Bài giảng môn học Toán 2

Nguyễn Anh Thi

2016

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Định nghĩa phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập x với hàm cần tìm y và các đạo hàm của nó $y', y", \ldots, y^{(n)}$. Như vậy phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}) = 0$$

- Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình.
- Nếu thay y bằng hàm số $y(x)$ vào phương trình vi phân, ta được đồng nhất thức, thì ta nói $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng: $F(x, y, y') = 0$

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$

- Hàm số $y = \varphi(x, C)$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu với mọi $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$.
- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho C một giá trị cụ thể gọi là nghiệm riêng.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y' = \sin x$ và tìm nghiệm của bài toán Cauchy $y' = \sin x$, $y(0) = 1$.

Phương trình vi phân dạng tách biến

Định nghĩa

Phương trình vi phân dạng tách biến là phương trình vi phân có dạng $y' = f(x)g(y)$.

Cách giải: Với điều kiện $g(y) \neq 0$, chia hai vế cho $g(y)$ ta được $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Lấy tích phân hai vế.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân:

1. $y' = 5x^2$.
2. $xy' = y^2 + 1$.
3. $y' = x^2y^3$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là phương trình vi phân có dạng $y' + p(x)y = q(x)$

Cách giải: Gọi $P(x)$ là một nguyên hàm của $p(x)$. Nhân hai vế cho $e^{P(x)}$ ta được

$$\begin{aligned} e^{P(x)}y' + e^{P(x)}p(x)y &= e^{P(x)}q(x) \\ (e^{P(x)}y)' &= e^{P(x)}q(x) \\ e^{P(x)}y &= \int e^{P(x)}q(x)dx \\ y &= e^{-P(x)} \int e^{P(x)}q(x)dx \end{aligned}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

1. $y' - xy = x$.
2. $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} - x\cos x = 0$
3. $x^2y' + xy = 1, x > 0, y(1) = 2$.

Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa

Phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu có $u(x,y)$ thỏa
$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
Nếu tìm được $u(x,y)$ thì phương trình trở thành $du(x,y) = 0$, suy ra $u(x,y) = C$.

Mệnh đề (Điều kiện đủ để có $u(x,y)$)

Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ *đều liên tục trên* $D \subset \mathbb{R}$ *và* $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$. *Thì tồn tại hàm* $u(x,y)$ *thỏa* $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Cách tìm $u(x,y)$

Cố định y, tính tích phân theo x 2 vế của $u_x(x,y) = P(x,y)$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = \phi(x,y) + C(y)$$

Cố định x, lấy đạo hàm theo y

$$u_y(x,y) = \phi_y(x,y) + C'(y).$$

Cho $u_y(x,y) = Q(x,y)$, suy ra $C(y)$ và ta được $u(x,y)$.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

1. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$
2. $(x^2 + 4y)y' + 2xy + 1 = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}, y(0) = 2$

Phương trình vi phân đẳng cấp

Định nghĩa

Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình vi phân có dạng $y' = h(\frac{y}{x})$.

Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x}$ và đưa về dạng tách biến.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân

1. $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}$
2. $\begin{cases} xy' &= y + 3\sqrt{xy} \\ y(1) &= 9 \end{cases}$
3. $xy' = (3x+2y)ln\frac{3x+2y}{x} + y$

Giải các phương trình vi phân

1. $xdy = (x^5e^x + 4y)dx$
2. $(\sqrt{x} + y) + (\sqrt{y} + x)\frac{dy}{dx} = 0$
3. $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$
5. $x^2y' = y^2 - xy + x^2, y(1) = 2$
6. $y' = \frac{x^2+3y}{x}, y(2) = 8$
7. $y' - \frac{y}{x-1} = x^2(x^2 - 1)$
8. $\sin(2x)dx + \frac{ydy}{x(y+1)} = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
9. $xy' = \frac{y^2}{y-x}, y(1) = e$
10. $(x^2 + 1)y' + y(y - 1) = 0$

Phương trình vi phân cấp 2

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình vi phân có dạng $F(x, y, y', y'') = 0$ hoặc $y'' = f(x, y, y')$.

Ví dụ

Các phương trình sau đây là phương trình vi phân cấp 2: $x^3y'' + 2xy^2 + e^xy + 3x = 0$, $y'' = 8e^xy' + y$.

Định lý

Xét phương trình $y'' = f(x, y, y')$. Nếu f liên tục trên miền mở chứa điểm (x_0, y_0, y_1) thì phương trình đã cho tồn tại nghiệm $y = y(x)$ thỏa $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}$ và $\frac{\partial f}{\partial y'}$ đều liên tục thì nghiệm nói trên là duy nhất.

Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

Phương trình vi phân cấp 2 $y'' = f(x, y, y')$ nếu có các dạng sau thì có thể giảm cấp.

Trường hợp 1: Nếu vế phải không chứa y, y', lấy tích phân hai lần, ta được nghiệm.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y'' = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Trường hợp 2: Nếu vế phải không chứa y, đặt $u = y'$ ta được phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y'' = x - \frac{y'}{x}$.

Nếu vế phải không chứa x, coi y' là hàm theo y, nghĩa là đặt $y' = p(y)$ thì $y'' = pp'$. Giải p theo y.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $2yy'' + y'^2 = 0$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng
$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad (1)$ với $P(x) \neq 0$.

- Nếu $G(x) = 0$ thì (1) được gọi là thuần nhất. Như vậy phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất là phương trình có dạng $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (2)$
- Nếu $G(x) \neq 0$ thì (1) được gọi là không thuần nhất.

Cấu trúc nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Tính chất

Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là 2 nghiệm của* (2) *thì với mọi hằng số* c_1, c_2*, ta có* $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *cũng là nghiệm của* 2.

Định nghĩa

Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ kéo theo $c_1 = c_2 = 0$.

Mệnh đề

Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là các nghiệm độc lập tuyến tính của* (2) *thì nghiệm tổng quát của* (2) *được cho bởi*
$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *trong đó* c_1, c_2 *là các hằng số tùy ý.*

Cấu trúc nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng

Định nghĩa

Nếu P, Q, R là các hằng số thì (2) gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng. Như vậy phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng là phương trình vi phân có dạng $ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$ với $a \neq 0$.

Ta sẽ tìm 2 nghiệm độc lập tuyến tính của (3) dưới dạng $y(x) = e^{rx}$. Ta có $y'(x) = re^{rx}, y''(x) = r^2e^{rx}$. Thay vào (3) $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Nhưng $e^{rx} \neq 0, \forall x$ nên $ar^2 + br + c = 0$

Định nghĩa

Phương trình $ar^2 + br + c = 0 \quad (4)$ gọi là phương trình đặc trưng của (3).

- Nếu phương trình đặc trưng (4) có 2 nghiệm thực phân biệt r_1, r_2 thì nghiệm tổng quát của (3) là

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (4) có nghiệm thực duy nhất là r_0 thì nghiệm tổng quát của (3) là

$$y(x) = c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (4) có nghiệm ảo $r = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của (3) là

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y'' + y' - 6y = 0;$
2. $3y'' + y' - y = 0;$
3. $4y'' + 12y' + 9y = 0;$
4. $y'' - 6y' + 13y = 0.$

Bài toán giá trị đầu

Định nghĩa

Bài toán giá trị đầu cho phương trình (1) và (2) là bài toán tìm nghiệm $y(x)$ thỏa $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

1. $y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3.$

Bài toán giá trị biên

Định nghĩa

Bài toán giá trị biên cho phương trình (1) và (2) là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ thỏa $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y(1) = 3$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất hệ số hằng

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất hệ số hằng là phương trình vi phân có dạng

$$ay'' + by' + cy = G(x) \qquad (5)$$

với $G(x) \neq 0$.

Cách giải: Gọi $y = y_0(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $ay'' + by' + cy = 0$, thì nghiệm tổng quát của (5) có dạng:

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$$

trong đó $y_r(x)$ là một nghiệm riêng của (5). Vậy nếu tìm được nghiệm riêng thì sẽ tìm được nghiệm tổng quát của (5).

Tìm nghiệm riêng

1. Nếu $G(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n thì một nghiệm riêng của (5) có dạng $y_r(x) = x^s e^{\alpha x}Q_n(x)$. Trong đó, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n, có $n+1$ hệ số cần xác định, và

$$s = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha \text{ không là nghiệm của phương trình đặc trưng} \\ 1 & \text{nếu } \alpha \text{ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng} \\ 2 & \text{nếu } \alpha \text{ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.} \end{cases}$$

Tìm nghiệm riêng

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

1. $y'' + 4y = e^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x - 2xe^x$
3. $y'' + y' - 2y = x^2$

Tìm nghiệm riêng

2. Nếu $G(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n, $Q_m(x)$ là đa thức bậc m thì một nghiệm riêng của (5) có dạng

$$y_r(x) = x^s e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x + T_k(x)\sin\beta x].$$

Trong đó $k = max\{n, m\}, R_k(x), T_k(x)$ là các đa thức bậc k cần xác định và

$$s = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha + i\beta \text{ không là nghiệm của pt đặc trưng} \\ 1 & \text{nếu } \alpha + i\beta \text{ là nghiệm của pt đặc trưng.} \end{cases}$$

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân

1. $y'' + y = 3\sin x, y(0) = y'(\pi) = 1,$
2. $y'' - 5y' + 6y = 3\sin 2x - 2\cos 2x,$
3. $y'' + y' - 2y = e^{2x}(5\cos x + 3\sin x).$

3. Nếu $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$ với $G_1(x), G_2(x)$ có một trong hai dạng trên, thì một nghiệm riêng của (5) có dạng

$$y_r(x) = y_{r1}(x) + y_{r2}(x)$$

với y_{r1}, y_{r2} là các nghiệm riêng của các phương trình $ay'' + by' + cy = G_1(x)$, $ay'' + by' + cy = G_2(x)$.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

$$y'' - 4y = xe^x + \cos 2x.$$