ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP HỒ CHÍ MINH
KHOA TÓAN-TIN HỌC

GIÁO TRÌNH

TOÁN GIẢI TÍCH A4

Tiến sĩ Nguyễn Thanh Vũ

Niên khóa 2009-2010

CHƯƠNG 1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

1. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1.1 Khái niệm

– Xét một phương trình mà ẩn là hàm số một biến y, chẳng hạn như

$$y'' - 3xy + 5y'y = 0,$$

trong đó có chứa đạo hàm của y. Phương trình này được gọi là phương trình vi phân .

Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình là cấp 2, nên phương trình này được gọi là phương trình vi phân cấp 2.

– Phương trình $y'' - 3xy' + 5y = 0$ được gọi là phương trình vi phân **tuyến tính** cấp 2.

– Phương trình $3y' + 7xy = \sin x$ được gọi là phương trình vi phân **tuyến tính** cấp 1.

– Phương trình $y'' - 3xy + 5y'y = 0$ là phương trình vi phân nhưng **không tuyến tính**.

– Phương trình vi phân $y' = 2xy - 3y^2$ có dạng $y' = f(x, y)$ và được gọi là ***phương trình đã giải ra đối với đạo hàm***.

– Coi phương trình vi phân $y' = 1$. Nghiệm trên $\mathbb{R}$ của phương trình vi phân này có dạng y=x+C với C là hằng số tùy ý. Người ta gọi y=x+C, trong đó C là hằng số tùy ý, là **nghiệm tổng quát** (general solution) của phương trình vi phân $y' = 1$ trên $\mathbb{R}$.

Các hàm số y=x+1, y=x+2 được gọi là các **nghiệm đặc biệt** (particular solution) của phương trình vi phân $y' = 1$ trên $\mathbb{R}$.

– Đường biểu diễn của nghiệm y = y(x) được gọi là **đường cong nghiệm** hay **đường cong tích phân** của phương trình vi phân.

– Xét phương trình vi phân $yy' = -x$. Lấy tích phân hai vế ta được $y^2 = -x^2 + C$. Hệ thức $y^2 = -x^2 + C$ được gọi là **nghiệm ẩn** (implicit solution) của phương trình vi phân. Khi nào nghiệm có dạng y=f(x) thì nó được gọi là **nghiệm tường minh** (explicit solution).

1.2. Định nghĩa phương trình vi phân

– Một phương trình vi phân là phương trình hàm (một biến) có chứa đạo hàm của hàm cần tìm. Nếu bậc cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân là n, thì phương trình này được gọi là phương trình vi phân cấp n.

– Xét phương trình vi phân cấp n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

trong đó biểu thức $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ thực sự chứa $y^{(n)}$.

Hàm số y = y(x) được gọi là nghiệm của phương trình vi phân trên khoảng I (với $I \subset R$) nếu hàm số y = y(x) thỏa tính chất

$$\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Chú thích:

Tính chất trên bao hàm hai tính chất sau

- Hàm số y khả vi tới cấp n trên I, tức các đạo hàm y'(x), y''(x),... $y^{(n)}(x)$ tồn tại với mọi $x \in I$.
- $\forall x \in I$, $(x, y(x),\dots, y^{(n)}(x))$ thuộc miền xác định của F.

1.2 Định nghĩa nghiệm

– Một hệ thức G(x,y)=0 được gọi là nghiệm ẩn trên khoảng I của phương trình vi phân nếu tồn tại một hàm số y vừa thỏa hệ thức G(x,y(x))=0 vừa thỏa phương trình vi phân với mọi x thuộc I.

Ví dụ: Xét phương trình vi phân $yy' + x = 0$.

Lấy tích phân hai vế ta được $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$ hay $y^2 + x^2 = K$ với K là hằng số.

Ta thấy hệ thức $y^2 + x^2 = 25$ là một ***nghiệm ẩn của phương trình vi phân*** $yy' + x = 0$ trên khoảng $I = (-5, +5)$. Thật vậy, tồn tại hàm số y=$\sqrt{25 - x^2}$ xác định trên (-5,5) và thỏa

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 25 \\ yy' + x = \sqrt{25\text{-}x^2}\,\dfrac{\text{-x}}{\sqrt{25\text{-}x^2}} + x = 0 \end{cases}, \forall x \in I$$

– Nếu biểu thức của nghiệm có chứa tham số và mọi nghiệm của phương trình đều có dạng này (các nghiệm khác nhau thì ứng với các giá trị khác nhau của tham số), thì nghiệm này được gọi là ***nghiệm tổng quát của phương trình vi phân***.

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 25 \\ yy' + x = \sqrt{25\text{-}x^2}\,\dfrac{\text{-x}}{\sqrt{25\text{-}x^2}} + x = 0 \end{cases} ,\forall x \in I$$

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Trong đoạn này, một số phương pháp giải phương trình vi phân cấp 1 được trình bày. Mục đích của đoạn này chỉ là **giới thiệu** phương pháp, do đó có một số chỗ lý luận chưa đúng nhưng chúng tôi vẫn lướt qua. Chẳng hạn, việc chia hai vế của phương trình cho một đại lượng (đại lượng này có thể bằng 0) là không đúng về lý luận. Chúng tôi sẽ bổ sung các chỗ lý luận chưa đúng trong các đoạn sau.

2.1. Phương trình tách biến

Phương trình sau được gọi là phương trình tách biến : $h(y)y' = g(x)$

Dạng này có thể viết dưới các hình thức sau

$$h(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x) \;;\quad h(y)\,dy = g(x)\,dx \quad ; h(y)\,dy + f(x)\,dx = 0.$$

2.1.1. Phương pháp giải

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\int h(y)\,dy = \int g(x)dx$

$$H(y) = G(x) + C\,,$$

trong đó H là nguyên hàm của h và G là nguyên hàm của g.

Phương trình trên không còn chứa đạo hàm của y, nghiệm y của phương trình vi phân được xác định bởi phương trình này.

2.1.2. Thí dụ. Hãy giải phương trình $y' = 5x^2$ trên R....

Lời giải : Lấy nguyên hàm hai vế ta được nghiệm tổng quát như sau $y = \frac{5}{3}x^3 + C$.

2.1.3. Thí dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y^2y' = x - 5$ trên R.

Lời giải.

Lấy tích phân hai vế ta được $\int y^2 y'\,dx = \int (x-5)\,dx$

$$\int y^2 dy = \int (x-5)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C\right)^{1/3}$$

Ta thấy 3C là hằng số tùy ý vì C là hằng số tùy ý, do đó ta viết hằng số K thay cho 3C.
Nghiệm tổng quát của phương trình trên R là

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K\right)^{1/3}$$ với K là hằng số tùy ý.

2.1.4. Thí dụ Hãy giải phương trình $xy' = y^2 + 1$ trên $(0,+\infty)$.

Lời giải.

Chuyển vế của x và $y^2 + 1$ để đưa về dạng phương trình tách biến

$$\frac{1}{y^2+1}\,y' = \frac{1}{x}\,.$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\text{arctg}\, y = \ln|x| + C$, với C là hằng số.

Suy ra $y = \text{tg}\,(\ln|x| + C)$

2.1.5. Thí du Hãy giải phương trình $y' = x^2y^3$ trên R.

Lời giải.

Chuyển vế y^2 để đưa về dạng phương trình tách biến

$$\frac{y'}{y^2} = x^2 .$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int \frac{y'}{y^2}dx = \int x^2dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C \text{ , với C là hằng số.}$$

$$y = -\frac{3}{x^3 + 3C}$$

$$y = -\frac{3}{x^3 + k} \quad \text{với k là hằng số.} \qquad (*)$$

Chú thích

Phương trình trên có dạng y'(x)= a(x) b(y) . Phương trình này có một nghiệm đặc biệt là hàm hằng $y \equiv y_o$, trong đó y_o là số thỏa $b(y_o) = 0$. Khi chuyển phương trình y'(x)= a(x) b(y) qua dạng tách biến $\frac{1}{b(y)}$ y'(x)=a(x), nghiệm $y \equiv y_o$ thường bị mất.

Hàm $y \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình $y' = x^2y^3$, nhưng dạng (*) không chứa hàm này.

Bài tập: Từ bài tập 1 tới bài tập 25 (ở cuối chương 1).

2.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Sau đây là định lý về nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

2.2.1 Định lý

Cho phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0,$$

trong đó p là hàm liên tục trên khoảng $I \subset R$.

Gọi P là một nguyên hàm của p(x)

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên khoảng I là

$$y(x) = Ce^{-P(x)},$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p.

Nhân hai vế phương trình vi phân cho $e^{P(x)}$), ta được

$$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) = 0$$

$$\left(e^{P(x)}y(x)\right)' = 0$$

$$e^{P(x)}y(x) = C \text{ với C là hằng số}$$

Vậy $$y(x) = Ce^{-P(x)}$$

– *Chú thích:*

Phương trình *y' + p(x)y = 0 có dạng* y'(x)= a(x) b(y) và có thể giải bằng phương pháp tách biến như ví dụ 2.1.5.

2.2.2 Định lý

Cho phương trình vi phân vi phân tuyến tính cấp 1

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó p, q là các hàm liên tục theo x trên khoảng I.

Gọi P là một ngyên hàm của p(x)

Nghiệm tổng quát của phương trình này trên khoảng I là

$$y(x) = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)dx$$

Chú thích: Nghiệm có thể ghi dưới dạng sau

$$y(x) = e^{-P(x)}F(x) \quad với \quad F(x) = \int e^{P(x)}q(x)dx$$

hay $y(x) = e^{-P(x)}\left(F_1(x) + C\right)$ với F_1 là một nguyên hàm của $\left(e^{P(x)}q(x)\right)$.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p.

Nhân hai vế phương trình vi phân cho $e^{P(x)}$, ta được

$$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) = e^{P(x)}q(x)$$

hay $$\left(e^{P(x)}y(x)\right)' = e^{P(x)}q(x)$$

$$e^{P(x)}y(x) = \int e^{P(x)}q(x)dx$$

Vậy $$y(x) = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)dx$$

Chú thích:

— Hàm số $\mu(x) = e^{P(x)}$ được gọi là thừa số tích phân.

— Định lý 2.2.1 là trường hợp đặc biệt định lý 2.2.2. Thay vì chứng minh trực tiếp định lý 2.2.1, ta có thể áp dụng định lý 2.2.2 để chứng minh định lý 2.2.1

$$y(x) = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)dx \;=\; e^{-P(x)}\int 0dx = e^{-P(x)}.C$$

2.2.3. Thí du. Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y' - xy = x, \; \forall x \in R.$$

Lời giải.

Phương trình này có dạng tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$ với $p(x)=-x$ và $q(x)=x$.

– Ta có $\int p(x)dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_1$.

Chọn $P(x) = -\frac{x^2}{2}$ thì P là một nguyên hàm của p.

– Ta có $e^{P(x)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ và $e^{-P(x)} = e^{\frac{x^2}{2}}$

– Ta có F(x)= $\int e^{P(x)}q(x)dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}}xdx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$

– Vậy nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y(x) = e^{-P(x)}F(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right) = -1 + C\,e^{\frac{x^2}{2}}$$, với C là hằng số.

2.2.4. Thí du.

Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} - x\cos x = 0, \; \forall x \in (0, +\infty).$$

Lời giải.

Phương trình tương đương là $y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x, \; \forall x \in (0, +\infty)$.

Phương trình này có dạng tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$.

– Ta có $\int p(x)dx = \int \frac{-2}{x}dx = -2\ln|x| + C_1$.

Chọn $P(x) = -2\ln|x| = \ln(x^{-2})$ thì P là một nguyên hàm của p.

– Khi đó $e^{P(x)} = e^{\ln\left(x^{-2}\right)} = x^{-2}$ và $e^{-P(x)} = e^{2\ln|x|} = x^2$

– Ta có F(x)= $\int e^{P(x)}q(x)dx = \int x^{-2}x^2\cos x\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$, với C là hằng số.

– Vậy nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y(x) = e^{-P(x)}F(x) = x^2\left(\sin x + C\right) = x^2\sin x + Cx^2.$$

2.2.5. Định lý *Cho bài toán điều kiện đầu như sau*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ y(x_o) = y_o, \end{cases}$$

trong đó p và q là các hàm số liên tục trên R, x_o và y_o là các hằng số cho trước tùy ý.
Khi đó, bài toán có một nghiệm y duy nhất.

Chứng minh

Giả sử P là một nguyên hàm của p.
Theo định lý 2.2.2, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + p(x)y = q(x)$ là

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(F_1(x) + C\right)$$

với F là một nguyên hàm của $\left(e^{P(x)}q(x)\right)$

Dựa vào điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$, ta xác định hằng số C như sau:

$$y(x_0) = e^{-P(x_0)}\left(F_1(x_0) + C\right) \Leftrightarrow C = y(x_0)e^{P(x_0)} - F_1(x_0).$$

Hằng số C được xác định duy nhất nên nghiệm y được xác định duy nhất. Vậy bài toán trên luôn luôn có một nghiệm duy nhất.

Bài tập: Từ bài tập 26 tới bài 45 (ở cuối chương 1)

2.3. Phương trình vi phân toàn phần

– Phương trình M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0
hay M(x,y) + N(x,y)y' =0
được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm hai biến F thỏa

dF(x,y) = M (x, y)dx + N(x, y)dy.

- Khi đó phương trình vi phân trở thành

dF(x,y)=0.

F(x,y)=C với C là hằng số.

– Trong lý thuyết của hàm hai biến, ta có công thức

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,dy.$$

và
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

Từ đó, ta có định lý sau

2.3.1 Định lý

Cho phương trình vi phân M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.
Giả sử các đạo hàm riêng cấp 1 của M và N liên tục trên miền D của R^2
và
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Khi đó:
a) Tồn tại hàm hai biến F trên D thỏa

dF(x, y) = Mdx+ Ndy .

b) Phương trình vi phân trên trở thành

F(x,y)=C với C là hằng số.

2.2.2 Phương pháp giải

Khi gặp phương trình M(x, y)dx + N(x, y)dy= 0,
có
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$
ta sẽ tìm biểu thức của F dựa vào

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases}$$

Sau đó kết luận F(x, y) = C.

2.3.3 Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên khoảng (a,b) của phương trình vi phân $y - 3x^2 + (x - 1)y' = 0$. Biết rằng khoảng (a, b) không chứa 1.

Lời giải

Ta có $(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0$ hay M dx+N dy = 0 ,

trong đó $M = y - 3x^2$ và $N = x - 1$.

Dễ thấy N và M có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Đồng thời ta có $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (vì cùng bằng 1).

Do đó tồn tại hàm F xác định trên trên $\mathbf{R}^2$ thỏa

$$dF(x, y) = (y - 3x^2)dx + (x - 1)dy$$

– Ta xác định F như sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y - 3x^2 & (*) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x - 1 & (**) \end{cases}$$

(**)$\Rightarrow$ $F(x,y) = (x - 1)y + g(x)$ và $F(x,0)=g(x)$.

Kết hợp với (*) ta có

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,0) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = -x^3 + k, \text{ với k là hằng số.}$$

Chọn k = 0, ta được $F(x, y) = (x - 1)y - x^3$.

– Vậy phương trình vi phân ban đầu tương đương với

$$(x - 1)y - x^3 = C.$$

Bài tập: Từ bài tập 46 tới bài tập 59 (ở cuối chương 1).

2.4. Phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất).

Phương trình vi phân $y' = h\left(\dfrac{y}{x}\right)$, với h là hàm theo một biến $u = \dfrac{y}{x}$, được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

Chú thích

– Hàm f(x,y) được gọi là hàm thuần nhất bậc k nếu $f(tx,ty)= t^k f(x,y)$ với mọi số thực t.

Thí dụ : $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$ là hàm thuần nhất bậc 2.

– Nếu M và N là các hàm số thuần nhất có cùng bậc k thì phương trình sau là phương trình vi phân đẳng cấp : $M(x,y)+N(x,y)y'=0$.

2.4.1. Phương pháp giải. Phương pháp giải phương trình $y' = h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ như sau:

Bước 1 (đổi biến)

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì $y = ux$ và $y' = u'x + u$.

Khi đó, phương trình vi phân trở thành

$$u'x + u = h(u)$$
$$xu' = h(u) - u$$

Bước 2 (tách biến)

$$\frac{u'}{h(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{1}{h(u)-u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Phương trình sẽ có dạng sau

$$H(u) = \ell n|x| + C$$

$$H\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

2.4.2. Thí dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ trên miền $(1,+\infty)$.

Lời giải

Phương trình vi phân tương đương là

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì $y = ux$ và $y' = u'x + u$.

Phương trình vi phân trở thành

$$u'x + u = u^2 + 2u$$

$$xu' = u^2 + u$$

$$\frac{u'}{u^2+u} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{u^2+u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\ell n|u| - \ell n|u+1| = \ell n|x| + \ell n|C|$, với C là hằng số tùy ý.

$$\ell n\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ell n|Cx|$$

$$\frac{u}{u+1} = \pm Cx$$

$\dfrac{u}{u+1} = kx$, với k là hằng số tùy ý.

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = kx$$

$$\frac{y}{y+x} = kx$$

$$(1-kx)y = kx^2$$

$$y = \frac{kx^2}{1-kx} \qquad (*)$$

Chú thích: Kết quả (*) chưa hòan chỉnh

Bài tập: Từ bài tập 60 tới bài tập 70 (ở cuối chương 1).

2.5. Đạo hàm là hàm số theo biến ax + by

Xét phương trình vi phân có dạng

$$y' = h(ax + by),$$

trong đó a và b là hằng số khác 0.

2.5.1. Phương pháp giải

Đặt $u = ax + by$, ta có

$$u' = a + by' \quad \text{hay} \quad y' = \frac{u'-a}{b}.$$

Phương trình $y' = h(ax + by)$ trở thành

$$\frac{u'-a}{b} = h(u)$$

$$u' = a + bh(u)$$

Đưa về phương trình vi phân dạng tách biến

$$\frac{u'}{a+bh(u)} = 1$$

$$\int \frac{1}{a+bh(u)}\,du = x + C$$

$$H(u) = x + C$$

$$H(ax+by) = x + C$$

2.5.2. Thí du. Hãy giải phương trình vi phân $y' = x - y + 1 + \dfrac{1}{y-x}$.

Lời giải.

Đặt $u = y - x$, ta có

$u' = y' - 1$ hay $y' = u' + 1$

Phương trình vi phân trên trở thành

$$u' + 1 = u + 1 + \frac{1}{u}$$

hay $$u' = u + \frac{1}{u}$$

$$\frac{u}{u^2+1}u' = 1 \qquad \text{hay} \qquad \frac{u}{u^2+1}du = dx$$

$$\int \frac{u}{u^2+1}du = \int dx \qquad \text{hay} \qquad \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du = \int dx$$

$\dfrac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| = x + k$, với k là hằng số tùy ý.

$$\ln\left(u^2+1\right) = 2x + 2k$$

$$u^2 + 1 = e^{2x+2k} = e^{2k}e^{2x} .$$

$u^2 + 1 = Ce^{2x}$ với C là hằng số dương tùy ý.

$$(y-x)^2 + 1 = Ce^{2x}$$

Bài tập: Từ bài tập 71 tới bài tập 75 (ở cuối chương 1).

2.6. Phương trình vi phân Bernoulli

Xét phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n ,$$

trong đó P, Q là các hàm số liên tục trên khoảng (a, b) và n là số thực.

Phương trình này được gọi là phương trình vi phân Bernoulli.

2.6.1.Phương pháp giải

• Trường hợp n = 0 hay n = 1: Phương trình trên có dạng là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Phương pháp giải đã trình bày trong đoạn 2.3.

• Trường hợp $n \neq 0$ và $n \neq 1$:

Xét $$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Đặt $u = y^{1-n}$ thì $u' = (1-n)y^{-n}y'$. Khi đó, phương trình trên trở thành

$$\frac{1}{1-n}u' + P(x)u = (1-n)\,Q(x)$$

$$u' + (1-n)\,P(x)u = (1-n)\,Q(x)$$

Ta đã đưa về dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, phương pháp giải của phương trình này đã được trình bày trong đoạn 2.3.

2.6.2.Thí dụ. Hãy giải phương trình vi phân $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$ trên R.

Lời giải

Chia 2 vế cho y^3, ta được

$$y^{-3}y' - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x.$$

Đặt $u = y^{-2}$ thì $u' = -2y^{-3}y'$. Phương trình trên trở thành

$$-\frac{1}{2}u' - 5u = -\frac{5}{2}x$$

$$u' + 10u = 5x$$

Phương trình này có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, ta tìm được

$$u = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \quad (*).$$

Chú thích: $y \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình vi phân nhưng (*) không chưa nghiệm này.
Bài tập: Từ bài tập 76 tới bài tập 80 (ở cuối chương 1).

2.7. Một dạng phương trình đưa về dạng đẳng cấp

Xét phương trình vi phân dạng $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

2.7.1. Phương pháp giải

α) Trường hợp $a_1b_2 = a_2b_1$.
Lúc đó tồn tại hằng số k thỏa $a_1 = ka_2$ và $b_1 = kb_2$.

Do đó $$y' = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = h(a_2x + b_2y)$$

Ta thấy y' là hàm số theo biến $u = a_2x + b_2y$, phương pháp giải phương trình dạng này đã trình bày trong đoạn 2.5.

β) Trường hợp $a_1b_2 \neq a_2b_1$

• Nếu $c_1 = c_2 = 0$, phương trình vi phân trên trở thành

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} \Leftrightarrow y' = \frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}.$$

Phương trình này có dạng phương trình đẳng cấp, phương pháp giải như trong đoạn 2.4.

• Nếu $c_1 \neq 0$ hay $c_2 \neq 0$, gọi (h, k) là nghiệm số của hệ phương trình bậc nhất

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases},$$

Như thế, (h,k) thỏa $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -a_1h - b_1k \\ c_2 = -a_2h - b_2k \end{cases}.$

Khi đó $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1x + b_1y_1 - a_1h - b_1k}{a_2x + b_2y - a_2h + b_2k} = \frac{a_1(x-h) + b_1(y-k)}{a_2(x-h) + b_2(y-k)}.$$

Đặt $X = x - h$ và $Y = y - k$ ta được $$y' = \frac{a_1(x-h) + b_1(y-k)}{a_2(x-h) + b_2(y-k)} \Leftrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$$

Phương trình có dạng phương trình đẳng cấp , phương pháp giải đã được trình bày trong đoạn 2.4.

2.7.2. Thí dụ Hãy giải phương trình vi phân $(x + y + 2)y' = 3x - y - 6$ trên R.

Lời giải.

Giả sử $x+y+2 \neq 0$.

Hệ phương trình $\begin{cases}3x - y - 6 = 0\\ x + y + 2 = 0\end{cases}$ có nghiệm là $\begin{cases}x = 1\\ y = -3\end{cases}$

Đặt X = x – 1 và Y = y + 3 thì $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình trở thành

$$y' = \frac{3(x-1)-(y+3)}{(x-1)+(y+3)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

Theo phương pháp giải phương trình vi phân dạng đẳng cấp, ta đặt u là hàm số thỏa Y = uX.

Từ Y=uX, ta suy ra $\frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}X + u$.

Chuyển Y qua u, phương trình vi phân trở thành

$$X\frac{du}{dX} + u = \frac{3-u}{1+u}$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{3-u}{1+u} - u$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{-u^2 - 2u + 3}{u+1}$$ (phương trình có dạng tách biến).

$$\frac{u+1}{u^2 + 2u - 3}\,du = -\frac{1}{X}\,dX$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(u+1)}{u^2 + 2u - 3}\,du = -\int \frac{1}{X}\,dX$$

$\frac{1}{2}\ln\left|u^2 + 2u - 3\right| = -\ln|X| + C_1$, với C_1 là hằng số.

$\ln|u^2 + 2u - 3| = -2\ln|X| + \ln C_2$ (với $C_2 = e^{2C_1}$)

$\ln|u^2 + 2u - 3| = \ln|C_2X^{-2}|$

$u^2 + 2u - 3 = \pm C_2X^{-2}$

$$\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2 + 2\frac{y+3}{x-1} - 3 = C\frac{1}{(x-1)^2}$$ (với C là hằng số)

$(y + 3)^2 + 2(x - 1)(y + 3) - 3(x - 1)^2 = C$

<u>Bài tập:</u> Bài tập 81 và bài tập 82 (ở cuối chương 1).

2.8. Phương trình có thể đưa về dạng vi phân toàn phần.

Phương pháp này luộm thuộm, chỉ nên áp dụng khi các phương pháp khác thất bại.

– Xét phương trình $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ hay phương trình $M(x,y)+N(x,y)y'=0$,
trong đó $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.

Phương trình trên chưa là phương trình vi phân toàn phần. Ta sẽ biến đổi và đưa về dạng phương trình vi phân toàn phần như trong đoạn 2.3 .

Ta sẽ dùng ký hiệu M_y thay cho $\frac{\partial M}{\partial y}$, và dùng ký hiệu N_x thay cho $\frac{\partial N}{\partial x}$.

2.8.1. Phương pháp giải.

Xét phương trình vi phân $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ với $M_y \neq N_x$.

Nhân hai vế của phương trình cho một hàm $\mu(x, y)$ (luôn khác 0 trên miền đang xét), ta được

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (*)$$

Hàm μ được chọn sao cho (*) có dạng phương trình vi phân toàn phần.

Hàm μ trong phương pháp này được gọi là thừa số tích phân.

Sau đây là định lý liên quan tới việc chọn thừa số tích phân μ.

2.8.2. Định lý

Xét phương trình vi phân $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ và $M_y \neq N_x$. Khi đó:

a) Nếu $\left(\dfrac{M_y - N_x}{N}\right)$ liên tục và chỉ phụ thuộc x (không phụ thuộc y), khi đó một thừa số tích phân của phương trình trên là $\mu(x) = \exp\left(\int \dfrac{M_y - N_x}{N}\,dx\right)$

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm được chọn tùy ý và thường được chọn bằng 0).

b) Nếu $\left(\dfrac{N_x - M_y}{M}\right)$ liên tục và chỉ phụ thuộc y (không phụ thuộc x), khi đó một thừa số tích phân của phương trình trên là $\mu(y) = \exp\left(\int \dfrac{N_x - M_y}{M}\,dy\right)$

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm được chọn tùy ý và thường được chọn bằng 0).

Chứng minh

Ta thấy $\mu Mdx + \mu Ndy$ là vi phân toàn phần nếu 2 tính chất sau đúng:

i) Các đạo hàm riêng phần cấp 1 của μM, μN liên tục

ii) $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu N)$

Tính chất (i) thường thường đúng. Sau đây ta tìm cách chọn μ dựa vào tính chất (ii).

Hệ thức (ii) tương đương với

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) \qquad (**)$$

Việc xác định μ dựa vào (*) thường khó khăn, do đó người ta chỉ xét hai trường hợp đặc biệt như sau:

- Trường hợp $\mu_y = 0$ (tức hàm μ chỉ phụ thuộc 1 biến x).

Phương trình (**) trở thành phương trình vi phân với hàm cần tìm là μ

$$0 - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) \Leftrightarrow \mu_x = \mu\frac{M_y - N_x}{N}$$

Phương trình trên có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, theo kết quả trong đoạn 2.3 thì một nghiệm của phương trình này là $\mu(x) = \exp\left(\int \dfrac{M_y - N_x}{N}\,dx\right)$.

Giả sử $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ chỉ phụ thuộc biến x (không phụ thuộc biến y). Khi đó ta chọn

$\mu(x) = \exp\left(\int \dfrac{M_y - N_x}{N}\,dx\right)$, dễ thấy μ thỏa phương trình (**).

Tính chất (a) của định lý đã được chứng minh.

- Trường hợp $\mu_x = 0$ (tức hàm μ chỉ phụ thuộc 1 biến x). Từ (*) ta có $\mu_y M = \mu(N_x - M_y)$

Phương trình (**) trở thành phương trình vi phân với hàm cần tìm là μ

$$\mu_y M - 0 = \mu(N_x - M_y) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y = \mu\frac{N_x - M_y}{M}$$

Phương trình trên có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, theo kết quả trong đoạn 2.2 thì một nghiệm của phương trình này là $\mu(y) = \exp\left(\int \dfrac{N_x - M_y}{M}\,dy\right)$.

Giả sử $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ chỉ phụ thuộc biến y (không phụ thuộc biến x). Khi đó ta chọn

$\mu(y) = \exp\left(\int \dfrac{N_x - M_y}{M}\,dy\right)$, dễ thấy μ thỏa phương trình (**).

Tính chất (b) của định lý đã được chứng minh.

2.8.3. Thí dụ Hãy giải phương trình vi phân $y(1 + xy) - xy' = 0$ trên miền $(0,+\infty)$.

Lời giải

– Phương trình vi phân có dạng $M + Ny' = 0 \Leftrightarrow Mdx + Ndy = 0$, với $M = y(1 + xy)$ và $N = -x$.

Ta có $\begin{cases} M_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(y + xy^2) = 1 + 2xy \\ N_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x) = -1 \end{cases}$

Do $M_y \neq N_x$ nên ta sẽ tìm thừa số tích phân μ .

Ta có $M_y - N_x = (1 + 2xy) - (-1) = 2(1 + xy)$. Chia biểu thức này lần lượt cho M và N, ta thấy việc chia cho M cho ra kết quả đặc biệt.

Ta có $\dfrac{M_y - N_x}{M} = \dfrac{2(1+xy)}{y(1+xy)} = \dfrac{2}{y} \Rightarrow \dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{-2}{y}$ (chỉ chứa biến y, không chứa x).

Chọn thừa số tích phân $\mu(y) = \exp\left(\int \dfrac{-2}{y} dy\right) = e^{-2\ln|y|+k} = \dfrac{1}{y^2}$ (k được chọn bằng 0).

– Nhân hai vế của phương trình ban đầu cho $\dfrac{1}{y^2}$ ta được phương trình dạng vi phân toàn phần

$$\frac{1+xy}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

Dựa vào

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1+xy}{y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2} \end{cases},$$

ta tìm được $F(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2}$.

Phương trình vi phân trở thành

$$dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C_1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C_1$$

<u>2.8.4. Thí dụ</u> Hãy giải phương trình vi phân $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ trên miền $(0,+\infty)$.

<u>Lời giải</u>

– Phương trình vi phân có dạng $Mdx + Ndy = 0$ với $M=2x^2 + y$ và $N= x^2y - x$.

Ta có $M_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y) = 1$ và $N_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y - x) = 2xy - 1$.

Do M_y khác N_x nên ta sẽ tìm thừa số tích phân μ.

Ta có $M_y - N_x = 1 - (2xy - 1) = 2(1 - xy)$. Chia biểu thức này lần lượt cho M và N, ta thấy việc chia cho N cho ra kết quả đặc biệt.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2(1-xy)}{x(xy-1)} = \frac{-2}{x}$$

Chọn $\mu(x) = \exp\left(\int \dfrac{-2}{x} dx\right) = \exp(-2\ln|x|) = x^{-2}$.

(hằng số xuất hiện khi tính nguyên hàm đã được chọn bằng 0).

– Nhân hai vế của phương trình vi phân ban đầu cho $\dfrac{1}{x^2}$ ta được phương trình dạng vi phân toàn phần như sau: $\left(2 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$.

Dựa vào $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2 + \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = y - \dfrac{1}{x} \end{cases}$, ta tìm được $F(x, y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$

Phương trình vi phân trở thành

$dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = C$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{với C là hằng số.}$$

Bài tập: Bài tập 83 và bài tập 84 (ở cuối chương 1).

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐÃ GIẢI RA ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM

3.1 Giới thiệu bài toán điều kiện đầu.

Cho (x_o,y_o) thuộc một miền D trong R^2. Hàm f là hàm hai biến xác định trên miền D. Bài toán (P) được quan tâm trong đoạn này là tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$y' = f(x,y) \qquad (3.1.a)$$

và nghiệm này thỏa điều kiện đầu

$$y(x_o) = y_o \qquad (3.1.b)$$

– Nghiệm y là hàm thực theo biến x và xác định trên một khoảng I nào đó trong R.
– Ý nghĩa hình học của điều kiện đầu $y(x_o)=y_o$ là đường cong tích phân qua điểm (x_o,y_o).

Chú thích: – Miền D trong chương này được hiểu là tập mở liên thông trong R^2.
– Phương trình (3.1a) được gọi là **phương trình đã giải ra đối với đạo hàm**.
– Bài toán đòi hỏi đường biểu diễn của nghiệm qua một điểm cho trước như trong bài toán (P) được gọi là bài toán Cauchy.

3.2. Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm

3.2.1 Định lý

Xét bài toán

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases} \qquad (P)$$

Giả sử

i) D là hình chữ nhật $[x_o - a, x_o + a] \times [y_o - b, y_o + b]$, với a và b là các số dương.

ii) Hàm hai biến f liên tục trên D.

iii) Đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ tồn tại và liên tục trên D.

Khi đó, bài toán trên có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $x_o - \delta \le x \le x_o + \delta$,

trong đó $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ với M là một chặn trên của f trên D.

3.2.2 Chú thích

Do D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}^2$, đồng thời f liên tục trên D nên chặn trên M tồn tại (hữu hạn).

Bài tập: Bài tập 85 (ở cuối chương 1).

Bài tập: Bài tập 86 tới 104

Bài tập: Từ bài tập 105 tới bài tập 118 chỉ dành cho sinh viên giỏi.

3.3 Ý nghĩa hình học của bài toán (P) trong 3.1

Tại mỗi điểm trong miền D, tồn tại một đoạn thẳng nhận điểm đó là trung điểm và có hệ số góc là f(x,y). Tập hợp tất cả các đoạn thẳng này được gọi là **trường hướng** đối với đường cong tích phân. Nếu đường cong tích phân qua điểm (x,y) thì đạo hàm tại đó bằng f(x,y), tức đường cong tích phân tiếp xúc với đoạn thẳng của trường hướng.

Đường cong tích phân ứng với bài toán (P) là đường cong qua điểm (x_o, y_o) và tiếp xúc đoạn thẳng của trường hướng tại mỗi điểm mà đường cong này đi qua.

3.4 Phương pháp đồ thị

Xét bài toán (P) trên miền D như trong đoạn 3.1: $\begin{cases} y'=f(x, y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

Phương pháp đồ thị được dùng để vẽ đường cong tích phân mà không cần giải ra nghiệm $y = y(x)$. Phương pháp này gồm các bước sau:

a) Vẽ các điểm (x, y) phân bố đều trong miền D với mật độ càng cao càng tốt, tập hợp các điểm này được gọi là tập V. Tại mỗi điểm (x, y) của tập V, ta vẽ một đoạn thẳng ngắn có hệ số góc là f(x, y), đoạn thẳng này đặc trưng cho trường hướng tại điểm (x,y). Các đoạn thẳng này cho ta hình ảnh một trường hướng.

b) Từ (x_o,y_o), vẽ đường cong liên tục sao cho tính chất sau được thỏa:

Tại các điểm thuộc tập V mà đường cong đi qua, đường cong tiếp xúc với đoạn thẳng đặc trưng cho trường hướng tại điểm đó.

Bài tập:

Xét bài toán (P) $\begin{cases} y'=x-y \\ y(0)=1 \end{cases}$

a) Hãy dùng phương pháp đồ thị để vẽ đường cong tích phân của bào tóan trên.
b) Hãy giải bài tóan này dựa theo định lý về phương trình vi phân cấp 1 tuyến tính.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân bằng phương pháp tách biến

1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$ Đáp số: $y = ke^{x^2}$

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y},\ y(0) = 2$ Đáp số: $y = \ln(x^3 + e^2)$

Chú thích: Miền xác định của nghiệm trên là $\left(-e^{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$

3) $\frac{dy}{dx} = 2x\left(y^2 + 1\right)$ Đáp số: $y = \mathrm{tg}\,(x^2 + C)$

Chú thích: Hàm số ở đáp số không xác định khi $x^2 + C = k\frac{\pi}{2}$

4) $(1+x)dy - ydx = 0$ Đáp số: $y = C\,(1 + x)$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ Đáp số: $x^2 + y^2 = C^2$

6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};\ y(4) = -3$ Đáp số: $y = -\sqrt{25 - x^2}; -5 < x < 5$

7) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$ Đáp số: $y = 2\frac{1 - ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}$

8) $\left(e^{2y} - y\right)\cos x\frac{dy}{dx} = e^y sin2x, y(O) = 0$ Đáp số: $e^y + ye^{-y} + e^{-y} = 4 - 2\cos x$

9) $\frac{dx}{dt} = te^t$ Đáp số: $x = -\ln\left(c - \frac{t^2}{2}\right)$

10) $\frac{dy}{dt} + 4y = y\left(e^{-t} + 4\right)$ Đáp số: $y = c\,e^{-\left(e^{-t}\right)}$

11) $\frac{dx}{dr} = r^2\left(1 + x^2\right)$ Đáp số: $x = \mathrm{tg}\left(\frac{r^3}{3} + C\right)$

12) $\frac{ds}{dt} + 2s = st^2;\ s(0) = 1$ **Đáp số:** $s = e^{\left(\frac{t^3}{3}\right) - 2t}$

13) $x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = 0; y(1) = 3$ Đáp số: $y = \frac{3x}{4x - 3}$

14) $yy' = e^x$ Đáp số: $y = \pm\sqrt{2e^x + C}$

15) $e^x(x' + 1) = 1;\ x(0) = 1$ Đáp số: $x = \ln\left(1 - \frac{1 - e}{e^t}\right)$

16) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$ Đáp số: $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

17) $dx + e^{3x}dy = 0$ Đáp số: $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + C$

18) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ Đáp số: $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

19) $\left(e^y + 1\right)^2 e^{-y}dx + \left(e^x + 1\right)^3 e^{-x}dy = 0$ Đáp số: $\left(e^x + 1\right)^{-2} + 2\left(e^y + 1\right)^{-1} = C$

20) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$ Đáp số: $(y+3)^5 e^x = c(x+4)^5 e^y$

21) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ Đáp số: $y = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$

22) $\frac{dx}{dt} = 4(x^2+1);\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Đáp số: $x = tg\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right)$

23) $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy;\ y(-1) = -1$ Đáp số: $xy = e^{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

24) $\frac{dy}{dx} = \frac{2+\sin x}{3(y-1)^2};\ y(0) = 2$ Đáp số: $y = 1 + (2x - \cos x + 2)^{\frac{1}{3}}$

25) $y' = \frac{x^3y - y}{y^4 - y^2 + 1};\ y(0) = 1$ Đáp số: $y^4 - 2y^2 + 4\ln|y| = x^4 - 4x - 1$

Hãy đưa về dạng phương trình vi phần tuyến tính cấp 1 và tìm nghiệm.

26) $y' + 3y = 3$ Đáp số: $y = Ce^{-3x}$

27) $\frac{dy}{dx} = -2xy;\ y(1) = 1$ Đáp số: $y = e^{1-x^2}$

28) $y' = y + x^2;\ y(0) = 1$ Đáp số: $y = 3e^x - (x^2+2x+2)$

chú thích $\int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}$

29) $\frac{dx}{dt} = x - 1;\ x(0) = 1$ Đáp số: $x = 1$

30) $\frac{dy}{dx} - 7y = x$ Đáp số: $y = -Ce^{7x} - \frac{x}{7} - \frac{1}{49}$

31) $\frac{dy}{dx} - y = x^2 + 2$ Đáp số: $y = Ce^x - x^2 - 2x - 4$

32) $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$ Đáp số: $y = -2 + Ce^{3x}$

33) $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$ Đáp số: $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

34) $(x^2-9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ Đáp số: $y = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$

35) $\frac{dy}{dx} + y = x;\ y(0) = 4$ Đáp số: $y = x - 1 + 5e^{-x}$

36) $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ và $y(0) = 0$

Đáp số: $y = \begin{cases} 1 - e^{-x}; & 0 \le x \le 1 \\ (e-1)e^{-x}; & x > 1 \end{cases}$

37) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$ Đáp số: $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$

38) $x^2y' + xy = 1$ Đáp số: $y = x^{-1}\ln x + cx^{-1};\ x > 0$

39) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2\sin x$ Đáp số: $y = cx - x\cos x;\ x > 0$

40) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$ Đáp số: $y = \frac{1}{2x^2}e^x + \frac{C}{x^2}e^{-x}, x > 0$

41) $ydx-4(x+y^6)dy = 0$ Đáp số: $x = 2y^2 + cy^2, y > 0$

42) $\cos x\frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$ Đáp số: $y = \sin x + c\cos x; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

43) $xy' + y = e^x; y(1) = 2$ Đáp số: $y = \frac{e^x}{x} + \frac{2-e}{x}; x > 0$

44) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x;\ y(1) = 10$ Đáp số: $(x+1)y = x\ln x - x + 21; x > 0$

45) $L\frac{di}{dt} + Ri = E,\quad i(0) = i_o$ với L, R, E, i_o là các hằng số

Đáp số: $i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu có dạng vi phân toàn phần .

46) $2xydx + (x^2-1)dy = 0$ Đáp số $x^2y - y = 0$

47) $[e^{2y} - y\cos(xy)]dx + [2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y]dy = 0$

Đáp số $xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 + c = 0$

48) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x\sin x}{y(1-x^2)}, y(0) = 2$ Đáp số $y^2 - (1-x^2) - \cos^2 x = 3$

49) $(2x+2y^2) + (4xy+3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số $x^2 + 2xy^2 + y^3 = C$

50) $(2xy+1) + (x^2+4y)y' = 0$ Đáp số $x^2y + x + 2y^2 = C$

51) $(2x+1+2y^2) + (4xy+3y^2)y' = 0, y(0) = -1$ Đáp số $2xy^2 + y^3 + x^2 + x = -1$

52) $2xy - (4y^2 + xy)y' = 0$ *Không có dạng vi phân toàn phần*

53) $(e^x + x) + y\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số: $e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$

54) $(x^2 + 4y)y' = 2xy + 1$ Đáp số: Không có dạng vi phân toàn phần

55) $z\frac{dy}{dx} = -t$ Đáp số: $t^2 + z^2 = C$

56) $(x^3 - 3y^2x)\frac{dy}{dx} = y^3 - 3x^2y - y\frac{dy}{dx}$ Đáp số: $x^3y - xy^3 + \frac{y^2}{2} = C$

57) $x\cos(xy)dy + [y\cos(xy) - 2x]dx;\ y(1) = 2$ Đáp số: $\sin(xy) - x^2 = \sin 2 - 1$

58) $(\sin t + t^2e^y - 3)\frac{dy}{dx} + (y\cos t + 2te^y) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)0$

Đáp số: $y\sin t + t^2e^y - 3y = \frac{\pi^2}{4}$

59) $(3t^2x - x^3) - (t^3 + 3x^2t)\frac{dy}{dx} = 0$ Đáp số: không có dạng vi phân toàn phần.

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình sau nếu nó có dạng phương trình vi phân đẳng cấp.

60) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ Đáp số: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

61) $x^2\dfrac{dy}{dx}=y^2-xy+x^2; y(1)=2$ Đáp số: $y=x\left(1-\dfrac{1}{\ln|x|-1}\right)$

Hướng dẫn: $(v-1)^{-2}dv=x^{-1}dx$ với $v=\dfrac{y}{x}$

62) $y^2=\left(xy-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}$ Đáp số: $\dfrac{y}{x}-\ln|y|=C$

Hướng dẫn $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{u-1}$ với $u=\dfrac{y}{x}$

63) $S\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{t^2+S^2}{t}; S(2)=1$ Đáp số: $S(t)=t\left[\ln\left(\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$

Hướng dẫn: $udu=\dfrac{1}{t}dt$ với $u=\dfrac{S}{t}$

64) $x\dfrac{dy}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}+x-3$ Đáp số: Không có dạng đẳng cấp

65) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(xy)-1}{xy}$ Đáp số: Không có dạng đẳng cấp

66) $t\dfrac{dx}{dt}=t+2x$ Đáp số: $x=ct^2-t$

67) $\left(x^2+y^2\right)dy+2xydx=0$ Đáp số: $y^3+3yx^2=C$

68) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-6x}{2x-y}; y(0)=1$ Đáp số: $(y-3x)^{\frac{1}{5}}(y+2x)^{\frac{4}{5}}=1$

69) $x^2\dfrac{dy}{dx}-\left(4x^2+xy+y^2\right)=0; y(1)=-1$

Đáp số: $y=2x\text{tg}\left[2\ln|x|+\text{acrtg}\left(\dfrac{-1}{2}\right)\right]$

70) $\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{t-N}{t+N}; N(0)=2$ Đáp số: $N^2+2Nt-t^2=4$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình sau nếu có dạng y’ = h (ax +by) với a và b là các hằng số.

71) $\dfrac{dy}{dx}=(-2x+y)^2-7; y(0)=0$ Đáp số: $y=2x+\dfrac{3\left(1-e^{6x}\right)}{1+e^{6x}}$

72) $dy-(x+y+1)^2dx=0$ Đáp số: $y=-x-1+\text{tg}(x+C)$

73) $dy=\left(2+\sqrt{y-2x+3}\right)dx$ Đáp số: $4(y-2x+3)=(x+C)^2$

74) $\dfrac{dy}{dx}=\text{tg}^2(x+y)$ Đáp số: 2y – 2x + sin2(x + y) = C

75) $\dfrac{dy}{dx}=\left(2x^2+y\right)^3+1$ Đáp số: Không có dạng y’ = h(ax = by)

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng phương trình vi phân Bernoulli

76) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2y^2$ Đáp số: $y=\dfrac{1}{-x^2+cx}$

Hướng dẫn: $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=xy^2$ có dạng Bernoulli với n = 2

77) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$ Đáp số: $y^3 = 1 + cx^{-3}$

78) $\dfrac{dy}{dx}=y\left(xy^3-1\right)$ Đáp số: $y^{-3}=x+\dfrac{1}{3}+ce^{3x}$

79) $t^2\dfrac{dy}{dt}+y^2=ty$ Đáp số: $e^{\frac{t}{y}}=ct$

80) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y^4;\ y(1)=\dfrac{1}{2}$ Đáp số: $y^{-3}=-\dfrac{9}{5}x^{-1}+\dfrac{49}{5}x^{-6}$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng $y'=\dfrac{a_1x+b_1x+c_1}{a_2x+b_2x+c_2}$ với a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 là các hằng số.

81) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-3y+13}{x-y+3};\ y(0)=1$

Hướng dẫn: Đặt x = t – 4; y = u – 1

$$\frac{du}{dt}=\frac{4t-3u}{t-u};\ u(4)=2$$

$$\frac{x+4}{y-2x-7}=\ln\left|c\left(y-2x-7\right)\right| \text{ với } C=\frac{1}{6}e^{-\frac{2}{3}}$$

82) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(4x-3)y+1}{2x-3y+2}$ Đáp số: Không có dạng như đề bài yêu cầu.

Hãy dùng thừa số tích phân để đưa về dạng vi phân toàn phần và tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

83) $\left(x^2-y^2\right)+2xyy'=0$

Hướng dẫn:

Phương trình có dạng M dx + Ndy = 0

Ta có : $\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{-2y-2y}{2xy}=-\dfrac{2}{x}$

Chọn thừa số phân tích

$$\mu(x)=\exp\left(\int\frac{-2}{x}dx\right)=\exp\left(-2\ln|x|+C\right)=\frac{1}{x^2} \text{ (chọn C thích hợp)}$$

Suy ra $\dfrac{1}{x^2}\left[\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy\right]=0$

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$$

$$x+\frac{y^2}{x}=C$$

84) $y+\left(y^2-x\right)y'=0$

Hướng dẫn:

Phương trình có dạng $Mdx+Ndy=0$

Ta có: $\dfrac{N_x-M_y}{M}=\dfrac{-1-1}{y}=-\dfrac{2}{y}$

Chọn thừa số tích phân

$$\mu(y)=\exp\left(\int\frac{-2}{y}dy\right)=\exp\left(-2\ln|y|+C\right)=\frac{1}{y^2}\text{(chọn C thích hợp)}$$

$$\text{Suy ra }\frac{1}{y^2}\left[\left(ydx+\left(y^2-x\right)\right)dy\right]=0\Rightarrow\frac{1}{y}dx+\left(1-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow y+\frac{x}{y}=C$$

Bài tập áp dụng định lý 3.2 về sự tồn tại duy nhất nghiệm

85)

Cho bài toán điều kiện đầu $\begin{cases} y'=x^2+e^{-y^2} \\ y(0)=0\end{cases}$

a) Hãy chứng minh bài toán có nghiệm y = y(x) trên mọi đoạn $I\subset R$.

b) Hãy chứng minh bài toán có nghiệm y = y(x) trên R .

Hướng dẫn

a) Bài toán điều kiện đầu có dạng

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_o)=y_o\end{cases}$$

Với $f(x, y) = x^2 + e^{-y^2}$, $x_o = 0$, $y_o = 0$.

Xét a >0 và b >0, hai số a và b này sẽ được chọn chính xác sau. Gọi $D=[-a,a]\times[-b,b]$.

Ta thấy f liên tục trên D. Vì $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2ye^{-y^2}$ nên $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên D.

Do $\left|f(x,y)\right|=\left|x^2+e^{-y^2}\right|,\forall(x,y)\in D\le a^2+1$, ta có M = a^2+1 là một chặn trên của f trên D.

Khi đó $\dfrac{b}{M}=\dfrac{b}{a^2+1}$. Chọn b=a(a^2+1) thì $\dfrac{b}{M}=a$

Gọi δ = min $\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, thì δ=a .

Theo định lý 3.2 thì bài toán trên có nghiệm duy nhất y = y(x) trên đoạn [-a,a]. Chọn a đủ lớn thì đoạn [-a,a] chứa đoạn I. Vậy bài toán có nghiệm duy nhất trên I.

Tương tự các bài tập từ 1 tới 84, trong các bài tập 86 tới 104 hãy tìm nghiệm trên miền I.

86) $y'=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x}$, $I=(0,+\infty)$ Đáp số: $y=\sin(\ln|x|+C)$

87) $y'+x=x(y^2+1)$ Đáp số: $y=\dfrac{2}{C-x^2}$

88) $y' - (\sin x)\, y = \sin x$ Đáp số $y = Ce^{-\cos x} - 1$

89) $(1 + x^2)\, y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$ Đáp số $y = \dfrac{x + C}{\sqrt{1 + x^2}}$

90) $xy' = - y + \sqrt{xy + 1}$ Đáp số $y = \dfrac{(x + C)^2 - 4}{4x}$

91) $y' = y + xy^2$ Đáp số $y = \dfrac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$

92) $y' = \dfrac{3y^4 + 3x^2y^3 - x^4y}{xy^3 - 2x^5}$ Đáp số $\dfrac{y}{x^3} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{y^2} = C$

93) $3\dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 0$ Đáp số $y = Ce^{\left(\cos\frac{x}{3}\right)}$

94) $xy' + y = 2y' + 3x - 8$ Đáp số $xy - \dfrac{3x^2}{2} - 8x - 2y = C$ (dạng vi phân toàn phần)

95) $xdy + xydx = (1 - y)dx$ Đáp số $y = \dfrac{C}{xe^x} + \dfrac{1}{x}$

96) $\dfrac{y^2 - 3x}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1$ Đáp số $y^3x = \dfrac{y^5}{5} + C$ (tuyến tính theo x)

97) $(2x + ye^{xy}) + (y + xe^{xy})y' = 0$ Đáp số $x^2 + e^{xy} + \dfrac{y^2}{2} = C$ (vi phân toàn phần)

98) $(x + e^y)y' - 1 = 0$ Đáp số $x = (y + C)e^y$ (tuyến tính theo x)

99) $y' = e^{x+y}$, $y(1) = 0$ Đáp số $e^{-y} + e^x = 1 + e$. (tách biến)

100) $y' = xy + 2x - y - 2$ Đáp số $y = -2 + Ce^{\left(\frac{x^2}{2} - x\right)}$ (tách biến)

101) $(t^2 + y^2)\dfrac{dy}{dt} + 2t\,(y + 2t) = 0$ Đáp số $y^3 + 3yt^2 + 4t^3 = C$ (đẳng cấp)

102) $y = 2(y^2 + x)y'$ Đáp số $x = y^2\,(2\ln|y| + C)$ (tuyến tính theo x)

103) $y' = \dfrac{4x - 3y + 13}{x - y + 3}$, $y(0) = 1$

Hướng dẫn: Thế $x = t - 4$, $y = u - 1$. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{4t - 3u}{t - u}$, $u(4) = 2$

$$\frac{x + 4}{y - 2x - 7} = \ln|C\,(y - 2x - 7)| \text{ với } C = \frac{1}{6}e^{-\frac{2}{3}}$$

104) $y' - \dfrac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}y = \dfrac{-2}{x^2 + 1}$, $I = (0, +\infty)$

Hướng dẫn

Phương trình này có dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ta có $\displaystyle\int \frac{-x^2 + 1}{x\,(x^2 + 1)}\,dx = \int\left(\frac{-2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x}\right)dx = \ln\frac{|x|}{x^2 + 1} + k$.

Chọn $P(x) = \ln\dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Ta có $e^{P(x)} = e^{\ln\frac{x}{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Nghiệm của phương trình là

$$y(x) = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}\frac{-2}{x^2 + 1}dx$$

$$y(x)=\frac{x^2+1}{x}\int\frac{x}{x^2+1}\frac{-2}{x^2+1}dx=\frac{x^2+1}{x}\int\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$y(x)=\frac{x^2+1}{x}\left(\frac{1}{x^2+1}+C\right)=\frac{1}{x}+C\frac{x^2+1}{x}=Cx+\frac{1+C}{x}$$

Các bài tập từ 105 tới 112 là bài tập khó

105) *

Xét vấn đề tìm nghiệm của phương trình vi phân $x(1+x^2)y'-y=0$ trên R .

Một số sinh viên giải như sau:

$$x(1+x^2)y'-y=0$$

Chia hai vế cho $x(1+x^2)$ ta được

$$y'-\frac{1}{x(x^2+1)}\,y=0.$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

Ta có $\displaystyle\int\frac{-1}{x(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+k=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+k.$

Chọn $P(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

Ta thấy $e^{-P(x)}=e^{-\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}}=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$

Do đó $y=Ce^{-P(x)}=\dfrac{C|x|}{\sqrt{x^2+1}}$, với C là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y=\frac{Kx}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ với K là hằng số tùy ý.}$$

Hãy viết hòan chỉnh lời giải này.

Hướng dẫn

– Để tránh trường hợp x = 0, ta sẽ tìm nghiệm trên miền $(-\infty,0)$ và nghiệm miền $(0,+\infty)$. Sau đó suy ra nghiệm trên miền $(-\infty,+\infty)$.

– Xét D là miền $(-\infty,0)$ hoặc $(0,+\infty)$. Trên miền D, ta có

$$x(1+x^2)y'-y=0\Leftrightarrow y'-\frac{1}{x(x^2+1)}\,y=0 \qquad (*)$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ta có $\displaystyle\int\frac{-1}{x(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+k=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+k.$

Chọn $P(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

Ta thấy $e^{-P(x)}=e^{-\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}}=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

Do đó $y=\dfrac{Cx}{\sqrt{x^2+1}}$

Gọi y_1 là nghiệm của phương trình vi phân trên miền $(0,+\infty)$ và y_2 là nghiệm trên miền $(-\infty,0)$ thì y_1, y_2 có dạng như kết quả trên nhưng giá trị hằng C có thể khác nhau.

Ta ghép nối hai hàm số y_1, y_2 để có hàm số y xác định trên $(-\infty,+\infty)$ như sau

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x)=\dfrac{Kx}{\sqrt{x^2+1}} & , \quad x \in (-\infty,0) \\ y(0) & , \quad x=0 \\ y_2(x)=\dfrac{Cx}{\sqrt{x^2+1}} & , \quad x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y_2(x) = 0$ *và* $\lim\limits_{x\to 0^-} y_1(x) = 0$, do đó chọn y(0) = 0 thì hàm y liên tục tại 0.

– Ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y_1(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{C}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} = C$$

và $$\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{y_2(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} y_2'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{K}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} = K$$

do đó đạo hàm y'(0) tồn tại nếu và chỉ nếu K = C, khi đó y'(0) = C.

– Để kiểm hàm y có thỏa phương trình vi phân tại x = 0, ta phải thế các giá trị x = 0, y(0), y'(0) vào vế trái của phương trình vi phân ban đầu, ta thấy

$$x(1+x^2)y' - y\Big|_{x=0} = 0(1+0)\,C - 0 = 0$$

Vậy y thỏa phương trình vi phân khi x = 0.

Tóm lại, nghiệm của phương trình vi phân trên (–∞, + ∞) là

$$y(x) = \frac{Cx}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

106) *

Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$ trên R .

<u>Hướng dẫn:</u>

Giải tương tự bài 105, kết quả là y(x)= - x.

107) *

Xét bài toán tìm nghiệm trên I như sau:

a) $y' + e^{x^2} y = 1$, $y(0) = -1$

b) $e^{\sqrt{x}} y' + (\ln|2-x|)\, y = 4$, $y(1) = 2$

Hãy tìm khoảng I lớn nhất mà bài tóan vẫn có nghiệm duy nhất.

<u>Hướng dẫn</u>

a) Phương trình có dạng tuyến tính cấp một. Các hệ số là hàm liên tục trên (– ∞, ∞) nên I = (– ∞, + ∞)

b) Phương trình có dạng tuyến tính cấp một.

$\sqrt{x}$ chỉ xác định khi $x \ge 0$

Khi x = 1 thì $|2-x| = 1$

x	0	1	2
$\|2-x\|$	2	1	0
$\ln\|2-x\|$	ln 2	0	$-\infty$

Khoảng I chứa 1 lớn nhất để $e^{\sqrt{x}}$ và $\ln|2-x|$ liên tục là I = [0, 2).

Vậy đáp số là I = [0, 2).

108) *

Hãy tìm những đường trực giao (orthogonal trajectories) với họ parabol $y = mx^2$, trong đó m là tham số.

Chú thích: Đường cong (C) được gọi là đường trực giao với họ parabol $y = mx^2$ nếu nó có tính chất sau: Coi M là một điểm tùy ý thuộc (C), tồn tại m sao cho M thuộc parabol $y = mx^2$, đồng thời tiếp tuyến của (C) và tiếp tuyến của parabol $y = mx^2$ tại M vuông góc với nhau.

<u>**Lời giải**</u>

Coi (x, y) là điểm tùy ý trong mặt phẳng xOy

– Trường hợp $x \neq 0$ và $y \neq 0$:
Gọi $y_1 = y_1(x)$ là phương trình của parabol P_1 qua (x, y).
Gọi $y_2 = y_2(x)$ là phương trình của đường trực giao C_1 qua (x, y).

Ta phải có C_1 trực giao với P_1 tại (x,y) tức là $y_2'(x) = -\dfrac{1}{y_1'(x)}$.

Parabol P_1 có phương trình $y = mx^2$ nên $y' = 2mx = 2\dfrac{y}{x^2}x = \dfrac{2y}{x}$.

Do đó phương trình $y = y(x)$ của C_1 là nghiệm của phương trình vi phân $y' = -\dfrac{x}{2y}$

Đưa về dạng tách biến $2yy' = -x$ hay $\int 2y\,dy = \int (-x)\,dx$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \text{ hay } y^2 + \frac{x^2}{2} = C \quad (*)$$

– Trường hợp $x = 0$ hay $y = 0$:
Trường hợp này ứng với (x, y) nằm trên trục hoành hay trục tung. Nếu điểm (x, y) này không phải là gốc O thì không xét đường trực giao do không có parabol nào qua (x, y). Điểm gốc $(0, 0)$ không thuộc các đường cong (*) và ta không cần quan tâm.

– *Kết luận:* Họ các đường trực giao với họ parabol $y = mx^2$ là họ các ellip $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = C$ (với các C là tham số) bỏ đi các điểm trên trục hoành và các điểm trên trục tung.

109) * Cho bài toán điều kiện đầu $\begin{cases} y' = x\,y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Hãy chứng minh bài toán có vô số nghiệm.

Lời giải

Xét phương trình vi phân $y' = yx^{\frac{1}{3}}$ (1)

– Trước hết ta áp dụng phương pháp tách biến .

Giả sử hàm số y luôn khác 0. Chia hai vế cho $y^{\frac{1}{3}}$ ta được $y^{-\frac{1}{3}}y' = x$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{2} + C_1 \text{ hay } y^2 = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}C_1\right)^3$$

$$y = \pm\left(\frac{x^2}{3} + C\right)^{3/2}$$

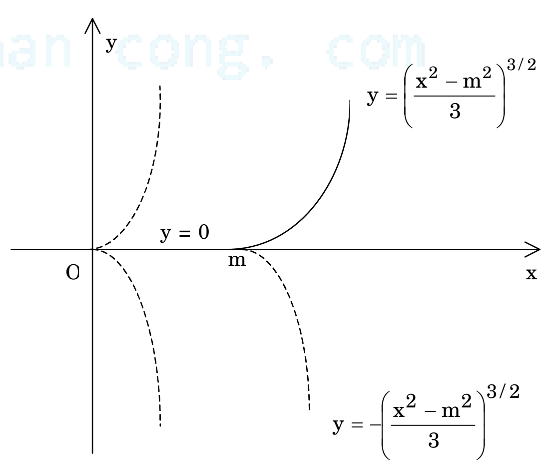
– Kiểm trực tiếp tại phương trình vi phân (1), ta thấy hàm số dạng sau là nghiệm trên R của phương trình vi phân (1):

$y = \pm\left(\dfrac{x^2}{3} + C\right)^{3/2}$, với C là hằng số.

– Dựa vào điều kiện đầu , ta định C như sau:
$y(0)=0 \Rightarrow 0 = \pm(0 + C)^{3/2} \Rightarrow C = 0$.
Do đó, hai hàm số có phương trình sau là nghiệm trên R của bài toán đang xét:

$$y = \pm\frac{x^3}{3\sqrt{3}}.$$

– Ngoài ra, hàm hằng $y \equiv 0$ cũng là nghiệm trên R của bài toán này.



– Sau đây, ta sẽ chứng minh các hàm số dưới đây cũng là nghiệm trên R của bài toán đang xét

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < m \\ \left(\dfrac{x^2 - m^2}{3}\right)^{3/2} & , \quad x \geq m \end{cases},$$ với tham số m là số dương.

- Trước hết ta thấy y(0) = 0, tức y thỏa điều kiện đầu của bài toán.
- Trường hợp $x > m$: ta có

$$y'(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 - m^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}\, x = x\left(\frac{x^2 - m^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = xy^{\frac{1}{3}}(x)$$

- Trường hợp $x < m$: ta có $y'(x) = x\, y^{\frac{1}{3}}(x)$ (do hai vế cùng bằng 0)
- Trường hợp $x = m$:

  Ta có y(m) = 0 và y liên tục tại x = m

  Đạo hàm bên trái $\lim\limits_{x \to m^-} \dfrac{y(x) - y(m)}{x - m} = \lim\limits_{x \to m^-} \dfrac{0}{x - m} = 0$

  Đạo hàm bên phải $\lim\limits_{x \to m^+} \dfrac{y(x) - y(m)}{x - m} = \lim\limits_{x \to m^+} x\left(\dfrac{x^2 - m^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

  Do đó $y'(m) = 0$. Suy ra $y'(x) = xy^{\frac{1}{3}}(x)$ khi x = m (do hai vế cùng bằng 0).
- Vậy y = y(x) là nghiệm của bài toán.

– Vì m có thể vô số cách chọn, đồng thời mỗi m tương ứng với một nghiệm, do đó bài toán có vô số nghiệm.

<u>*Chú thích:*</u> Ngoài các nghiệm trên, bài toán còn có các nghiệm khác, chẳng hạn như:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < m \\ -\left(\dfrac{x^2 - m^2}{3}\right)^{3/2} & , \quad x \geq m \end{cases}$$

110) * Xét bài toán trên $I = [2, +\infty)$ như sau

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \\ y(2) = -1 \end{cases}$$

a) Hãy chứng tỏ $\varphi_1(x) = 1 - x$ và $\varphi_2(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ đều là nghiệm của bài toán?

b) Tại sao định lý tồn tại và duy nhất nghiệm không được áp dụng ?

111) *

Tìm nghiệm trên $[1, +\infty)$ của phương trình vi phân

$y' - y - \ln x = 0$? Có tồn tại nghiệm bị chặn không?

<u>Hướng dẫn:</u>

- Trước hết , hãy chứng minh phương trình này có nghiệm là $y = e^x\left(C + \displaystyle\int_1^x e^{-t}\ln t\, dt\right)$.

- Chứng minh nghiệm không bị chặn như sau:

Giả sử có nghiệm bị chặn, tức tồn tại $C \in \mathbf{R}$ và $M \in \mathbf{R}$ để hàm số sau bị chặn bởi M trên $(1, +\infty)$. Khi đó,

$$\forall x \in \mathbf{R},\ e^x\left(C + \int_1^x e^{-t}\ln t\ dt\right) \leq M$$

$$C + \int_1^x e^{-t} \ln t\, dt \le \frac{M}{e^x}.$$

Suy ra $\left(C + \int_1^x e^{-t} \ln t\, dt \right) \to 0$ khi $x \to \infty$.

Do đó $\int_1^\infty e^{-t} \ln t dt$ tồn tại hữu hạn và $C = -\int_1^\infty e^{-t} \ln t\, dt$

Suy ra : $y = e^x \left(-\int_1^\infty e^{-t} \ln t dt + \int_1^x e^{-t} \ln t dt \right) = -e^x \int_x^\infty e^{-t} \ln t\, dt$

Do $\int_x^\infty e^{-t} \ln t\, dt$ tồn tại hữu hạn nên ta có thể áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$y = -e^x \left[-e^{-t} \ln t \Big|_x^\infty - \int_x^\infty (-e^{-t}) \frac{1}{t}\, dt \right] = -e^x \left(e^{-x} \ln x + \int_x^\infty e^{-t} \frac{1}{t}\, dt \right).$$

$$= -\ln x - e^x \int_x^\infty e^{-t} \frac{1}{t}\, dt$$

mà $\left| e^x \int_x^\infty e^{-t} \frac{1}{t}\, dt \right| \le e^x \int_x^\infty e^{-t} dt = e^x . e^{-x} = 1$.

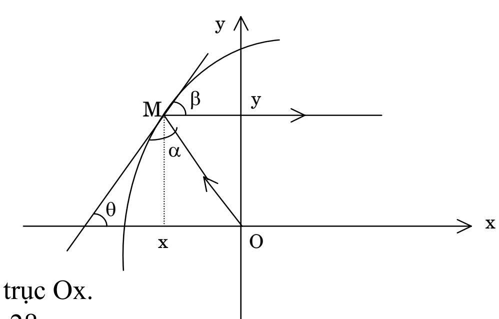
Do đó $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} (-\ln x) = -\infty$.

Điều này vô lý vì đang giả sử y bị chặn bởi M.
Vậy không có nghiệm bị chặn.

112) Giả sử có nguồn sáng đặt tại điểm O trên trục Ox. Hãy xác định hình dáng của gương sao cho mọi tia sáng phản xạ trên gương (ứng với tia tới phát xuất từ O) đều cùng hướng với Ox?

Hướng dẫn

Chọn O làm tốc tọa độ và hệ trục tọa độ xOy.
Xét điểm tới M trên gương với tọa độ là (x, y).
Tia tới và tia phản xạ tại M thỏa định luật phản xạ ánh sáng, theo hình vẽ thì ta có α = β với α là góc nhọn hợp bởi tia tới và tiếp tuyến của gương tại M, còn β là góc nhọn hợp bởi tia phản xạ và tiếp tuyến của gương tại M.



Gọi θ là góc hợp bởi tiếp tuyến của gương tại M với trục Ox.
Ta có β = θ (đồng vị), đồng thời α = β nên θ = 2α = 2β.
Hệ số góc của tiếp tuyến của gương tại M là y' = tgθ.

Hệ số góc của OM là $\frac{y}{x} = \text{tg}\,\varphi = \text{tg}2\theta$.

Đối với các vị trí khác của M ta cũng tìm được hệ phương trình

$$\begin{cases} y' = \text{tg}\theta & (1) \\ y = \text{tg}(2\theta)\, x & (2) \end{cases}$$

mà $\text{tg}2\theta = \frac{2\text{tg}\theta}{1 - \text{tg}^2\theta}$ nên $y = \frac{2y'}{1-(y')^2}\, x$.

Do đó $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$.

Giải phương trình bậc hai theo y', ta được hai nghiệm trái dấu $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

Ta chỉ cần xét dáng gương ứng với y' > 0 nên chỉ xét $y' = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ (3)

Áp dụng phương pháp giải phương trình vi phân đẳng cấp, ta đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì y = ux và

y' = u'x + u. Phương trình vi phân (3) trở thành $y' = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}}{\dfrac{y}{x}}$

Do đó $u'x + u = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u}$

$$xu' = \frac{\sqrt{1 + u^2} - (1 + u^2)}{u}$$

Chuyển qua dạng phương trình tách biến

$$\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}\left(1 - \sqrt{1 + u^2}\right)} u' = \frac{1}{x}$$

Trong tích phân trên ta nhận thấy nếu đặt $W = 1 - \sqrt{1 + u^2}$ thì $\dfrac{dW}{du} = \dfrac{-u}{\sqrt{1 + u^2}}$, do đó

$-\int \dfrac{1}{W} dW = \int \dfrac{1}{x} dx$ hay $-\ln|W| = \ln|x| + k$

Suy ra $\dfrac{1}{|W|} = e^k |x|$ hay $\dfrac{1}{W} = k_2 x$. Do đó $W = \dfrac{1}{k_2 x}$

Ta có $1 - \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{1}{k_2 x}$

$\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = 1 - \dfrac{1}{k_2 x}$ hay $1 + \dfrac{y^2}{x^2} = \left(1 + \dfrac{c}{x}\right)^2$

Do đó $1 + \dfrac{y^2}{x^2} = 1 + \dfrac{2c}{x} + \dfrac{c^2}{x^2}$ hay $y^2 = 2cx + c^2$.

Ta thu được biểu thức của y là phương trình của parabol.

Trong quá trình giải phương trình vi phân ở trên ta đã giả sử $x \neq 0$, $y \neq 0$. Kiểm lại trực tiếp, ta thấy các điểm M có x = 0 hay y = 0 thuộc parabol có phương trình ở trên đều cho tia phản xạ cùng hướng Ox.

Từ nhánh parabol $y^2 = 2cx + c^2$, ta xoay tròn quanh trục Ox thì được dáng paraboloid tròn xoay của gương.

Các phương trình sau không có dạng y'=f(x,y)

113) Hãy tìm nghiệm trên R của phương trình vi phân $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$.

Hướng dẫn: Từ phương trình F(x, y, y') ta sẽ tính y' theo x và y để đưa về phương trình có dạng y' = f(x, y).

Lời giải

Ta có $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0 \Leftrightarrow (y' - x)(y' - y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = x \\ \text{hay } \; y' = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{2} + C \\ \text{hay } \; y = Ce^x \end{array}\right.$$, với C hằng số.

Như vậy, nghiệm trên R của phương trình vi phân là một trong ba dạng sau

a) $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, với C là hằng số.

b) $y(x) = Ce^x$, với C là hằng số.

c) Hàm số có biểu thức (a) ở khoảng này, nhưng có biểu thức (b) ở khoảng khác.

Chú thích: Mọi điểm (x_o, x_o) tùy ý thuộc đường thẳng $[y = x]$ là điểm kỳ dị của phương trình vi phân $F(x, y, y') = 0$ vì có hai đường cong tích phân qua nó và có cùng tiếp tuyến tại (x_o, x_o), hai đường cong đó có phương trình

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{2} + x_o - \dfrac{x_o^2}{2} \\ y(x) = \dfrac{x_o}{e^{x_o}} e^x \end{cases}$$

và hệ số góc của tiếp tuyến chung tại (x_o, x_o) là x_o.

114) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $y = (y')^2 - y'x + \dfrac{x^2}{2}$.

Hướng dẫn: Có dạng y=f(x,y'). Lấy đạo hàm 2 vế rồi đặt u=y' để có phương trình vi phân cấp 1 theo u

Lời giải.

Xét $y = (y')^2 - y'x + \dfrac{x^2}{2}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình vi phân (1) theo x, ta được

$y' = 2.y'.y'' - y''x - y' + x \Leftrightarrow (2y' - x)y'' = 2y' - x$.

Đặt u=y' ta được phương trình vi phân cấp 1 đối với u: $(2u - x)u' = 2u - x$ (2)

– Trước hết ta tìm nghiệm thỏa phương trình $u' = \dfrac{2u-x}{2u-x}$:

Suy ra $u' = 1 \Rightarrow u = x + C$, với C là hằng số.

$\Rightarrow y' = x + C$

$\Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C_2$, với C_2 là hằng số.

Ta thấy hàm số mới tìm được chỉ là nghiệm của (1) nếu $C_2 = 0$.

– Bây giờ tìm nghiệm thỏa phương trình $2u + x = 0$:

$$u = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4} + C_3.$$

Ta thấy hàm số mới tìm được chỉ là nghiệm của (1) nếu $C_3 = 0$.

115) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

Hướng dẫn: Đưa về dạng x=f(y,y'). Đặt u=y' và lấy đạo hàm hai vế theo y, ta đưa về phường trình vi phân với hàm số là u và biến là y.

Lời giải.

Xét $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$. (1)

Ta tìm nghiệm của phương trình sau $x = \dfrac{(y')^2}{4y} + \dfrac{2y}{y'}$ (2)

Ta sẽ tính y' theo y, rồi thế biểu thức này vào (2) hay (1).

Đặt u=y' và lấy đạo hàm hai vế của (2) theo y, với lưu ý $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{u}$, ta được

$$\frac{1}{u} = \frac{-u^2}{4y^2} + \frac{2}{u} + \left(\frac{u}{2y} - \frac{2y}{u^2}\right)\frac{du}{dy}$$

Suy ra $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{u\left(u^3 - 4y^2\right)}{2y\left(u^3 - 4y^2\right)}$.

– Xét trường hợp $u^3 - 4y^2$ luôn khác 0.

Ta suy ra $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{2y}u$. Do đó $u = Cy^{\frac{1}{2}}$, với C là hằng số.

Thế biểu thức của u vào phương trình vi phân (1) ta được

$$C^3 y^{\frac{3}{2}} - 4Cx\, y^{\frac{3}{2}} + 8y^2 = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{3}{2}}(C^3 - 4Cx + 8y^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Từ $C^3 - 4Cx + 8y^{\frac{1}{2}} = 0$, ta suy ra được $y = \dfrac{1}{64}(4Cx - C^3)^2 = \dfrac{C^2}{4}\left(x - \dfrac{C^2}{4}\right)^2$ (3).

Từ hàm số dạng (3), bằng cách kiểm trực tiếp thì ta thấy hàm số sau là nghiệm trên R của (1):
$y = K(x-K)^2$ với K là hằng số,
trong đó bao gồm cả nghiệm hằng $y\equiv 0$.
– Bây giờ ta xét thêm trường hợp $u^3-4y^2= 0$.

Khi đó $u=\left(4y^2\right)^{\frac{1}{3}}$. Thay biểu thức này vào (1) với y'=u, ta được $4y^2 - 4xy\left(4y^2\right)^{\frac{1}{3}} + 8y^2=0$.

Suy ra $y=\frac{4}{27}x^3$. Hàm này cũng là nghiệm trên R của phương trình vi phân (1).

116) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $y=y'x+(y')^2$.
Hướng dẫn: Phường trình này có dạng **y= y'x+h(y')**. Đăt u=y' và lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được phương trình vi phân với hàm số là u và biến số là x.

Lời giải.

Xét $$y= y'x+ (y')^2 \qquad (1)$$
Đặt u=y'. Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo x, ta được:
Thế y ở phương trình trên vào phương trình dưới ta được
$$u=u'x+u+ 2uu' \Leftrightarrow u'(2u+x)=0.$$
– Xét trường hợp u'=0:
Khi đó y'=u=C. Thế y'=C vào (1) ta thu được $y=Cx+C^2$.
Hàm số sau là nghiệm trên R của phương trình vi phân (1)
$$y=Cx+C^2, \text{ với C là hằng số.}$$
– Xét trường hợp 2u+x=0:
Khi đó $u=-\frac{x}{2}$. Thế $y'=-\frac{x}{2}$ vào (1) ta thu được $y= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=-\frac{x^2}{4}$.

Nghiệm trên R của phương trình vi phân (1) là $y=-\frac{x^2}{4}$.

117) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $y= (y')^2x+ (y')^2$.
Hướng dẫn: Phương trình có dạng **y= g(y')x+h(y').** Đặt u=y' và lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được phương trình vi phân với hàm số là u và biến số là x.

Lời giải.

Xét $$y= (y')^2x+ (y')^2 \qquad (1)$$
Đặt u=y'.
Lấy đạo hàm hai vế của phương trình vi phân (1) theo x, ta được
$$y'=2.y'.y''x+(y')^2+2.y'.y'' \Leftrightarrow (2y'x+2y')y''=y'-(y')^2$$
hay $$(2ux+2u)\frac{du}{dx} = u-u^2.$$
Coi u là tham số, **ta đưa về phương trình vi phân tuyến tính của hàm x theo biến số u** như sau:
$$(u-u^2)\frac{du}{dx} - 2ux = 2u.$$
– Xét trường hợp $u-u^2\neq 0$:
Ta có phương trình $\frac{du}{dx} + \frac{2}{u-1}x = \frac{2}{1-u}$.

Nghiệm của phương trình này là $x = \frac{C_o}{(u-1)^2}-1$ với C_o là hằng số. (2)

Thay y'=u và biểu thức của x theo u vào (1), ta được
$$y= u^2\left[\frac{C_o}{(u-1)^2}-1\right]+u^2 = u^2\frac{C_o}{(u-1)^2}. \qquad (3)$$
Ta thu được một hàm số có phương trình tham số như (2) và (3). Bây giờ ta khử u để tìm hệ thức của y theo x :

Từ (2) ta có $(u-1)^2= \frac{C_o}{x+1} \Rightarrow u=\sqrt{\frac{C_o}{x+1}}+1$

Thế biểu thức của u vào (3) thì được $y=\left(\sqrt{\frac{C_o}{x+1}}+1\right)^2(x+1)$. Biểu thức này thuộc dạng

$y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$ hoặc $y=\left(\sqrt{-(x+1)}+C\right)^2$, với C là hằng số.

Kiểm trực tiếp, ta thấy hàm số sau là nghiệm trên [-1,+∞) của phương trình vi phân (1):

$y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$ với C là hằng số.

– Xét trường hợp $u-u^2\neq 0$:

Thay y'=u= 0 vào (1), ta thấy hàm hằng y≡ 0 là nghiệm của phương trình (1).

Thay y'=u=1 vào (1), ta thấy hàm y=x+1 là nghiệm của phương trình (1).

118) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'+\ell n(y')-y=0$.

<u>Hướng dẫn</u>: Đưa về dạng y=f(y') rồi coi y' là tham số t. Sau đó suy ra biểu thức của y theo t và biểu thức x theo t.

<u>Lời giải.</u>

Phương trình tương đương là $y= y'+\ell n(y')$.

Coi y' là tham số t. Ta có phương trình của y theo tham số t là $y=t+\ell n\, t$.

Sau đây ta tìm phương trình của x theo tham số t.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{y'}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}.$$

Do đó $x=\ell n\, t-\frac{1}{t}+C$.

Ta suy ra hàm số sau là nghiệm trên miền (0,+∞) của phương trình vi phân :

$$\begin{cases} x=\ell nt-\frac{1}{t}+C, \\ y=t+\ell nt. \end{cases}$$ trong đó C là hằng số và tham số $t\in(0,+\infty)$.

MỘT SỐ TỪ TIẾNG ANH LIÊN QUAN TỚI CHƯƠNG 1.

Differential Equations.	Singular Solution.
Ordinary Differential Equations (ODF).	Initial conditions.
Partial Differential Equations (PDF).	Existence and uniqueness of a solution.
Interval of existence and uniqueness.	Direction Fields.
Initial-value problem (IVP).	A solution of the equation= An integral of the equation.
First-order ordinary differential.	An integral curve= A solution curve.
Trivial solution.	Separable Equation.
Explicit and implicit solutions.	Homogeneous Linear Differential Equations.
Family of solutions.	Nonhomogeneous Linear Differential Equations.
General Solution.	

<u>Sách tham khảo:</u>

-– DENNIS G.ZILL, Differential Equations with Modeling Applications, Brooks/Cole, 2001

– RICHARD K. MILLER, Introduction to Differential Equations, Prentice-Hall ,

– WILLIAM R. DERRICK – STANLEY I. GROSSMAN, Elementary Differential Equations, Addison – Wesley, 1997.

– R. KENT NAGLE/EDWARD B. SAFF, Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, Addison – Wesley Publishing Company, 1993.

– WILLIAM E. BOYCE., Elementary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc, 1997.

– NGUYỄN THẾ HOÀN-PHẠM PHU -Cơ sở Phương trình vi phân và lý thuyết ổn định. Nhà xuất bản Giáo Dục-2000

– MORRRIS W. HISCH, STEPHEN SMALE, Phương trình vi phân – Hệ Động lực và Đại số tuyến tính, Nhà xuất bản Đại Học và Trung Học Chuyên Nghiệp, 1979.

– MARTIN BRAVN, Differential Equations and Their Application, Spriger – Verlag, 1993.

– FRANK R. GIORDANO – MAURIVE D. WEIR, Differentiadl Equations, Addison – Wesley, 1988.

Tiến sĩ Nguyễn Thanh Vũ , 38639 462, nguyenthanhvu60@gmail.com

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Trong chương này, I được ký hiệu là một tập liên thông trong $\mathbb{R}$, tức I có một trong các dạng sau: $(-\infty,x_2)$, (x_1,x_2), $(x_1, +\infty)$, $(-\infty, x_2]$, $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, $[x_1, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

1. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

1.1. Định nghĩa

– Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình vi phân có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

trong đó p, q, f là các hàm số theo một biến x.

– Hàm số $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân (1) trên I nếu

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

trong đó y', y'' là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của hàm số y theo biến số x.

– Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình (1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai **thuần nhất**.

1.2. Phát biểu định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét bài toán (có điều kiệu đầu) sau

$$\begin{cases} y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x), & \forall x\in I \\ y(x_o)=y_o \\ y'(x_o)=y'_o \end{cases}$$

trong đó $x_o \in I$ và y_o, y'_o là các hằng số.

Giả sử các hàm số a, b, f liên tục trên I.

Khi đó bài toán luôn luôn có nghiệm duy nhất y= y(x) trên I.

2. NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

2.1. Định lý (định lý tổ hợp nghiệm)

Giả sử y_1 và y_2 là nghiệm trên I của phương trình thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Khi đó

$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ (với c_1 và c_2 là các hằng số) cũng là nghiệm trên I của phương trình này.

Chứng minh .

Do y_1 và y_2 là nghiệm của phương trình , nên với mọi x thuộc I ta có :

$$\begin{cases} y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=0 \\ y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)=0 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình trên cho c_1 và nhân hai vế của phương trình dưới cho c_2, rồi cộng vế , ta được

$$c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+p(x)\left[c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)\right]+q(x)\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]=0.$$

Suy ra $\quad y_3''(x)+p(x)y_3'(x)+q(x)y_3(x)=0$

Vậy y_3 là nghiệm của phương trình vi phân.

2.2. Độc lập tuyến tính

2.2.1. Định nghĩa độc lập tuyến tính

Xét hai hàm số y_1 và y_2 xác định trên I.

– Hai hàm số y_1 và y_2 được gọi là **độc lập tuyến tính** trên I nếu và chỉ nếu

$(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0) \Rightarrow (c_1 = 0 \wedge c_2 = 0)$

– Hai hàm số y_1 và y_2 được gọi là **phụ thuộc tuyến tính** nếu chúng không độc lập tuyến tính.

2.2.2 Định lý

Cho y_1 là hàm số liên tục và luôn khác 0 trên I,

v là hàm số trên I và không là hàm hằng .

Giả sử $y_2(x) = v(x)\, y_1(x)$, $\quad \forall x \in I$

Khi đó y_1, y_2 là hai hàm số độc lập tuyến tính trên I.

Chứng minh

Coi c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

Giả sử $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in I$

Khi đó, với mọi $x \in I$ ta có

$$c_1y_1(x) + c_2v(x)\, y_1(x) = 0$$
$$y_1(x)\,[c_1 + c_2v_1(x)] = 0$$
$$c_1 + c_2v(x) = 0 \qquad (\text{ do } y_1(x) \neq 0 \text{ })$$

Nếu $c_2 \neq 0$ thì $v(x) = -\dfrac{c_1}{c_2}$, điều này vô lý vì v không là hàm hằng.

Do đó $c_2 = 0$. Suy ra $c_1 = 0$.

Vậy y_1 và y_2 độc lập tuyến tính.

2.2.3. Định nghĩa hàm số Wronski

Giả sử y_1, y_2 là hai hàm khả vi trên I.

Hàm số Wronski của y_1 và y_2 (ký hiệu $W(y_1, y_2)$) được định nghĩa là hàm số xác định trên I và có biểu thức

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Nếu sử dụng ký hiệu định thức thì

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \text{ hay } W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

2.2.4. Định lý về độc lập tuyến tính

Giả sử y_1, y_2 là nghiệm trên I của phương trình vi phân

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Khi đó, hai hàm số y_1, y_2 độc lập tuyến tính trên I nếu và chỉ nếu

$$\exists x_o \in I \quad , \quad W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0$$

Chứng minh

– Giả sử tồn tại $x_o \in I$ thỏa $W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0$

Coi c_1, c_2 là hai hằng số tùy ý sao cho $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ với mọi $x \in I$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được $c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$ với mọi $x \in I$.

Ta có hệ hai phương trình bậc nhất với ẩn là c_1 và c_2 như sau :

$$\begin{cases} c_1y_1(x_o)+c_2y_2(x_o)=0 \\ c_1y_1'(x_o)+c_2y_2'(x_o)=0 \end{cases}$$

Nhân hai vế phương trình trên cho $y_2'(x_o)$, nhân hai vế phương trình dưới cho $y_2(x_o)$, rồi trừ vế ta được

$$\left(y_1(x_o)y_2'(x_o)-y_1'(x_o)y_2(x_o)\right) c_1=0 \;\Rightarrow\; W(y_1,y_2)(x_o).c_1=0 \Rightarrow\; c_1 = 0\,.$$

Tương tự, ta tìm được $c_2 = 0$.

Vậy y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

– Giả sử (bởi phương pháp phản chứng) rằng $W(y_1, y_2)(x) = 0$ với mọi $x \in I$.

Ta sẽ chứng minh y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $y_1(x) = -y_2(x)$ với mọi $x \in I$ thì y_1 và y_2 phụ thuộc tuyến tính, ta không cần chứng minh tiếp. Sau đây ta xét trường hợp tồn tại $x_o \in I$ thỏa $y_1(x_o) \neq -y_2(x_o)$.

Đặt $y_3=c_1y_1+c_2y_2$, với $c_1 = y_2(x_o)$ và $c_2 = -y_1(x_o)$. Do nguyên lý tổ hợp nghiệm thì y_3 là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Mặt khác, ta có

$$\begin{cases} y_3(x_o)=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_2(x_0)y_1(x_0)+(-y_1(x_0))y_2(x_0)=0, \\ y_3'(x_o)=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_2(x_o)y_1'(x_o)-y_1(x_o)y_2'(x_o)=-W(y_1,y_2)(x_0)=0. \end{cases}$$

Do đó y_3 là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ y(x_o)=0, \\ y'(x_o)=0. \end{cases}$$

Ta thấy hàm hằng $y \equiv 0$ cũng là nghiệm của bài toán.

Theo định lý duy nhất nghiệm (định lý 1.2) thì $y_3(x) = 0$ với mọi $x \in I$.

Suy ra $y_2(x_o)\, y_1(x) + (-y_1(x_o))\, y_2(x) = 0$ với mọi $x \in I$, trong đó hằng số $y_2(x_o) \neq 0$ hay $(-y_1(x_o)) \neq 0$ (do hai số này khác nhau).

Do đó y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính. Định lý đã được chứng minh.

2.3. Định lý về nghiệm tổng quát

Xét phương trình vi phân cấp hai thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

trong đó các hàm số p, q liên tục trên I.

Giả sử y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình vi phân và độc lập tuyến tính trên I.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = c_1y_1 + c_2y_2, \text{ trong đó } c_1, c_2 \text{ là các hằng số.}$$

Chú thích:

- Nghiệm $y = c_1y_1 + c_2y_2$, với c_1 và c_2 là các hằng số, được gọi là nghiệm tổng quát vì hai tính chất sau đúng:

  a) Mọi hàm số có dạng $y = c_1y_1 + c_2y_2$ đều là nghiệm của phương trình vi phân, trong đó c_1 và c_2 là các hằng số tùy ý.

  b) Mọi nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân đều có dạng

  $y = c_1y_1 + c_2y_2$, trong đó c_1, c_2 là các hằng số.

- Hai nghiệm độc lập tuyến tính y_1, y_2 được gọi là hai nghiệm cơ sở.
- **Không gian gồm tất cả các nghiệm là một không gian 2 chiều.**

<u>Chứng minh định lý</u>

– Xét hàm số có dạng $y = c_1y_1 + c_2y_2$ với c_1 và c_2 là các hằng số.

Áp dụng định lý tổ hợp nghiệm 2.1, ta có y là nghiệm của phương trình vi phân.

– Coi Φ là một nghiệm tùy ý của phương trình vi phân.

Ta sẽ chứng minh Φ có dạng $y = c_1y_1 + c_2y_2$ với c_1 và c_2 là các hằng số.

Hai hàm y_1, y_2 độc lập tuyến tính nên theo định lý 2.2.4 thì tồn tại $x_o \in I$ thỏa

$$W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0 \Leftrightarrow y_1y_2'(x_o) - y_1'(x_o)y_2(x_o) \neq 0$$

Gọi $k_1 = \Phi(x_o)$ và $k_2 = \Phi'(x_o)$.

Xét nghiệm $y_3 = c_1, y_1 + c_2y_2$ của phương trình vi phân với các hằng số c_1, c_2 được chọn sao cho

$$\begin{cases} y_3(x_o)=k_1 \\ y_3'(x_o)=k_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1y_1(x_o)+c_2y_2(x_o)=k_1 \\ c_1y_1'(x_o)+c_2y_2'(x_o)=k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=\dfrac{k_1y_2'(x_o)-k_2y_2(x_o)}{y_1(x_o)y_2'(x_o)-y_1'(x_o)y_2(x_o)} \\[2ex] c_2=\dfrac{y_1(x_o)k_2-y_1'(x_o)k_1}{y_1(x_o)y_2'(x_o)-y_1'(x_o)y_2(x_o)} \end{cases}$$

(trong đó mẫu số chính là $W(y_1, y_2)(x_o)$ nên khác 0).

– Xét bài toán

$$\begin{cases} y''+a(x)y'+b(x)y=0 \\ y(x_o)=k_1 \\ y'(x_o)=k_2 \end{cases}$$

Ta thấy Φ và y_3 cùng là nghiệm của bài toán trên, do đó Φ và y_3 trùng nhau (theo định lý 1.2), vậy trên I ta có $\Phi = c_1y_1 + c_2y_2$.

<u>**Bài tập:**</u> Bài tập từ 119 tới 125

3. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG

3.1. Phương trình đặc trưng

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất có hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = 0$$

trong đó a, b, c là các hằng số thực và $a \neq 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân này được định nghĩa là phương trình bậc hai

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Chú thích:

Phương trình $ay'' + by' + cy = 0$ tương đương với phương trình $y''+\frac{b}{a}y'+\frac{c}{a}y = 0$ (nếu $a \neq 0$).

3.2. Định lý về nghiệm

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất với hệ số hằng

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ (với } a \neq 0) \qquad (1)$$

Dạng nghiệm của phương trình vi phân trên **R** phụ thuộc vào đại lượng ($b^2 - 4ac$) như sau:

1. Trường hợp $b^2 - 4ac > 0$:

Gọi r_1, r_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1) là trên **R** là

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

2. Trường hợp $b^2 - 4ac = 0$:

Gọi r_o là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1) trên **R** là

$$y(x) = c_1e^{r_ox} + c_2xe^{r_ox}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

3. Trường hợp $b^2 - 4ac < 0$:

Phương trình đặc trưng không có nghiệm thực nhưng có hai nghiệm phức là

$$-\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Đặt $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1) trên **R** là

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

với c_1 và c_2 là các hằng số.

<u>Chứng minh định lý.</u>

1. Trường hợp $b^2 - 4ac > 0$:

Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân (1) dưới dạng $y(x) = e^{rx}$ (với r là hằng số)

Thế $y(x) = e^{rx}$ vào (1) ta được

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

Do r_1 và r_2 là nghiệm của phương trình (2), nên $y_1(x) = e^{r_1x}$ và $y_2(x) = e^{r_2x}$ là hai nghiệm của phương trình vi phân (1).

Ta có

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & r_1e^{r_1x} \\ e^{r_2x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

Theo định lý 2.3 thì y_1, y_2 là hai nghiệm cơ sở của phương trình vi phân (1) trên **R** . Do đó, nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình vi phân (1) là

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ với c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

2. Trường hợp $b^2 - 4ac = 0$

:– Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình (1) dưới dạng $y(x) = e^{rx}$. Lý luận giống như trường hợp $b^2 - 4ac > 0$. Do r_o là nghiệm kép của phương trình (2), nên một nghiệm của phương trình vi phân (1) là $y_1(x) = e^{r_ox}$.

Xét $y_2(x) = xe^{r_ox}$, ta thấy y_2 cũng là nghiệm của phương trình (1) vì với mọi $x \in R$ ta có

$$ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) = a\left(2r_oe^{r_ox} + r_o^2xe^{r_ox}\right) + b\left(e^{r_ox} + r_oxe^{r_ox}\right) + cxe^{r_ox}$$

$$= xe^{r_ox}\left(ar_o^2 + br_o + c\right) + e^{r_ox}\left(2ar_o + b\right)$$

$$= 0 \qquad \left(\text{do } ar_o^2 + br_o + c = 0 \text{ và } r_o = -\frac{b}{2a}\right)$$

Hai nghiệm y_1 và y_2 độc lập tuyến tính bởi định lý 2.2.2. Sự độc lập tuyến tính này có thể suy ra từ định thức Wronski như sau

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_o x} & r_o e^{r_o x} \\ xe^{r_o x} & \left(e^{r_o x} + r_o x e^{r_o x}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_o \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Theo định lý 2.3 , nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình vi phân (1) là

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{r_o x} + c_2xe^{r_o x}$ với c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

3. Trường hợp $b^2 - 4ac < 0$:

– Theo chứng minh trong trường hợp 1 ở trên, nếu r là nghiệm thực của phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$ thì hàm số $x \mapsto e^{rx}$ thỏa phương trình vi phân. Sau đây ta chứng minh trường hợp r là nghiệm phức của phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$ thì hàm phức $x \mapsto e^{rx}$ cũng thỏa phương trình vi phân (1).

Xét hàm phức g từ $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ với $g(x) = e^{rx}$, trong đó r là nghiệm phức của phương trình đặc trưng.

Do $g'(x) = re^{rx}$ và $g''(x) = r^2e^{rx}$ nên

$ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$

Suy ra $ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0$ với mọi $x \in R$.

– Sau đây ta tìm hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân.

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức là

$$\frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$$

Xét nghiệm phức $r = \alpha + i\beta$ với $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ và $\beta = \dfrac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$

Ta có $g(x) = e^{rx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)] = y_1(x) + iy_2(x)$,

trong đó $$\begin{cases} y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}$$

Do đó $g'(x) = y_1'(x) + iy_2'(x)$

$g''(x) = y_1''(x) + iy_2''(x)$

Từ tính chất $ag'' + bg' + cg = 0$, ta suy ra

$$a\left(y_1'' + iy_2''\right) + b\left(y_1' + iy_2'\right) + c(y_1 + iy_2) = 0$$

$$\left(ay_1'' + by_1' + cy_1\right) + i\left(ay_2'' + by_2' + cy_2\right) = 0$$

Do đó $$\begin{cases} ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy hai hàm số thực y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình vi phân (1).

Hai nghiệm y_1 và y_2 này độc lập tuyến tính trên R vì

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & \left[\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right] \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) & \left[\alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)\right] \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$$

Theo định lý 2.3 thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1) trên **R** là

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ với c_1 và c_2 là các hằng số.

Chú thích: Người ta có thể chứng minh y_1, y_2 là nghiệm của phương trình vi phân (1) mà không dùng kiến thức hàm phức, khi đó phải dựa vào phép tính đạo hàm từ biểu thức của y_1 và y_2.

3.3. Một số thí dụ.

3.3.1. *Thí dụ*. Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 2y' - 8y = 0$ trên R.

Lời giải

– Phương trình đặc trưng là $r^2 - 2r - 8 = 0$

Biệt số $\Delta' = 9$. Hai nghiệm của phương trình đặc trưng là $r_1 = 4$, $r_2 = -2$.

Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$, với c_1 và c_2 là các hằng số.

3.3.2. *Thí dụ*. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân $y'' - 4y' + 4y = 0$.

<u>Lời giải</u>

Phương trình đặc trưng là $r^2 - 4r + 4 = 0$
Biệt số $\Delta = 0$. Nghiệm (kép) của phương trình đặc trưng là $r = 2$.
Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} \text{ với } c_1 \text{ và } c_2 \text{ là các hằng số.}$$

3.3.3. Thí du. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân $y'' + 2y' + 10y = 0$. .<u>Lời giải</u>
Phương trình đặc trưng là $r^2 + 2r + 10 = 0$.
Biệt số $\Delta' = -9$. Nghiệm phức của phương trình đặc trưng là $r = -1 \pm i.\,3$
Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y = c_1e^{-x}\cos(3x) + c_2e^{-x}\sin(3x), \text{ với } c_1 \text{ và } c_2 \text{ là các hằng số.}$$

3.3.4. Thí du. Hãy tìm nghiệm trên R của bài toán có điều kiện đầu như sau

$$\begin{cases} y'' + y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Lời giải</u>

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân là $r^2 + r = 0$.
Hai nghiệm của phương trình đặc trưng là $r = 0$ và $r = -1$.
Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-1.x}$$

$$y = c_1 + c_2e^{-x}, \quad \text{với } c_1 \text{ và } c_2 \text{ là các hằng số.}$$

Do đó $y' = -c_2e^{-x}$.
Dựa vào điều kiện đầu, ta tìm giá trị của c_1 và c_2 như sau.

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y_o'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm trên R của bài toán là $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

<u>Bài tập</u>: Bài tập từ 126 tới 157

4. PHƯƠNG TRÌNH EULER

4.1 Định nghĩa.

Phương trình Euler thuần nhất trên I là phương trình vi phân có dạng

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số và I không chứa 0.

Phương trình đặc trưng của phương trình Euler (1) được định nghĩa là phương trình bậc 2 theo ẩn r như sau

$$r(r-1) + ar + b = 0 \qquad (2)$$

hay $\quad r^2\,(a-1)\,r + b = 0$

Chú thích :

Nếu nghiệm của (1) có dạng $y = x^r$ thì r phải thỏa phương trình sau với mọi $x \in I$

$$x^2(x^r)'' + ax\,(x^r)' + b(x^r) = 0$$
$$x^2r\,(r-1)\,x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r = 0$$
$$x^r\,[r\,(r-1) + ar + b] = 0$$
$$r\,(r-1) + ar + b = 0$$

Do đó, nếu r là nghiệm của phương trình đặc trưng (2) thì $y = x^r$ là nghiệm của phương trình (1).

4.2. Định lý về nghiệm.

Xét phương trình Euler thuần nhất

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số và I không chứa 0.

<u>a) Trường hợp phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2.</u>

Giả sử hàm số $y_1 = x^{r_1}$ và hàm số $y_2 = x^{r_2}$ xác định trên I.
Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

b) Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép r_o.

Giả sử hàm số $y_1 = x^{r_o}$ xác định trên I.
Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y(x) = x^{r_o}\,(c_1 + c_2 \ln|x|)$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

c) Trường hợp phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức $\alpha \pm i\beta$:

Giả sử hàm số $y = x^{\alpha}$ xác định trên I.
Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y(x) = x^{\alpha}\,[c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|)]$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

Chứng minh

a) Do r_1, r_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $y_1 = x^{r_1}$ và $y_2 = x^{r_2}$ là nghiệm của phương trình (1) (theo chú thích trong định nghĩa 6.1.2).

– Ta có

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{r_1} & r_1 x^{r_1-1} \\ x^{r_2} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\,x^{r_1+r_2-1} \neq 0$$

Do đó y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (1) là tổ hợp tuyến tính của y_1, y_2.

b) Trong trường hợp này, hàm $y_1 = x^{r_o}$ là nghiệm của phương trình (1). Ta sẽ chứng minh $y_2 = x^{r_o} \ln|x|$ cũng là nghiệm của (1).

Ta có $$y_2' = r_o x^{r_o-1}\ln|x| + x^{r_o}\frac{1}{x} = x^{r_o-1}\left(r_o \ln|x| + 1\right)$$

và $$y_2'' = (r_o - 1)x^{r_o-2}\left(r_o \ln|x| + 1\right) + x^{r_o-1} r_o \frac{1}{x} = x^{r_o-2}\left[(r_o-1)r_o \ln|x| + 2r_o - 1\right]$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x^2 y_2'' + axy_2' + by_2 &= x^{r_o}\left[(r_o-1)r_o\ln|x| + 2r_o - 1\right] + ax^{r_o}\left(r_o\ln|x| + 1\right) + bx^{r_o}\ln|x| \\ &= x^{r_o}\left[\ln|x|\left(r_o(r_o-1) + ar_o + b\right) + 2r_o - 1 + a\right]. \end{aligned}$$

Đồng thời, r_o là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (2) nên

$$\begin{cases} r_o(r_o-1) + ar_o + b = 0 \\ r_o = -\dfrac{a-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \ln|x|\left(r_o(r_o-1) + ar_o + b\right) + 2r_o - 1 + a = 0$$

Vậy y_2 là một nghiệm của phương trình (1).

– Ta thấy y_2 có dạng $y_2(x) = \ln|x|\,y_1(x)$. Do đó y_2 và y_1 độc lập tuyến tính (theo định lý 2.2.2)
Suy ra nghiệm tổng quát của (1) là tổ hợp tuyến tính của y_1 và y_2.

c) Xét $y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln|x|)$
$y_2 = x^{\alpha}\sin(\beta \ln|x|)$

Việc chứng minh y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (1) được thực hiện tương tự như trong chứng minh của định lý 3.2. Việc chứng minh này được xem như là một bài tập.

4.3 Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên $I = (-\infty, 0)$ của phương trình vi phân

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0.$$

Lời giải

– Phương trình đặc trưng của phương trình Euler là

$$r(r-1) + 2r - 12 = 0 \Leftrightarrow r^2 + r - 12 = 0$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm là $r_1 = -4$, $r_2 = 3$.
Vậy nghiệm tổng quát trên I của phương trình vi phân là

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

$$y(x) = \frac{c_1}{x^4} + c_2 x^3$$ với c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

Bài tập: Bài tập từ 158 tới 168

5. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG THUẦN NHẤT

– Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

trong đó các hàm số p, q, f liên tục trên I.
và phương trình thuần nhất tương ứng với nó là

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

5.1. Định lý.

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

trong đó các hàm số p, q, f liên tục trên I.
Phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (1) là

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

Giả sử y_P là một nghiệm (đặc biệt) trên I của phương trình (1)
và y_o là nghiệm tổng quát trên I của phương trình (2).
Khi đó, nghiệm tổng quát trên I của phương trình (1) là

$$y = y_P + y_o.$$

Chứng minh định lý.

– Xét phương trình (1).

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

Hàm số y_P là nghiệm của phương trình (1) nên

$$y_P'' + p(x)y_P' + q(x)y_P = f(x)$$

Trừ vế hai phương trình trên ta được phương trình tương đương với (1)

$$y'' - y_P'' + p(x)(y' - y_P') + q(x)(y - y_p) = 0$$

$$(y - y_P)'' + p(x)(y - y_P)' + q(x)(y - y_P) = 0$$

Đặt $Y = y - y_P$, ta được phương trình thuần nhất

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = 0 \quad (2)$$

Do đó, quan hệ giữa nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) như sau

$Y = y - y_P$ hay $y = y_P + Y$

5.2 Phương pháp giải

– Tìm nghiệm tổng quát y_ocủa phương trình (2). Nghiệm này có dạng

$$y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

trong đó y_1, y_2 độc lập tuyến tính và c_1, c_2 là các hằng số.
– Tìm nghiệm đặc biệt y_p của phương trình không thuần nhất (1). Để tìm nghiệm đặc biệ, người ta thường dựa vào phương pháp xác định hệ số (xem thí dụ trong mục 6.3 ở dưới) hoặc phương pháp biến thiên tham số (xem thí dụ trong mục 6.4 ở dưới).
– Nghiệm y của phương trình (1) là tổng của y_0 và y_p:

$$y = y_0 + y_p.$$

5.3. Tìm nghiệm đặc biệt bằng phương pháp xác định hệ số

Phương trình không thuần nhất (1) đang xét như sau

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Đối với một số dạng đặc biệt của hàm số f, người ta có thể đoán được dạng của hàm số y để y thỏa phương trình (1). Chẳng hạn khi $f(x) = x^2$ thì ta đoán $y = Ax^2 + Bx + C$ có thể là một nghiệm đặc biệt của phương trình (1), sau đó ta phải xác định các hệ số A, B, C để y thật sự là nghiệm. Phương pháp này gọi là phương pháp xác định hệ số (còn gọi là phương pháp hệ số bất định), phương pháp này không tổng quát bằng phương pháp biến thiên hệ số nhưng trong một số phương trình thì phương pháp xác định hệ số dễ tìm nghiệm hơn.
Ta chỉ có thể sử dụng phương pháp xác định hệ số khi mỗi số hạng của f là một hay tích của nhiều hàm số có dạng sau:
a) Đa thức theo x (hằng số được coi là đa thức bậc 0)
b) Hàm mũ $e^{\alpha x}$
c) Hàm $\sin\beta x$, $\cos\beta x$
Chẳng hạn , ta có thể áp dụng phương pháp xác định hệ số đối với các trường hợp sau:
$F(x) = 20$ (f là hàm hằng); $f(x) = xe^{5x}$; $f(x) = x^3\sin 2x$; $f(x) = e^{2x}\cos 4x$; $f(x) = 2x^2e^{-4x}\cos x + 7$

5.3.1. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm trên **R** của phương trình sau $y'' - y = x^2$ (3)

Lời giải.

– Phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất ở trên là
$y'' - y = 0$ (4)

Phương trình đặc trưng $r^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm là $r = \pm 1$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (4) là $y_o(x) = c_1e^x + c_2 e^{-x}$

– Phương trình không thuần nhất (3) có vế trái là đa thức bậc 2 nên ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình này dưới dạng đa thức bậc 2 như sau: $y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Khi đó $y'_P = 2Ax + B$ và $y''_P = 2A$.

Do đó y_P là nghiệm của phương trình (8) nếu với mọi $x \in R$ ta có:

$$y''_P - y_P = x^2 \Leftrightarrow 2A - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \Leftrightarrow -Ax^2 - Bx + 2A - C = x^2,$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng, ta được

$$\begin{cases} -A = 1 \\ -B = 0 \\ 2A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

Do đó $y_P(x) = -x^2 - 2$

– Vậy nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình (8) là

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - x^2 - 2, \quad \text{với } c_1, c_2 \text{ là các hệ số tùy ý.}$$

5.3.2. Thí dụ. Hãy tìm một nghiệm đặc biệt trên **R** của phương trình $y'' - y' - y = \sin x$

Lời giải.

– Vế phải là hàm số $f(x) = \sin x$ nên ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng sau:

$$y_P(x) = A\cos x + B\sin x$$

Khi đó

$$\begin{cases} y'_P = -A\sin x + B\cos x \\ y''_P = -A\cos x - B\sin x \end{cases}$$

Hàm y_P là nghiệm của phương trình vi phân nếu với mọi $x \in R$ ta có:

$$y''_P - y'_P - y_P = \sin x \Leftrightarrow (-A\cos x - B\sin x) - (-A\sin x + B\cos x) - (A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (-2A - B)\cos x + (A - 2B - 1)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A - B = 0 \\ A - 2B - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Do đó $y_P(x) = \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$.

5.3.3. Thí dụ. Hãy tìm một nghiệm đặc biệt trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$$

Lời giải.

– Ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng $y_P(x) = Ae^{3x}$

Khi đó $y'_P = 3Ae^{3x}$ va $y''_P = 9Ae^{3x}$.

Hàm y_P là nghiệm của phương trình vi phân nếu với mọi $x \in$ **R** ta có

$$y''_P + 3y'_P + 2y_P = e^{3x} \Leftrightarrow 9Ae^{3x} + 3.3Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow 20Ae^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{20}$$

Vậy $y_P(x) = \frac{1}{20} e^{3x}$.

5.3.4. Thí dụ. Hãy tìm một nghiệm đặc biệt trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' + 3y' + 2y = e^x \sin x$$

Lời giải.

– Ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng $y_P(x) = (A\cos x + B\sin x)\, e^x$

Khi đó $y'_P = (-A\sin x + B\cos x)e^x + (A\cos x + B\sin x)e^x = [(A + B)\cos x + (-A + B)\sin x]\, e^x$

và $y''_P = [-(A + B)\sin x + (-A + B)\cos x + (A + B)\cos x + (-A + B)\sin x]\, e^x$
$= (2B\cos x - 2A\sin x)e^x$

Hàm y_P là nghiệm của phương trình vi phân nếu với mọi $x \in$ **R** ta có

$$y''_P - 3y'_P + 2y_P = e^x \sin x$$

$$(2B\cos x - 2A\sin x)\, e^x - 3\,[(A + B)\cos x + (-A + B)\sin x]e^x + 2(A\cos x + B\sin x)e^x = e^x \sin x$$

$$[(2B - 3A - 3B + 2A)\cos x + (-2A + 3A - 3B + 2B)\sin x]\, e^x = e^x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B - 3A - 3B + 2A = 0 \\ -2A + 3A - 3B + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A - B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $y_P(x) = \left(\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)e^x \ \dfrac{e^x}{2}\left(\cos x - \sin x\right)$

5.3.5. Thí dụ. Hãy tìm một nghiệm đặc biệt trên **R** của phương trình vi phân $y'' + y = xe^{2x}$

Lời giải.

– Ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng $y_P(x) = (Ax + B)e^{2x}$

Khi đó $y'_P = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$

và $y''_P = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$

Hàm số y_P là nghiệm của phương trình vi phân nếu với mọi $x \in$ **R** ta có

$$y''_P + y_P = xe^{2x}$$

$$(4Ax + 4A + 4B)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} = xe^{2x}$$

$$[(5A - 1)x + 4A + 5B]e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5A - 1 = 0 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{1}{25} \end{cases}$$

Do đó

$$y_P(x) = \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x}$$

$$y_P(x) = \frac{e^{2x}}{25}(5x - 4)$$

Chú thích: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{e^{2x}}{25}(5x - 4) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

5.3.6. Thí dụ. Hãy tìm một nghiệm trên **R** của phương trình vi phân $y'' - y = x\sin x$

Hướng dẫn: Tìm y_P dưới dạng $y_P(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$.

5.3.7. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' + y = xe^{2x} + 3x^2 + 14x + 4$$

Hướng dẫn

– Phương trình $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát là $y_o(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

Phương trình $y'' + y = xe^{2x}$ có nghiệm đặc biệt là $y_{p1}(x) = \dfrac{e^{2x}}{25}(5x - 4)$ (theo thí dụ 5.4.5)

Phương trình $y'' + y = 3x^2 + 14x + 4$ có nghiệm đặc biệt là $y_{p2}(x) = 3x^2 + 2x + 4$

– Phương trình vi phân ở đề bài có nghiệm đặc biệt là $y_P(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ vì

$$y_P'' + y_P = \left(y_{p1}'' + y_{p2}''\right) + \left(y_{p1} + y_{p2}\right) = \left(y_{p1}'' + y_{p1}\right) + \left(y_{p2}'' + y_{p2}\right) = (xe^{2x}) + (3x^2 + 14x + 4)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y(x) = y_o(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{e^{2x}}{25}(5x - 4) + 3x^2 + 2x + 4$$

5.3.8. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}. \qquad (*)$$

Lời giải.

– Phương trình vi phân thuần nhất tương ứng là $y'' - y' - 12y = 0$ (**)

Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 12 = 0$ có hai nghiệm là $r_1 = 4$, $r_2 = -3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$$

– Nhận xét: Nếu ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình (*) dưới dạng $y_P(x) = Ae^{4x}$ thì sẽ thất bại vì $(Ae^{4x})'' - (Ae^{4x})' - 12(Ae^{4x}) = 0 \neq e^{4x}$. Hàm số $y = Ae^{4x}$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (**) nên không thể là nghiệm của (*).

– Ta tìm một nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân (*) dưới dạng $y_P(x) = Axe^{4x}$.
Khi đó $y'_P = Ae^{4x} + 4Axe^{4x}$ và $y''_P = 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x} + 16Axe^{4x} = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x}$
Hàm số y_P là nghiệm của phương trình vi phân không thuần nhất

$$y''_P - y'_P - 12y_P = e^{4x} \Leftrightarrow (8Ae^{4x} + 16Axe^{4x}) - (Ae^{4x} + 4Axe^{4x}) - 12(Axe^{4x}) = e^{4x}$$

$$\Leftrightarrow 7Ae^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow 7A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{7}.$$

Do đó $y_P(x) = \frac{1}{7} xe^{4x}$

– Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất (*) là

$$y(x) = y_o(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{7} xe^{4x}$$ với c_1, c_2 là các hằng số.

5.3.9. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \qquad (*)$$

Lời giải.

– Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' - 4y' + 4y = 0$ (**)
Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm kép là $r = 2$.
Nghiệm tổng quát của phương trình (**) là $y_o(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$
– Nhận xét: Thông thường, khi vế phải của (17) là e^{2x} thì ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng $y_P = Ae^{2x}$. Tuy nhiên, $y_1 = e^{2x}$ và $y_2 = xe^{2x}$ là nghiệm của phương trình thuần nhất(**), do đó hai hàm này không thể là nghiệm của phương trình (*) . Trong bài này ta phải xét nghiệm đặc biệt có dạng Ax^2e^{2x}.
– Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình (*) dưới dạng $y_P(x) = Ax^2e^{2x}$
Khi đó $y'_P = Ae^{2x}(2x^2 + 2x)$ và $y''_P = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$
Hàm số y_P là nghiệm của phương trình (*) nếu

$$y''_P - 4y'_P + 4y_P = e^{2x} \Leftrightarrow Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Do đó $y_P(x) = \frac{1}{2} x^2e^{2x}$

– Nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình (*) là

$$y(x) = y_o(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2 xe^{2x} + \frac{1}{2} x^2e^{2x}$$

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2x + \frac{1}{2} x^2)$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số.

5.3.10. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình vi phân $y'' + y = \cos x$ (*)

Lời giải.

– Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' + y = 0$ (**)
Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phức là $r = \pm i$.
Nghiệm tổng quát của phương trình (**) là $y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.
– Nhận xét: Thông thường, vế phải của (19) là cos x thì ta tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng $y_P = A\cos x + B\sin x$. Tuy nhiên, trong phương trình này thì $y_1 = \cos x$ và $y_2 = \sin x$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (**), do đó ta sẽ tìm nghiệm đặc biệt dưới dạng

$$y_P = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

– Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình (*) dưới dạng $y_P(x) = Ax\cos x + Bx\sin x$
Khi đó $y'_P = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$
và $y''_P = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x$
$= -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x$
Hàm số y_P là nghiệm của phương trình (*) nếu

$$y''_P + y_P = \cos x$$

$$(-2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\cos x - Bx\sin x) + (Ax\cos x + Bx\sin x) = \cos x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó một nghiệm đặc biệt của phương trình (*) là $y_P(x) = \dfrac{1}{2}$ x sin x.

Nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình (*) là

$$y(x) = y_o(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x\sin x$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số.

Bài tập: Bài tập từ 169 tới 175

5.4. Tìm nghiệm đặc biệt bằng phương pháp biến thiên tham số

5.4.1. Định lý.

Xét phương trình vi phân không thuần nhất (1) và phương trình vi phân thuần nhất (2).

Giả sử nghiệm tổng quát trên I của phương trình thuần nhất (2) là

$$y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

với c_1, c_2 là các hằng số và y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Giả sử v_1 và v_2 là hai hàm số thỏa tính chất (i) hoặc (ii) như sau:

(i) Hai hàm số v_1, v_2 là nghiệm đặc biệt trên I của hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = f(x) \end{cases}.$$

(ii) Hai hàm số v_1, v_2 có biểu thức

$$\begin{cases} v_1(x) = \displaystyle\int \frac{-f(x)\ y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx \\ v_2(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)\ y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx \end{cases},$$

trong đó các hằng số tích phân được chọn tùy ý.

Khi đó, hàm số sau là một nghiệm đặc biệt trên I của phương trình không thuần nhất (1)

$$y_P(x) = v_1(x)\ y_1(x) + v_2(x)\ y_2(x).$$

Chú thích: Từ nghiệm y_o ta thay hai hằng số c_1, c_2 bằng hai hàm số v_1, v_2 thì ra dạng nghiệm đặc biệt y_P. Phương pháp này gọi là phương pháp **biến thiên tham số** hay phương pháp **biến thiên hằng số** hay phương pháp **Lagrange**.

Chứng minh

Giả sử phương trình thuần nhất (2) có nghiệm tổng quát

$$y_o = c_1y_1 + c_2y_2$$

Ta tìm nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (1) dưới dạng

$$y_P(x) = v_1(x)\ y_1(x) + v_2(x)\ y_2(x)$$

Đạo hàm của y_P là

$$y_P' = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2'$$
$$= \left(v_1'y_1 + v_2'y_2\right) + \left(v_1y_1' + v_2y_2'\right)$$

Để có biểu thức đơn giản, ta chọn $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$

Lúc đó $y_P' = v_1y_1' + v_2y_2'$.

Suy ra $y_P'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''$

Thế các biểu thức y_P, y_P', y_P'' vào phương trình (1) thì được

$$y_P'' + py_P' + qy_P = f \qquad (5)$$

$$v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'' + p\left(v_1y_1' + v_2y_2'\right) + q\,(v_1y_1 + v_2y_2) = f$$

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + v_2\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) = f$$

trong đó

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 & \left(do\ y_1,\ y_2\ là\ nghiệm\ của\ (2)\right) \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình (5) tương đương với $v_1'y_1' + v_2'y_2' = f$

Như vậy $y_P = v_1y_1 + v_2y_2$ là nghiệm đặc biệt của phương trình (1) nếu v_1, v_2 thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = f \end{cases}$$

– Giải hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn v_1', v_2' ta được

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{-f.y_2}{y_1y_2' - y_2y_1'} = \dfrac{-f\,y_2}{W(y_1, y_2)} \\ v_2' = \dfrac{f\,y_1}{y_1y_2' - y_2y_1'} = \dfrac{f\,y_1}{W(y_1, y_2)} \end{cases}$$

(do y_1, y_2 độc lập tuyến tính nên mẫu số luôn khác 0).

Như thế, v_1 và v_2 được chọn là

$$\begin{cases} v_1(x) = \displaystyle\int \frac{-f(x)\ y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx \\ v_2(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx \end{cases}$$

5.4.2. Thí dụ. Hãy tìm nghiệm trên R của bài toán sau

$$\begin{cases} y'' + y = 4\sin x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad (*)$$

Chú thích: Việc tìm nghiệm đặc biệt của bài này bằng phương pháp xác định hệ số thì dễ dàng hơn bằng phương pháp biến thiên tham số. Tuy nhiên, phương pháp biến thiên tham số vẫn được trình bày để làm ví dụ cho phương pháp này.

Lời giải

– Phương trình thuần nhất y" + y = 0 có phương trình đặc trưng là $r^2 + 1 = 0$, phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức là $r = \pm i$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất trên **R** là $y_o(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$

hay $y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ với $y_1(x) = \cos x$ và $y_2(x) = \sin x$.

– Một nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (*) là

$y_P(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$

trong đó v_1, v_2 là các hàm số thỏa

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)v_1' + (\sin x)\ v_2' = 0 \\ (-\sin x)v_1' + (\cos x)v_2' = 4\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -4\sin^2 x \\ v_2' = 4\sin x\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -4\displaystyle\int \sin^2 x\ dx \\ v_2 = 4\displaystyle\int \sin x\cos x\ dx \end{cases}$$

Áp dụng công thức $\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x\cos x\right) + k_1$ và

$$\int \sin x\cos x\ dx = \int (\sin x)(\sin x)'\ dx = \frac{\sin^2 x}{2} + k_2$$

ta được $\begin{cases} v_1 = 2(\sin x\ \cos x - x) & (chọn\ k_1 = 0) \\ v_2 = 2\sin^2 x & (chọn\ k_2 = 0) \end{cases}$

Suy ra nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (*) là

$y_P(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$

$= 2(\sin x\cos x - x)\cos x + 2\sin^2 x\sin x$

$= 2\sin x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2x\cos x = 2\sin x - 2x\cos x$

Nghiệm tổng quát trên **R** của phương trình không thuần nhất (*) là

$y(x) = y_o(x) + y_P(x)$

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + 2\sin x - 2x\cos x$ với c_1, c_2 là các hằng số.

$y(x) = c_1\cos x + (c_2 + 2)\sin x - 2x\cos x$

$y(x) = c_1\cos x + c_3\sin x - 2x\cos x$ (với $c_3 = c_2 + 2$)

Suy ra $y'(x) = -c_1\sin x + c_3\cos x + 2x\sin x - 2\cos x$

– Ta dựa vào điều kiện đầu để xác định hằng số c_1, c_3 như sau

$$\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=3 \\ c_2-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=3 \\ c_3=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm trên **R** của bài toán là

y(x) = 3 cos x + sin x – 2x cos x

y(x) = (3 – 2x) cos + sin x.

Bài tập: Bài tập từ 178.

Bài tập: Bài tập từ 179 tới 180

Bài tập: Bài tập từ 181 tới 187

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

119)

Bài toán nào thỏa các điều kiện của định lý về sự duy nhất nghiệm 1.2

a) $y''+\frac{1}{x}y'+3y=x^2,\ y(0),\ y'(0)=1$

b) $y''+\frac{1}{x}y'+3y=x^2, y(1)=1, y'(1)=3$ Đáp số : b

c) $y''+\frac{1}{x}y'+3y=x^2, y(1)=1, y'(2)=3$

d) $xy''+y'+4xy=0, y(0)=1, y'(0)=2$

120) Cặp hàm số nào sau đây độc lập tuyến tính

a) e^x, e^{2x} b) $\frac{-3}{x}; \frac{4}{x}$

c) $\ln x, \ln x^3$ b) $\sin x, \text{tg}x$

e) 3,x Đáp số : (a),(d),(e)

121) Cho $y=e^x$ và $y=e^{2x}$ là hai nghiệm của phương trình $y''+ay'+2y=0$ với a là hằng số: hàm số nào sau đây cũng là nghiệm của phương trình này:

a) e^x+e^{2x} b) e^x-8e^{2x} c) $-8e^{2x}$ d) $17e^x$

Đáp số: (a),(b),(c),(d)

122) Hãy cho biết hàm số nào là nghiệm của phương trình vi phân y’’+y=0

a) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ b) $y_1=c_1\sin x+c_2\sin 2x$

c) $y = c_1\cos x + c_2\cos(-x)$ d) $y = c_1\sin x + c_2\cos x$

e) $y = c_1\cos x – c_2\sin x$ Đáp số: (d) hay (e)

123) Hãy tìm hàm số Wronski của hàm số $y_1(x) = x^2$ và $y_2(x) = x^5$

a) $y = 5x^6 – 2x^5$ b) $y = x^7$ c) $y = 2x^3-5x^9$

d) $y = 2x – 5x^4$ e) $y = 3x^6$ Đáp số: (e)

124) Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân y” + 4y = 0 là

$y = c_1\cos2x+c_2\sin2x$. Một nghiệm của phương trình y” + 4y = x là $y=\frac{1}{4}x$. Một nghiệm của phương trình y” + 4y= e^x là $y=\frac{1}{5}e^x$

Hàm số nào sau đây là nghiệm của phương trình y” + 4y = x + e^x

a) $y = \frac{1}{4}x + e^{\frac{x}{5}}$ b) $y = x + 4e^{\frac{x}{5}}$

c) $y = \frac{1}{4}x - e^{\frac{x}{5}}$ d) $y = \frac{1}{4}x + e^{\frac{x}{5}} + 3\cos 2x - 5\sin 2x$

e) $y = \frac{1}{4}x + \sin 2x$ f) $y = e^{\frac{x}{5}} - 3\cos 2x$

g) $y = \frac{1}{4}x + e^{\frac{x}{5}} + \sin 2x$ h) $y = \frac{1}{4}x + e^{\frac{x}{5}} - \cos 2x$

Đáp số: (a), (d), (g), (h)

125) Trong 9 phương trình sau, phương trình nào là phương trình vi phân tuyến tính. Nếu nó là tuyến tính thì hãy xét thêm tính chất thuần nhất và tính chất hệ số hằng.

a) $y'' + 2x^3y' + y = 0$ b) $y'' + 2y' + y^2 = x$ c) $y'' + 3y' + yy' = 0$

d) $y'' + 3y' + 4y = 0$ e) $y'' + 3y' + 4y = \sin x$ f) $y'' + y(2 + 3y) = e^x$

g) $y'' + 4xy' + 2x^3y = e^{2x}$ h) $y'' + \sin(xe^x)y' + 4xy = 0$ i) $3y'' + 16y' + 2y = 0$

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng cấp 2 thuần nhất, tuyến tính với hệ số hằng

126) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + y' - y = 0$ trên R

Lời giải

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân là $r^2 + r' - 1 = 0$.

Biệt số $\Delta = 5$. Hai nghiệm của phương trình đặc trưng là

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

$$y = c_1 \exp\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)x\right] + c_2 \exp\left[\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)x\right]$$ với c_1 và c_2 là các hằng số.

127) Hãy tìm nghiệm trên R của bài toán có điều kiện đầu như sau

$$\begin{cases} y'' + y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Lời giải

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân là $r^2 + r = 0$.

Hai nghiệm của phương trình đặc trưng là $r = 0$ và $r = -1$.

Nghiệm tổng quát trên R của phương trình vi phân là

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-1.x}$$

$y = c_1 + c_2e^{-x}$, với c_1 và c_2 là các hằng số.

Do đó $y' = -c_2e^{-x}$.

Dựa vào điều kiện đầu, ta tìm giá trị của c_1 và c_2 như sau.

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y_o'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm trên R của bài toán là $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}$.

128) Hãy tìm nghiệm trên R của bài toán sau

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 17y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -2 \end{cases}$$

Lời giải

Phương trình đặc trưng là $r^2 + 2r + 17 = 0$

Biệt số $\Delta' = -16$. Hai nghiệm phức của phương trình đặc trưng là $r = -1 \pm i.4$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = c_1 e^{-x}\cos 4x + c_2 e^{-x}\sin 4x$$

Do đó $y' = -c_1e^{-x}\cos 4x - 4c_1e^{-x}\sin 4x - c_2e^{-x}\sin 4x + 4c_2e^{-x}\cos 4x$.

Điều kiện đầu $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ trở thành

$$\begin{cases} c_1e^{-1}\cos 4 + c_2e^{-1}\sin 4 = 0 \\ -c_1e^{-1}\cos 4 - 4c_1e^{-1}\sin 4 - c_2e^{-1}\sin 4 + 4c_2e^{1}\cos 4 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\cos_4 + c_2\sin 4 = 0 \\ -4c_1e^{-1}\sin 4 + 4c_2e^{-1}\cos 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{e}{2}\sin 4 \\ c_2 = -\dfrac{e}{2}\cos 4 \end{cases}$$

Nghiệm trên R của bài toán là

$$y = \frac{e}{2}\sin 4\, e^{-x}\cos 4x + \frac{-e}{2}\cos 4\, e^{-x}\sin 4x$$

$$y = \frac{e^{-x+1}}{2}(\sin 4\cos 4x - \sin 4x\cos 4)$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{-(x-1)}\sin 4(x-1).$$

129) $y'' + 3y' - 10y = 0$ Đáp số : $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$

130) $y'' + 3y' - 10y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$ Đáp số : $y(x) = \frac{1}{7}\left(8e^{2x} - e^{-5x}\right)$

131) $y'' + 6y' + 9 = 0$ Đáp số : $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$

132) $y'' - 4y = 0$ Đáp số : $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

133) $y'' - 3y' + 2y = 0$ Đáp số : $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

134) $4x'' + 20x' + 25x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 2$ Đáp số : $x = \left(1 + \frac{9}{2}t\right)e^{-\frac{5}{2}t}$

135) $x'' - x' - 6x = 0, x(0) = -1, x'(0) = 1$ Đáp số : $x = -\frac{1}{5}\left(e^{3t} + 4e^{-2t}\right)$

136) $y'' - 5y' = 0$ Đáp số : $y = c_1 + c_2e^{5x}$

137) $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$ Đáp số : $y = (c_1 + c_2x)e^{-\pi x}$

138) $z'' - 2z' - 15z = 0$ Đáp số : $z = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x}$

139) $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 6$ Đáp số : $y = (1 + 2x)e^{4x}$

140) $y'' - 2y = 0$ Đáp số : $y = c_1e^{\sqrt{2}x} + c_2e^{-\sqrt{2}x}$

141) $y'' - 5y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -\sqrt{5}$ Đáp số : $y = e^{\sqrt{5}x} + e^{-\sqrt{5}x}$

142) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$ Đáp số : $y = \frac{1}{3}(4 - e^{-3x})$

143) $y'' + 10y' + 16y = 0$ Đáp số : $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-8x}$

144) $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2$ Đáp số : $y = e^{4x} - 2e^{3x}$

145) $y''-y'-12y=0, y(0)=-1, y'(0)=10$ Đáp số : $y=e^{4x}-2e^{-3x}$

146) $y''-7y'+12y=0, y(0)=-1, y'(0)=2$ Đáp số : $y=5e^{4x}-6e^{3x}$

147) $y''+y=0$ Đáp số : $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

148) $y''+y'+y=0, y(0)=1, y'(0)=3$ Đáp số : $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{7}x\right)$

149) $y''+2y'+2y=0$ Đáp số : $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

150) $x''+x'+7x=0$ Đáp số : $y=e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right)$

151) $\frac{d^2x}{d\theta^2}+4x=0, x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ Đáp số : $x=-\frac{3}{2}\cos(2\theta)+\sin(2\theta)$

152) $y''+\frac{1}{4}y=0, y(\pi)=1, y'(\pi)=-1$ Đáp số : $y=\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}$

153) $y''+2y'+5y=0$ Đáp số : $x=e^{-x}(c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x))$

154) $y''+2y'+2y=0, y(\pi)=e^{-\pi}, y'(\pi)=-2e^{-\pi}$ Đáp số : $y=e^{-x}(\sin x-\cos x)$

155) $y''-y=2-x^2$ Đáp số: $y(x)=y_o(x)+y_P(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+x^2$.

156) $y''+2y'+y^2=0$ Đáp số: Không tuyến tính.

157) $y''+yy'+y=0$ Đáp số: Không tuyến tính.

Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình vi phân sau nếu nó có dạng Euler

158) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên $I=(0,+\infty)$ của phương trình vi phân

$$x^2y''-3xy'+4y=0$$

Lời giải

– Phương trình đặc trưng của là phương trình Euler là

$r(r-1)-3r+4=0 \Leftrightarrow r^2-4r+4=0$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép là $r_o=2$.

Nghiệm tổng quát trên I của phương trình vi phân là

$y(x)=c_1x^{r_o}+c_2x^{r_o}\ln|x|$

$y(x)=x^2(c_1+c_2\ln x)$ với c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

159) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên $I=(0,+\infty)$ của phương trình vi phân

$$x^2y''+5xy'+13y=0$$

Lời giải

– Phương trình đặc trưng của là phương trình Euler là

$r(r-1)+5r+13=0 \Leftrightarrow r^2+4r+13=0$.

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức là $-2\pm i3$

Gọi $\alpha=-2$ và $\beta=3$.

Nghiệm tổng quát trên I của phương trình vi phân là

$y(x)=x^\alpha[c_1\cos(\beta\ln|x|)+c_2\sin(\beta\ln|x|)]$

$y(x)=x^{-2}[c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x)]$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

160) $x^2y''+2xy'-12y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=\frac{c_1}{x^4}+c^2x^3$

161) $x^2y''-3xy'+4y=0, x>0$ Đáp số: $y=x^2\left(c_1+c_2\ln|x|\right)$

162) $x^2y''+5xy'+13y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=x^{-2}\left(c_1\cos(3\ln|x|)+c_2\sin(3\ln|x|)\right)$

163) $x^2y''+xy'-y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=c_1x+c_2x^{-1}$

164) $x^2y''-xy'+2y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=x\left(c_1\cos(\ln|x|)+c_2\sin(\ln|x|)\right)$

165) $4x^2y''-4xy'+3y=0, x>0$, y(1)=0, y'(1)=1 Đáp số: $y=x^{3/2}-x^{1/2}$

166) $x^2y''-3xy'+3y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=c_1x+c_2x^3$

167) $x^2y''+5xy'+5y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=x^{-2}\left[c_1\cos(\ln|x|)+c_2\sin(\ln|x|)\right]$

168) $x^2y''+2xy'-12y=0, x\neq 0$ Đáp số: $y=c_1x^3+c_2x^{-4}$

Hãy tìm nghiệm các phương trình vi phn khong thuần nhất sau:

169) $y''+4y=3\sin x$ Đáp số: $y=c_1\sin(2x)+c_2\cos(2x)-\sin x$

170) $y''-3y'+2y=6e^{3x}$ Đáp số: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+3e^{3x}$

171) $y''-2y'+y=-4e^{3x}$ Đáp số: $y=e^x\left(c_1+c_2x-2x^2\right)$

172) $y''-7y'+10y=100x$, y(0)-0, y'(0)=5 Đáp số: $y=3e^{5x}-10e^{2x}+10x+7$

173) $y''+y'=x^3-x^2$ Đáp số: $y=c_1+c_2e^{-x}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4}{3}x^3+4x^2-8x$

174) $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$ Đáp số: $y=e^{-3x}\left(c_1+c_2x+5x^2\right)$

175) $y''+8y'+16y=2xe^{4x}$ Đáp số: $y=e^{-4x}\left(c_1+c_2x^2\right)+\dfrac{(4x-1)}{128}e^{4x}$

a. $x^2y''-5xy'+9y=x^3, x\neq 0$ Đáp số: $y=x^3\left(c_1+c_2\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln^2|x|\right)$

176) $x^2y''+2xy'-12y=\sqrt{x}, x>0$ Đáp số: $y=c_1x^{-4}+c_2x^3-\dfrac{4}{45}x^{1/2}$

177) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên I = $(0,+\infty)$của phương trình vi phân

$$x^2y''+2xy'-12y=\sqrt{x}$$

Đáp số: $y(x)=c_1x^{-4}+c_2x^3-\dfrac{4}{45}x^{\frac{1}{2}}$, trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

178) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất như sau $y''+y=\text{tg}x$ (*)

Lời giải

– Phương trình thuần nhất $y''+y=0$ có phương trình đặc trưng là $r^2+1=0$.
Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức là $r=\pm i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất trên $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ là $y_o(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$.

Như thế y_0 có dạng $y_o(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ với $y_1(x)=\cos x$ và $y_2(x)=\sin x$.
– Một nghiệm đặc biệt của phương trình thuần nhất (*) là
$y_P(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)=v_1(x)\cos x+v_2(x)\sin x$
trong đó v_1, v_2 là các hàm số thỏa

$$\begin{cases} y_1v_1'+y_2v_2'=0\\ y_1'v_1'+y_2'v_2'=f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x)v_1'+(\sin x)v_2'=0\\(-\sin x)v_1'+(\cos x)v_2'=tgx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1'=-\sin x\,tgx=-\dfrac{\sin^2x}{\cos x}\\ v_2'=\cos x\,tgx=\sin x\end{cases}$$

Do đó

$$v_1=-\int\frac{\sin^2x}{\cos x}dx=\int\frac{\cos^2x-1}{\cos x}dx=\int\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)dx=\sin x-\int\frac{1}{\cos x}dx.$$

Áp dụng công thức

$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+tgx|+k_1\quad\left(trong\ đó\ \sec x=\frac{1}{\cos x}\right)$$

ta được $v_1=\sin x-\ln|\sec x+\text{tg}x|$ (chọn $k_1=0$)

Ta cũng có $v_2 = \int \sin x\, dx = -\cos x + k_2 = -\cos x$ (chọn $k_2 = 0$).

Suy ra nghiệm đặc biệt của phương trình không thuần nhất (*) là

$y_P(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) = (\sin x - \ln|\sec x + tg\, x|)\cos x + (-\cos x)\sin x$

$= -\cos x \ln|\sec x + tg\, x|$

Nghiệm tổng quát trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình không thuần nhất (*) là

$$y(x) = y_o(x) + y_P(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + tgx|$$

Hãy giải bài tập 179 - 180

179) (Chứng minh định lý Ostrogradski-Louivile)

Cho phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Giả sử y_1 và y_2 là hai nghiệm trên I của phương trình vi phân này.

a) Hãy chứng minh định thức Wronski của hai hàm y_1 và y_2 trên I có dạng như sau

$$W(y_1,y_2)(x) = Ce^{-P(x)},$$

Trong đó C là hằng số và P là một nguyên hàm của hàm p.

b) Hãy chứng minh $W(y_1,y_2)(x)$ luôn bằng 0 trên I nếu y_1 và y_2 phụ thuộc tuyến tính.

c) Hãy chứng minh $W(y_1,y_2)(x)$ luôn khác 0 trên I nếu y_1 và y_2 độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn

a) Từ $W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, hãy chứng minh

$$W'(y_1,y_2)(x) = -p(x)W(y_1,y_2)(x)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất. Nghiệm tổng quát là $W(y_1,y_2)(x) = Ce^{-P(x)}$, với C là hằng số và P là một nguyên hàm của hàm p.

180) (Phương pháp tìm nghiệm tổng quát khi biết một nghiệm đặc biệt)

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (*)$$

Cho y_1 là một nghiệm của phương trình (*) và y_1 luôn khác 0 trên $\mathbb{R}$.

1/ Giả sử tồn tại hàm v (không là hàm hằng) sao cho $y_2 = v\, y_1$ là một nghiệm của phương trình (*)

Hãy chứng minh

a) y_1, y_2 độc lập tuyến tính

b) Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

2/ Gọi u là hàm số có biểu thức $u(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{[y_1(x)]^2}\, dx$ (hằng số tích phân được chọn tùy ý), trong đó P là một nguyên hàm của p.

Hãy chứng minh

a) Hàm số $y_2 = uy_1$ là nghiệm trên I của phương trình (1).

b) Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

Hướng dẫn

1/ Áp dụng định lý trong 2,2 và 2.3.

2/ Cách 1:

Từ biểu thức của u, ta tính được y_2', y_2''. Suy ra y_2 là nghiệm của phương trình vi phân.

Cách 2:

Ta tìm nghiệm của phương trình (*) dưới dạng $y = vy_1$.

Ta có $\begin{cases} y' = v'y_1 + vy_1' \\ y'' = v_1'' + 2v'y_1' + vy_1' \end{cases}$

Hàm y là nghiệm của phương trình (1) nếu

$$\left(v''y_1+2v'y_1'+vy_1''\right)+p\left(v'y_1+vy_1'\right)+qvy_1=0$$

$v''y_1+v'(2y_1'+py_1)+v\left(y_1''+py_1'+qy_1\right)=0$ (trong đó $y_1'' + py_1' + q = 0$ vì y_1 là nghiệm)

$$v_1''+v'\left(2y_1'+py_1\right)=0$$

$$v''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)v'=0$$

$$\left(v'\right)' + \left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)\left(v'\right)=0$$

Phương trình trên có dạng là phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất theo ẩn (v').
Do đó

$$v'(x)=C\exp\left[-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x)\right)dx\right]=C\exp\left[\ell n\left(y_1^{-2}\right)-\int p(x)dx\right]=C\frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int p(x)dx\right]$$

$$v(x)=C\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int p(x)dx\right]dx$$

Chọn $v(x)=\int\frac{1}{y_1^2}\,e^{-P(x)}dx$

Áp dụng kết quả của câu 1, ta suy ra được điều cần chứng minh.

Hãy giải các bài tập sau (các bài tập này không được phân loại)

181) Hãy tìm nghiệm trên $I = (0, +\infty)$ của phương trình

$$xy'' + 2y' + x = 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1$$

Hướng dẫn

. Phương trình không chứa y nên đặt $u = y'$ để đưa về phương trình cấp 1

$$xu' + 2u + x = 1 \Leftrightarrow \quad u' + \frac{2}{x}u = \frac{1-x}{x}$$

Phương trình tuyến tính cấp 1 theo u có nghiệm tổng quát là $u(x) = c_1 x^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

Khi x = 1 thì u(x) = 1 ta suy ra $c_1 = \frac{5}{6}$. Dó đó $y'(x) = \frac{5}{6}x^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.

Suy ra $y(x) = -\frac{5}{6x} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + c_2$. Khi x = 1 thì y(x) = 2 nên suy ra được $c_2 = \frac{5}{2}$.

182) Hãy tìm nghiệm trên **R** của phương trình vi phân

$$y'' + (y')^3 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Hướng dẫn

Phương trình không chứa x nên ta coi y như là một biến độc lập.
Đặt $u = y'$ để đưa về phương trình vi phân cấp 1.

Ta có $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$. Phương trình vi phân trở thành $u\frac{du}{dy} + u^3y = 0$

Áp dụng phương pháp tách biến ta được $u = \frac{2}{y^2 - 2c_1}$

Khi x = 0 thì y = 1 và u = – 1, suy ra $c_1 = \frac{3}{2}$. Do đó $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2 - 3}$

Áp dụng phương pháp tách biến ta được $\frac{y^3}{3} - 3y = 2x + C_2$

Khi x = 0 thì y = 1, suy ra $c_2 = -\frac{8}{3}$.

183) Hãy tìm nghiệm trên **R** của các phương trình vi phân sau

a) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ Đáp số: $y = (e^x + e^{-x}) / 2$

b) $y'' - 2y' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2$ Đáp số: $y = e^{2(x-1)} - 1$

c) $y'' + 2y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$ Đáp số: $y = \cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,\sin\sqrt{2}\,x$

d) $y'' - 2y' + 17y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ Đáp số: $y = e^x\left(\cos 4x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)$

e) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ Đáp số: $y = \cosh 2x = (e^{2x} + e^{-2x}) / 2$

f) $y'' + 3y = 0$, $y(3) = 1, y'(3) = -1$ Đáp số: $y = \cos\sqrt{3}\,(x-3) - (1/\sqrt{3})\sin\sqrt{3}\,(x-3)$

g) $y'' + 2y' + 17y = 0$, $y(1) = 0, y'(1) = -2$ Đáp số: $y = -\frac{1}{2}\,e^{-(x-1)}\sin 4(x-1)$

184) Hãy tìm nghiệm trên **R** của các phương trình vi phân sau

a) $y'' + 3y' + 2y = e^x$ Đáp số: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{e^x}{6}$

b) $y'' + y = 1 + x$ Đáp số: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x + 1$

c) $y'' + y' + 3y = e^{2x}$ Đáp số: $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1\cos\left(\sqrt{11}\,\frac{x}{2}\right) + c_2\sin\left(\sqrt{11}\,\frac{x}{2}\right)\right] + \frac{e^{2x}}{9}$

d) $y'' + y = xe^x$ Đáp số: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + (x-1)\frac{e^x}{2}$

e) $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = -1, y'(0) = 1$ Đáp số: $y = -\frac{e^x}{2} - 5\,\frac{e^{-s}}{6} + \frac{e^{2x}}{3}$

185) Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân

a) $y'' + y = \sec x$

Hướng dẫn: Nghiệm đặc biệt là $y_P = x\sin x + (\cos x)\ln|\cos x|$

b) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$, $0 < x < \infty$.

Hướng dẫn: Nghiệm đặt biệt là $y_P = x\ln|x|\,e^{2x}$

c) $e^{3x}(y'' + 6y' + 9y) = x^{-2}, 0 < x < \infty$

Hướng dẫn: Nghiệm đặc biệt là $y_P = -e^{-3x}\ln x$

d) $y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{x}$, $0 < x < \infty$

Hướng dẫn: Nghiệm đặc biệt là $y_P = \frac{4}{15}\,x^{\frac{5}{2}}e^x$

f) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x, 0 < x < \infty$, $y(1) = 1, y'(1) = 1$.

Hướng dẫn: $y = x^2 - x\ln x - \frac{1}{2}\,x(\ln x)^2$

186) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên $I = (0, \infty)$ của các phương trình vi phânsau:

a) $x^2y'' - xy' + y = \sqrt{x}$ Đáp số: $y = c_1x + c_2x\ln x + 4\sqrt{x}$

b) $x^2y'' - 6y = x$, $y(1) = 2, y'(1) = 2$ Đáp số: $y = \frac{13}{10}x^3 + \frac{13}{15}x^{-2} - \frac{x}{6}$

187) Hãy tìm nghiệm tổng quát trên **R** của các phương trình vi phân sau:

b) $y'' + 2y' + y = \sin x$ Đáp số: $y = (c_1 + c_2x)\,e^{-x} - (\cos x) / 2$

c) $y'' = y + e^x\sin 2x$ Đáp số: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - e^x(\cos 2x + \sin 2x) / 8$

d) $y'' - 2y' + 4y = e^x\sin x$ Đáp số: $y = e^x(c_1\cos\sqrt{3}\,x + c_2\sin\sqrt{3}\,x) + (e^x\sin x) / 2$

e) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \cos x$, $y(0) = 1, y'(0)=0$

Đáp số: $y = \left(\frac{46}{50} - \frac{135}{50}x\right)e^{3x} + \frac{x^2}{2}\,e^{3x} + \frac{4}{50}\cos x - \frac{3}{50}\sin x$

f) $y'' + 3y' + 2y = 3 - 2e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Đáp số: $y = -2e^{-x} + \frac{5}{6}e^{-2x} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}e^x$

CHƯƠNG 3 SƠ LƯỢC PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1. ĐỊNH NGHĨA CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

1.1. Định nghĩa

Giả sử $t \mapsto f(t)$ là hàm số thức xác định với mọi $t \geq 0$.

Biến đổi Laplace của hàm f được định nghĩa là hàm F có biến số s và biểu thức của hàm F như sau

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Miền xác định của F gồm những giá trị của s làm cho tích phân (1) tồn tại.

Người ta ký hiệu F= **L** {f}. Các ký hiệu sau cũng được sử dụng

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,; \qquad \mathbf{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathbf{L}\{f\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,; \qquad \mathbf{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

1.2 Thí du. Xét f là hàm hằng k, tức $f(t) \equiv k$ với mọi $t > 0$. Khi đó

$$\mathbf{L}\{k\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} k\,dt = k\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_o^\infty = k\lim_{A\to\infty}\left(\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^A\right) = k\lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-sA}}{-s}\right] - k\frac{e^0}{-s} = 0 + k\frac{1}{s} = \frac{k}{s}$$

Kết quả trên ứng với trường hợp $s > 0$.

1.3 Thí du. Xét $f(t) = e^{at}$, trong đó a là hằng số.Ta có

$$\mathbf{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_o^\infty = \lim_{A\to\infty}\left(\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)}\right] - \frac{e^0}{-(s-a)}$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

Kết quả trên ứng với trường hợp $s - a > 0$.

1.4 Thí du. Xét $f(t) = \sin at$, trong đó a là hằng số khác 0. Ta có

$$\mathbf{L}\left\{\sin at\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(s\sin at + a\cos at\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \text{với mọi } s > 0.$$

Bài tập: Bài tập 188.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

2.1. Định lý về sự tồn tại

Giả sử

i) f là hàm liên tục từng phần trên $[0, \infty)$.

ii) Tồn tại hằng số α, hằng số dương T và hằng số dương M thỏa

$$\forall t \geq T,\ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

Khi đó, **L** $\{f(t)\}(s)$ tồn tại với tất cả $s > \alpha$.

Chú thích: Hàm số f được gọi là liên tục từng phần trên đoạn $[0, +\infty)$ nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc $[0, +\infty)$ ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm, đồng thời tại các điểm x mà f không liên tục thì $f(x^+)$ và $f(x^-)$ vẫn tồn tại.

Chứng minh

Chúng ta cần chứng minh $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$ tồn tại với $s > \alpha$

Ta có
$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

trong đó $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt < \infty$ do $t \mapsto e^{-st} f(t)$ liên tục từng phần trên [0, T].

Đồng thời, với mọi s>α ta có

$$I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt \le \int_T^\infty e^{-st} M e^{\alpha t}\,dt = M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)}\,dt = M\left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}$$

Do đó $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt < \infty$ với mọi s>α.

2.2.. Định lý về sự tuyến tính

Giả sử $\mathbf{L}\{f(t)\}(s)$ và $\mathbf{L}\{g(t)\}(s)$ tồn tại. Cho a, b là các hằng số.
Khi đó, $\mathbf{L}\{af(t)+bg(t)\}(s)$ tồn tại và

$$\mathbf{L}\{af(t)+bg(t)\}(s) = a\,\mathbf{L}\{f(t)\}(s) + b\,\mathbf{L}\{g(t)\}(s)$$

Chứng minh

$$\mathbf{L}\{af(t)+bg(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= a\,\mathbf{L}\{f(t)\}(s) + b\,\mathbf{L}\{g(t)\}(s)$$

2.3. Định lý về sự tịnh biến

Giả sử $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$ tồn tại với s > b và a là số thực tùy ý.
Khi đó, $\mathbf{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}(s-a)$ với s – a > b

Chứng minh

$$\mathbf{L}\left\{e^{at} f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,at\; f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-at)} f(t)\,dt = \mathbf{L}\{f(t)\}(s-a)$$

2.4. Biến đổi Laplace của một số hàm đặc biệt

f(t)	$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
sin bt	$\frac{b}{s^2+b^2}$, $s > 0$
cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$
e^{at} sin bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
e^{at} cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
sinh (bt) $= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$\frac{b}{s^2-b^2}$, $s > \lvert b\rvert$
cosh (bt) $= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$	$\frac{s}{s^2-b^2}$, $s > \lvert b\rvert$
e^{at} sinh (bt)	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$, $s > a + \lvert b\rvert$

$e^{at}\cosh(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$, $s > a + \lvert b \rvert$	

Trong bảng công thức trên, a và b là các hằng số, n là số nguyên dương.

Chứng minh

– Trường hợp f là hàm hằng: công thức đã được chứng minh nơi thí dụ 1.2.

– Trường hợp $f(t) = e^{at}$: công thức đã được chứng minh nơi thí dụ 1.3.

– Trường hợp $f(t) = t^n$:

$$\mathbf{L}\left\{t^n\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt = \left.\frac{-e^{-st} t^n}{s}\right|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1}\, dt = 0 + \frac{n}{s}\,\mathbf{L}\left\{t^{n-1}\right\}(s)$$

Do đó

$$\mathbf{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n}{s}\,\mathbf{L}\left\{t^{n-1}\right\} = \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s}\,\mathbf{L}\left\{t^{n-2}\right\} = \ldots = \frac{n!}{s^n}\,\mathbf{L}\left\{t^0\right\} = \frac{n!}{s^n}\,\mathbf{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

– Trường hợp $f(t) = \sinh(at)$:

$$\mathbf{L}\{\sinh(at)\}(s) = \mathbf{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\{e^{at}\} - \mathbf{L}\{e^{-at}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

– Trường hợp $f(t) = \cosh(at)$:

$$\mathbf{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathbf{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\{e^{at}\} + \mathbf{L}\{e^{-at}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

– Việc chứng minh các công thức còn lại được xem là bài tập.

Bài tập: Bài tập 189 tới 196.

2.5. Định lý liên quan phép biến đổi Laplace ngược

Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[0,+\infty)$.

Giả sử f, g có cùng biến đổi Laplace , tức là $\mathbf{L}\{f(t)\} = \mathbf{L}\{g(t)\}$

Khi đó, f và g bằng nhau trên $[0,+\infty)$, tức là

$f(t) = g(t))$ với mọi $t \geq 0$.

2.6. Định nghĩa phép biến đổi Laplace ngược.

Giả sử F là biến đổi Laplace của hàm liên tục f, tức là $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}(s)$.

Khi đó hàm liên tục f được gọi là biến đổi Laplace ngược của F và ký hiệu như sau

$$f = \mathbf{L}^{-1}\{F\}$$

Các ký hiệu khác : $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$; $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$; $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F\}(t)$

Chú thích. $f = \mathbf{L}^{-1}\left\{\mathbf{L}\{f\}\right\}$.

Thí dụ.

Xét hàm liên tục f với $f(t) = e^{at}$ (a là hằng số). Ta có $\mathbf{L}\{f(t)\} = \mathbf{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

Do đó $\mathbf{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

– Phép biến đổi Laplace ngược có tính chất tuyến tính như sau:

2.7. Định lý

Giả sử f,g là các hàm liên tục. Cho $F = \mathbf{L}\{f\}$ và $G = \mathbf{L}\{g\}$, a và b là các hằng số.

Khi đó

$$\mathbf{L}^{-1}\{aF + bG\} = a\,\mathbf{L}^{-1}\{F\} + b\,\mathbf{L}^{-1}\{G\}$$

Chứng minh

Định lý trên suy ra từ tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace.

2.8. Thí du.

– Ta xác định: $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-6} - \dfrac{6s}{s^2+9} + \dfrac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$ như sau:

Ta có $\mathbf{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-6}\right\} = 5\,\mathbf{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-6}\right\} = 5e^{6t}$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{-6s}{s^2+9}\right\} = -6\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} = -\ 6\cos 3t$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} = \frac{3}{2}\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\} = \frac{3}{2}\ e^{-2t}\sin t$$

Do đó $\quad f(t) = 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3}{2}\ e^{-2t}\sin t$

2.9. Thí du

– Ta xác định $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}$ như sau:

Ta có $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{5}{6}\frac{3!}{[s-(-2)]^{3+1}}\right\} = \frac{5}{6}\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{[s-(-2)]^{3+1}}\right\} = \frac{5}{6}\ e^{-2t}\ t^3$

Bài tập: Bài tập 197 tới 198.

3. GIẢI BÀI TOÁN ĐIỀU KIỆN ĐẦU

3.1. Biến đổi Laplace của đạo hàm

3.1.1. Định lý:

Giả sử

i) Đạo hàm f' tồn tại và liên tục từng phần trên $[0, \infty)$.

ii) Tồn tại các hằng số dương a, M, T sao cho

$$|f(t)| < Me^{at} \quad , \quad \forall t \geq T \qquad (1)$$

Khi đó, biến đổi Laplace của f' tồn tại với mọi $s \geq a$ và

$$\mathbf{L}\,\{f'(t)\}(s) = s\,\mathbf{L}\,\{f\} - f(0)\,.$$

Chú thích: Tính chất (i) suy ra hàm số f liên tục trên $[0, \infty)$

Chứng minh

Theo định lý 2.1, biến đổi Laplace của f tồn tại .

– Trước hết, ta xét trường hợp f' liên tục trên $[0, \infty)$. Khi đó, ta có

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^A + s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$$

trong đó $e^{-st} f(t)\Big|_0^A = e^{-sA} f(A) - f(0) \to -f(0)$ khi $A \to \infty$.

Cho $A \to \infty$, từ đẳng thức trên ta suy được $\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

Suy ra $\quad \mathbf{L}\,\{f'(t)\} = -f(0) + s\,\mathbf{L}\,\{f\}$.

– Trường hợp f' liên tục từng phần trên $[0, \infty)$: chứng minh tương tự như trên.

3.1. 2. Định lý:

Giả sử

i) f có đạo hàm tới cấp 2 và f'' liên tục từng phần trên $[0, \infty)$.

ii) Tồn tại các hằng số dương a, M, T sao cho

$$|f'(t)| \leq Me^{at} \text{ và } |f''(t)| \leq Me^{at} \quad , \forall t \geq T,$$

Khi đó, biến đổi Laplace của f'' tồn tại với mọi $s \geq a$ với

$$\mathbf{L}\,\{f''(t)\} = s^2\ \mathbf{L}\,\{f(t)\} - s\ f(0) - f'(0)$$

Chú thích: Nếu ký hiện biến đổi Laplace của hàm f là Y thì kết quả của định lý 3.1.1 và 3.1.2 như sau:

$$\mathbf{L}\,\{f'(t)\}(s) = s\,\mathbf{Y} - f(0)\,.$$

$$\mathbf{L}\,\{f''(t)\} = s^2\ \mathrm{Y} - s\ f(0) - f'(0)$$

Chứng minh

– Áp dụng định lý 3.1.1 cho hàm số $f^{/}$, ta được

$$\mathbf{L}\{f''(t)\} = s\,\mathbf{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s\,[s\,\mathbf{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) = s^2\,\mathbf{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

Dạng tổng quát của định lý 3.1.1 và 3.1.2 như sau:

3.1. 3. Định lý:

Giả sử

i) f có đạo hàm tới cấp n và $f^{(n)}$ liên tục từng phần trên $[0, \infty)$.

ii) Tồn tại các hằng số dương a, M, T sao cho

$$\left|f^{(i)}(t)\right| \le Me^{at}\quad,\ \forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \forall t \ge T,$$

Khi đó, biến đổi Laplace của $f^{(n)}$ tồn tại với mọi $s \ge a$ với

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,\mathbf{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

tức là $\mathbf{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,\mathbf{L}\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{i}(0)$

Chứng minh

Dùng phép chứng minh qui nạp và kết quả của định lý 3.1.1 và 3.1.2, ta suy ra được định lý trên.

3.1.4. Thí du

Từ công thức $\mathbf{L}\{\sin bt\} = \dfrac{b}{s^2+b^2}$, ta có thể tìm $\mathbf{L}\{\cos bt\}$ như sau :

Xét f(t) = sin bt. Ta có f'(t) = b cos bt và f(0) = 0

Áp dụng định lý 3.1.1, ta được $\mathbf{L}\{b\cos bt\} = s\,\mathbf{L}\{\sin bt\} - f(0)$

$$\Rightarrow b\,\mathbf{L}\{\cos bt\} = s\,\frac{b}{s^2+b^2} \Rightarrow \mathbf{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

3.1.5. Định lý:

Giả sử f thỏa điều kiện trong định lý 3.1.1

Khi đó, $\mathbf{L}\{tf(t)\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha$ và $\mathbf{L}\{tf(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathbf{L}\{f(t)\}(s)$

Hơn nữa, $\mathbf{L}\{t^n f(t)\}$ tồn tại với $s > \alpha$ và $\mathbf{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\mathbf{L}\{f(t)\}(s)$,

Trong đó n là số nguyên dương.

Chú thích: Nếu n=1 thì công thức trên trở thành $\mathbf{L}\{t\,f(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathbf{L}\{f(t)\}(s)$, tức là

$\mathbf{L}\{t\,f(t)\}(s) = -Y^{/}(s)$ với Y là biến đổi Laplace của hàm số f

Chứng minh

– Trường hợp n = 1: Ta có

$$\frac{d}{ds}\mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)dt = \int_0^\infty -t\,e^{-st} f(t)\,dt = -\mathbf{L}\{tf(t)\}$$

– Trường hợp n > 1: Công thức ở định lý được chứng minh bằng qui nạp, chi tiết chứng minh được coi là bài tập.

3.1.6. Thí du. Từ công thức $\mathbf{L}\{\sin bt\}(s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ ta suy ra công thức $\mathbf{L}\{t\sin bt\}$ như sau:

$$\mathbf{L}\{t\sin bt\} = -\frac{d}{ds}\mathbf{L}\{\sin bt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

3.2. Phương pháp giải bài toán điều kiện đầu

Xét phương trình vi phân với hàm cần tìm là y(x).

– Biến đổi Laplace hai vế của phương trình vi phân ta thu được một phương trình hàm với hàm cần tìm là $\mathbf{L}\{y(x)\}$.

– Tìm biểu thức của $\mathbf{L}\{y(x)\}$ theo s.

– Dùng biến đổi Laplace ngược để tìm y(x)

3.2.1 Thí dụ: Hãy tìm nghiệm y của bài toán trên $[0, \infty)$ sau

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = -8e^{-x} & (*) \\ y(0) = 2 \ , \ \ y'(0) = 12 & (**) \end{cases}$$

Lời giải.

– Biến đổi Laplace hai vế của phương trình (*)

$$\mathbf{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = \mathbf{L}\{-8e^{-x}\}$$

Gọi $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}(s)$ ta được

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 2\left[s Y(s) - y(0)\right] + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1}$$

$$s^2 Y - 2s - 12 - 2sY + 4 + 5Y = \frac{-8}{s+1}$$

$$(s^2 - 2s + 5)\, Y = 2s + 8 - \frac{-8}{s+1}$$

$$Y = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}$$

Do đó $$y(x) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}\right\}$$

Mặt khác ta có

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} = \frac{3s+5}{s^2 - 2s + 5} - \frac{1}{s+1} = \frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s+1}$$

$$= 3\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s+1}$$

Do đó nghiệm trên $[0, \infty)$ của bài toán là

$$y(x) = \mathbf{L}^{-1}\left\{3\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s-(-1)}\right\} = 3e^{x}\cos 2x + 4e^{x}\sin 2x - e^{-x}.$$

Bài tập: Bài tập 199 tới 205.

4.BỔ TÚC MỘT HÀM ĐẶC BIỆT

4.1. Hàm bước :

– Xét hàm số sau $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t<0 \\ 1 & \text{nếu } t \ge 0 \end{cases}$.

Hàm này không liên tục tại t=0 và được gọi là "unit step function" (tạm dịch là hàm bước đơn vị).

– Với ký hiệu trên, ta có $u(t-c) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t<c \\ 1 & \text{nếu } t \ge c \end{cases}$ với c là hằng số.

– Thí dụ: Nếu $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{nếu } 0 \le t < 2\pi \\ e^t + \cos t & \text{nếu } t > 2\pi \end{cases}$,

ta có thể ghi $f(t) = e^t + u(t-2\pi)\cos(t)$ với $t \ge 0$.

4.2 Định lý: Cho $c \ge 0$ và $s>0$. Biến đổi Laplace của u(t-c) là

$$\mathbf{L}\{u(t-c)\}(s) = \frac{e^{-cs}}{s}.$$

– Thí dụ: Hãy tìm biến đổi Laplace của hàm số f(x)=3 [u(x)-u(x-2)].

Hướng dẫn.

Biến đổi Laplace của hàm số f là

$$Y = 3\,\mathbf{L}(u(x)) - 3\,\mathbf{L}(u(x-2)) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s}.$$

Bài tập: Bài tập 206 tới 209.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

188) Hãy chứng minh hàm $f(t)=\frac{1}{t}$ không có biến đổi Laplace.

Hướng dẫn: $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt=\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}dt+\int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt=+\infty$

Từ bài tập 189 tới bài tập 196, hãy tìm các biến đổi Laplace L(f(t)) của hàm số f.

189) $L(-6e^{-3t})$ Đáp số: $-\frac{6}{s+3}$

190) $L(24e^{t})$ Đáp số: $\frac{24}{s-1}$

191) $L\left(-5\sin(60t)\right)$ Đáp số: $-5\frac{60}{s^2+60^2}$

192) $L(-6e^{-3t})$ Đáp số: $-\frac{6}{s+3}$

193) $L(t^3+5t^2+2t-1)$ Đáp số: $\frac{6}{s^4}+\frac{10}{s^3}+\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}$

194) $L(te^{t})$ Đáp số: $\frac{1}{(s-1)^2}$

195) $L(e^{t}\sin(2t))$ Đáp số: $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

196) $L\left(e^{-3t}\left(t^2-3t+5\right)\right)$ Đáp số: $\frac{2}{(s+3)^3}-\frac{3}{(s+3)^2}+\frac{5}{s+3}$

Hãy biến đổi ngược Laplace của hàm số Y(s) trong bài tập 197, 198.

197) $Y=\frac{6}{s^3+s^2}$ Đáp số: $y=-6+6t+6e^{-t}$

198) $Y=\frac{s+5}{s^2+6s+10}$ Đáp số: $y=e^{-3t}\cos t+2e^{-3t}\sin t$

Hãy dùng phương pháp biến đổi Laplace để tìm nghiệm của các phương trình trong bài tập từ 199 tới 205:

199) $y''+4y'-5y=xe^x$, $y(0)=1, y'(0)=0$

Hướng dẫn

– Ta có $\mathbf{L}\{y''+4y'-5y\}=\mathbf{L}\{xe^x\}$

Gọi $Y(s)=\mathbf{L}\{y(x)\}(s)$. Ta có

$$\left[s^2Y-sy(0)-y'(0)\right]+4\left[sY-y(0)\right]-5Y=\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$s^2Y-s+4sY-4-5Y=\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y=\frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s+5)(s-3)^3}$$

$$Y(s)=\frac{35}{216}\frac{1}{s+5}+\frac{181}{216}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{36}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{12}\frac{2}{(s-1)^3}$$

Do đó nghiệm $[0,\infty)$ của bài toán là

$$y(x)=\mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{35}{216}e^{-5x}+\frac{181}{216}e^x-\frac{1}{36}xe^x+\frac{1}{12}x^2e^x$$

200) $y''(x)-2y'(x)+5y(x)=8e^{\pi-x}$; $y(\pi)=2$; $y'(\pi)=12$

Hướng dẫn

Đặt h(x) = y(x + π). Khi đó h'(x) = y'(x + π), h"(x) = h" (x + π).
Thay x bằng x + π trong phương trình vi phân thì được

$$y''(x+\pi) - 2y'(x+\pi) + 5y(x+\pi) = -8e^{\pi-(x+\pi)}$$

Do đó

$$\begin{cases} h''(x) - 2h'(x) + 5h(x) = -8e^{-x} \\ h(0) = 2 \quad , \quad h'(0) = 12 \end{cases}$$

Dùng phương pháp biến đổi Laplace như trong thí dụ trên, ta được

$$h(x) = 3e^{x}\cos 2x + 4e^{x}\sin 2x - e^{-x}$$

Vậy $y(x) = h(x-\pi) = 3e^{x-\pi}\cos 2(x-\pi) + 4e^{x-\pi}\sin 2(x-\pi) - e^{-(x-\pi)}$

$h(x) = 3e^{x-\pi}\cos 2x + 4e^{x-\pi}\sin 2x - e^{\pi-x}$.

201) y”-3y’+2y=e^{-4t}, y(0)=1, y’(0)=5.

Hướng dẫn:Y(s)=$\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$; $y(x) = -\dfrac{16}{5}e^{t} + \dfrac{25}{6}e^{2t} + \dfrac{1}{30}e^{-4t}$ $Y = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

202) y”-6y’+9y=t^2e^{3t}, y(0)=2, y’(0)=17.

Hướng dẫn: Y(s)=$\dfrac{2}{s-3} + \dfrac{11}{(s-3)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^3}$; $y(x) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \dfrac{1}{12}t^2e^{3t}$

203) y”+4y’+6y=1+e^{-t}, y(0)=0, y’(0)=0.

Hướng dẫn: Y(s)=$\dfrac{1}{6s} + \dfrac{1}{3(s+1)} + \dfrac{\frac{s}{2}+\frac{5}{3}}{s^2+4s+6}$; $y(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$

204) x”+16x=cos (4t), x(0)=0, x’(0)=1.

Hướng dẫn: X(s)=$\dfrac{1}{s^2+16} + \dfrac{s}{(s^2+16)^2} +$; $x(t) = \dfrac{1}{6}\sin(4t) + \dfrac{1}{8}t\sin(4t)$

205) y”+4y’+3y=-6e^{-3t}, y(0)=2, y’(0)=-1.

Hướng dẫn: $Y = \dfrac{2s+7}{(s+3)(s+1)} - \dfrac{6}{(s+3)^2(s+1)} = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{B}{(s+3)^2} + \dfrac{C}{s+1}$

$$(2s+7)(s+3) - 6 = A(s+3)(s+1) + B(s+1) + C(s+3)^2 \quad (*)$$

Cho s=-3 ta được -6=-2B. Cho s=-1 thì có 4=4C. Thế giá trị của B và C vào phương trình (*), rồi tìm A.

Suy ra Y=$\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{3}{(s+3)^2} + \dfrac{1}{s+1}$. Do đó y=$(3x+1)e^{-3x} + e^{-x}$.

Hãy giải các bài tập sau

206) Cho $c \geq 0$ và s>0. Hãy chứng minh công thức sau

$$\mathbf{L}\ \{u(t-c)\}(s) = \frac{e^{-cs}}{s}.$$

Hướng dẫn. Coi hướng dẫn trong bài tập kế dưới (bài 207)

207) Cho c>0 và f là hàm số có biến đổi Laplace là F(s) khi s>b, với b là hằng số. Hãy chứng minh công thức sau

$$\mathbf{L}\ \{u(t-c)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}F(s).$$

Hướng dẫn

$$\mathbf{L}\{u(t-c)f(t-c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(t-c)f(t-c)dt =$$

$$\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt = \int_0^\infty e^{-s(r+c)}f(r)dr = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-sr}f(r)dr = e^{-cs}F(s)$$

Hãy tìm biến đổi Laplace của hàm số f như sau

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } 0 \le t<1 \\ 2 \text{ nếu } 1 \le t<\pi \\ -1 \text{ nếu } \pi \le t<2\pi \\ t \text{ nếu } 2\pi \le t \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Ta có $f(t) = 2u(t-1) - 3u(t-\pi) + (t+1)u(t-2\pi)$

$f(t) = 2u(t-1) - 3u(t-\pi) + (t-2\pi)u(t-2\pi) + (2\pi+1)u(t-2\pi)$

Do đó $L\{f\}(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s} - \dfrac{3e^{-\pi s}}{s} + \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \dfrac{(2\pi+1)e^{-2\pi s}}{s}$

Hãy tìm biến đổi Laplace của hàm số f như sau

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \le t<2 \\ -3 \text{ nếu } 2 \le t<3 \\ t^2 \text{ nếu } t \ge 3 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Ta có $f(t) = 1 - 4u(t-2) + (3+t^2)u(t-3)$

$f(t) = 1 - 4u(t-2) + \left[(t-3)^2 + 6(t-3) + 12\right]u(t-3)$

Do đó $L\{f\}(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{4e^{-2s}}{s} + e^{-3s}\left(\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} + \dfrac{12}{s}\right)$

Sinh viên vui lòng coi thông báo về thi học kỳ trên web.

www.nguyenthanhvu.com hoặc www.math.hcmuns.edu.vn/~ntvu

Nếu có thắc mắc về kết quả thi, sinh viện vui lòng gởi tới email
nguyenthanhvu60@gmail.com

CÔNG THỨC ĐƯỢC SỬ DỤNG TRONG PHÒNG THI

$\int xe^x dx = e^x(x-1)+C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\int x^2e^x dx = e^x(x^2-2x+2)+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$
$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$	$\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$	$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + C$
$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$	$\int tg^2 x dx = tgx - x + C$
$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$	$\int cotg^2 x dx = -cotgx - x + C$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

$y' + p(x)y = q(x)$	$y = e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)dx$
$y' + p(x)y = 0$	$y = Ce^{-P(x)}$
$ay'' + by' + cy = 0$ -------------- $ar^2 + br + c = 0$	$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ $y(x) = c_1e^{r_0x} + c_2xe^{r_0x}$ $y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$x^2y'' + axy' + by = 0$ ----------------------------- $r^2 + (a-1)r + b = 0$	$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ $y(x) = x^{r_0}(c_1 + c_2\ln\|x\|)$ $y(x) = c_1x^{\alpha}\cos(\beta\ln\|x\|) + c_2x^{\alpha}\sin(\beta\ln\|x\|)$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

f(t)	$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$
1	$\frac{1}{s}$, $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s>a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s>a$
sin bt	$\frac{b}{s^2+b^2}$, $s>0$
cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$, $s>0$
e^{at} sin bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$
e^{at} cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$
$\sinh(bt) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$\frac{b}{s^2-b^2}$, $s>\|b\|$
$\cosh(bt) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$	$\frac{s}{s^2-b^2}$, $s>\|b\|$

Trong bảng công thức trên, a và b là các hằng số, n là số nguyên dương.