.

Ví dụ

1. Với $a_n = n$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$
2. Với $a_n = \frac{1}{2^n}$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

Định nghĩa

Với chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, đặt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}$. Ta gọi s_n là tổng riêng phần (thứ n) của chuỗi số $\sum a_n$.

Định nghĩa

Nếu dãy tổng riêng phần (s_n) hội tụ, ta nói $\sum a_n$ hội tụ và giá trị $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ được gọi là tổng của chuỗi $\sum a_n$, ký hiệu $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Ngược lại, nếu (s_n) phân kỳ, ta nói $\sum a_n$ phân kỳ.

Ví dụ

Tính tổng riêng phần và tổng (nếu có) của các chuỗi:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau đây

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k}{k+1}$

Chuỗi hình học

Định nghĩa

Cho $a \neq 0, r \in \mathbb{R}$, chuỗi hình học là chuỗi số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots$$

Mệnh đề

Nếu $|r| < 1$ *thì chuỗi hình học hội tụ, và khi đó*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Ngược lại, nếu $|r| > 1$ *thì chuỗi hình học phân kỳ.*

Ví dụ

1. Các chuỗi số sau có hội tụ không? Tính tổng (nếu có) của nó.
   a. $4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \ldots$
   b. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$
2. Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, với $|x| < 1$.
3. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây thành phân số
   a. $2.3\overline{17} = 2.3171717...$
   b. $0.\overline{9} = 0.999999...$

Các tính chất

Mệnh đề

Nếu $\sum a_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Chú ý

- *Chiều ngược lại không hẳn đúng. Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum a_n$ *cũng có thể hội tụ, cũng có thể phân kỳ. Chẳng hạn ta có dãy* $\frac{1}{n} \to 0$ *nhưng* $\sum \frac{1}{n}$ *phân kỳ.*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ

Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n}$

Mệnh đề

Nếu các chuỗi $\sum a_n$, $\sum b_n$ *đều hội tụ thì các chuỗi* $\sum ca_n (c \in \mathbb{R})$, $\sum (a_n + b_n)$ *và* $\sum (a_n - b_n)$ *cũng hội tụ, và:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Ví dụ

Tính tổng (nếu có) của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$

Mệnh đề

Với mọi $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

Tiêu chuẩn tích phân

Mệnh đề

Cho f là hàm số dương, giảm, liên tục trên $[1, +\infty)$, đặt $a_n = f(n)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý

Do sự hội tụ của chuỗi số không phụ thuộc vào hữu hạn số ban đầu, nên chỉ cần f dương và giảm trên khoảng $[M, +\infty)$ với $M \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$
4. Với giá trị nào của p thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ?

Tiêu chuẩn so sánh 1 (hiệu số)

Mệnh đề

Cho $\sum a_n, \sum b_n$ *là các chuỗi số không âm (nghĩa là* $a_n \geq 0, b_n \geq 0, \forall n$*). Khi đó:*

- *Nếu* $b_n \geq a_n, \forall n$ *và* $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ,*
- *Nếu* $b_n \leq a_n, \forall n$ *và* $\sum b_n$ *phân kỳ thì* $\sum a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n\sqrt{n}+2)}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

Mệnh đề

Cho $\sum a_n$, $\sum b_n$ *là các chuỗi số không âm*, $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, +\infty)$, *thì* $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ*.
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *và tổng* $\sum b_n$ *hội tụ thì* $\sum a_n$ *hội tụ*.

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-2n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^{n+1}+n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n(n+2)(n^2+1)}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n^2+1}{3n^2}$

Định nghĩa

Chuỗi đan dấu là chuỗi mà số hạng tổng quát có dạng $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ hoặc $a_n = (-1)^n b_n$ trong đó $b_n > 0$.

Ví dụ

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Mệnh đề

Nếu dãy (b_n) *dương, giảm và hội tụ về* 0 *thì chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$ *hội tụ.*

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi đan dấu sau:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+1}$
4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$

Hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \text{ hội tụ}$$

Nếu $\sum a_n$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối, ta nói $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện.

Ví dụ

Các chuỗi sau có hội tụ, có hội tụ tuyệt đối không?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

Mệnh đề

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.*

Ví dụ

Các chuỗi sau có hội tụ, hội tụ tuyệt đối không?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ln(2n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-1/n}}{n^3}$

Tiêu chuẩn tỷ số (của d'Alembert)

Mệnh đề

Đặt $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

- *Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối.*
- *Nếu* $L > 1$ *hoặc* $L = +\infty$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ

Các chuỗi sau có hội tụ không?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n(n+1)}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$

Tiêu chuẩn căn số của Cauchy

Mệnh đề

Đặt $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. *Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối.*
2. *Nếu* $L > 1$ *hoặc* $L = +\infty$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ

Các chuỗi số sau có hội tụ không?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3n}{3n^2+2n}\right)^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n}$

để xét sự hội tụ của chuỗi số ta có một số chú ý sau:

Chú ý

- *Chuỗi gần giống chuỗi* $\sum 1/n^p$ *hay chuỗi hình học thì dùng tiêu chuẩn so sánh. Chuỗi không dương thì dùng tiêu chuẩn so sánh cho* $\sum |a_n|$ *rồi dùng tiêu chuẩn trị tuyệt đối.*
- *Nếu thấy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi phân kỳ.*
- *Chuỗi đan dấu thì dùng tiêu chuẩn Leibnitz.*
- *Chuỗi có giai thừa hoặc mũ thì dùng tiêu chuẩn tỷ số (của d'Alembert).*
- *Nếu* a_n *có dạng* $(b_n)^n$ *thì dùng tiêu chuẩn căn số của Cauchy.*
- *Nếu* $a_n = f(n)$ *mà* $\int f(x)dx$ *dễ tính thì dùng tiêu chuẩn tích phân.*

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3+4n^2+2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+2}{2n+1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4+1}$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{2n+3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n-1}$
10. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$