CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN VECTOR

Dạng 1: Kiểm tra không gian con.

Ví dụ 1: Cho $W \subset R^3$ sao cho $W = \{X = (x, y, z) \in R^3 / 2x - |y| + 3z = 0\}$. W có phải là không gian con của R^3 hay không?

Giải: Xét $\alpha = (1, 2, 0), c = -1$. Ta có $\alpha \in W$.

$c\alpha = -1.(1, 2, 0) = (-1, -2, 0) \Rightarrow c\alpha \notin W$.

Vậy $\exists \alpha \in W, \exists c \in R : c\alpha \notin W \Rightarrow W$ không phải là không gian con của R^3.

Ví dụ 2: Cho $W \subset R^4$ sao cho $W = \{X = (x, y, z, t) \in R^4 / x - y + 9z = 3t - x - z\}$. W có phải là không gian con của R^3 hay không?

Giải: $x - y + 9z = 3t - x - z \Leftrightarrow 2x - y + 10z - 3t = 0$

Xét $\alpha = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W, \beta = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W, c \in R$

$\Rightarrow c\alpha + \beta = (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2, ct_1 + t_2)$

$\alpha, \beta \in W \Rightarrow 2x_1 - y_1 + 10z_1 - 3t_1 = 0$ và $2x_2 - y_2 + 10z_2 - 3t_2 = 0$

$\Rightarrow 2cx_1 - cy_1 + 10cz_1 - 3ct_1 = 0$ và $2x_2 - y_2 + 10z_2 - 3t_2 = 0$

$\Rightarrow 2(cx_1 + x_2) - (cy_1 + y_2) + 10(cz_1 + z_2) - 3(ct_1 + t_2) = 0$

$\Rightarrow (c\alpha + \beta) \in W$

Vậy: $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in R : (c\alpha + \beta) \in W \Rightarrow W \le R^4$

Áp dụng: Tập hợp nào dưới đây là không gian vector con của R^n tương ứng?

a. $W = \{X = (x, y, z) \in R^3 / xy = z\}$

b. $W = \{X = (x, y, z) \in R^3 / x + y = z\}$

c. $W = \{X = (x, y, z) \in R^3 / xy + yz + zx = 0\}$

d. $W = \{X = (x, y, z, t) \in R^4 / (x + y)^2 - 3(z - t)^2 = 16\}$

e. $W = \{X = (x, y, z, t) \in R^4 / 26x + 10y - 1995z + t = 0\}$

Dạng 2: Không gian sinh.

Ví dụ: Cho $S = \{X = (3, 1, -1), Y = (-1, -5, 7), Z = (1, -2, 3)\} \subset R^3$ và $\alpha = (u, v, w)$. Tìm u, v, w để $\alpha \in \langle S \rangle$.

Giải:

$\langle S \rangle = \{aX + bY + cZ / a, b, c \in R\} = \{(3a - b + c, a - 5b - 2c, -a + 7b + 3c) / a, b, c \in R\}$

$\alpha \in \langle S \rangle \Leftrightarrow u = 3a - b + c, v = a - 5b - 2c, w = -a + 7b + 3c$ (1)

Giải hệ (1) (ẩn a, b, c) bằng Gauss (hoặc Gauss-Jordan), hệ có nghiệm khi và chỉ khi $u - 10v - 7w = 0$.

Vậy $\alpha \in \langle S \rangle \Leftrightarrow u - 10v - 7w = 0$.

Áp dụng: Khi nào thì $\alpha=(u,v,w,t)\in<S>$ nếu

$S=\{X=(-2,1,3,-1),Y=(1,4,0,-3),Z=(-3,6,6,-5),T=(2,-1,-3,1)\}\subset R^4$

Dạng 3: Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ: Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp:

a. $S=\{X=(1,2,3),Y=(-12,8,5),Z=(11,-5,1),T=(14,5,-14)\}\subset R^3$

b. $S=\{X=(1,-2,3,-4),Y=(-3,6,-9,12),Z=(2,0,-5,8)\}\subset R^3$

c. $S=\{X=(2,-1,0,9),Y=(-4,7,3,-4)\}\subset R^4$

Giải:

a. Ta có $|S|=4>3\Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính.

b. Ta có $Y=-3X=-3X+0Z\Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính *(theo định nghĩa)*.

c. Lập ma trận $A_{2x4}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0&9\\-4&7&3&-4\end{pmatrix}$

$A\xrightarrow{(2)\leftarrow(2)+2.(1)}\begin{pmatrix}2&-1&0&9\\0&5&3&14\end{pmatrix}$

$\Leftarrow r(A)=2$ *(có 2 cột được bán chuẩn hóa)* $\Rightarrow$ S phụ thuộc tuyến tính.

Áp dụng: Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp:

a. $S=\{X=(3,1,-1),Y=(-1,-5,7),Z=(1,-2,3),T=(9,0,4)\}\subset R^3$

b. $S=\{X=(1,2,-1),Y=(2,-1,2),Z=(-1,-3,2)\}\subset R^3$

c. $S=\{X=(-1,-1,-7,2),Y=(5,-1,1,18),Z=(-5,2,8,-16)\}\subset R^4$

Dạng 4: Cơ sở và số chiều của một không gian vector.

Ví dụ 1: Cho $B=\{X=(1,2,-1),Y=(2,-1,2),Z=(-1,-3,2)\}$. Chứng minh B là một cơ sở của R^3.

Giải: Chứng minh được B độc lập tuyến tính *(làm như ở dạng 3)* (1)

Ta có $B\subset R^3$ và $|B|=3=dim(R^3)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B$ là một cơ sở của R^3

Ví dụ 2: Cho $S=\{X=(1,2,-3),Y=(-2,-1,4),Z=(-3,0,5),T=(2,7,-8)\}\subset R^3$. Tìm một cơ sở B cho không gian $W=<S>$ và tính số chiều của W. *(cơ sở không gian sinh)*

Giải: Lập ma trận $A_{4x3}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-2&-1&4\\-3&0&5\\2&7&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ một cơ sở của W là $B=\{(1,2,-3),(0,3,-2)\}$ và $dimW=2$.

Ví dụ 3: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ 4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4x5}(R)$. Tìm một cơ sở B cho $W = \{X \in R^5 / AX = O\}$. *(cơ sở không gian nghiệm)*

Giải: Giải hệ $AX = O$, hệ có vô số nghiệm $x_2 = a, x_4 = b, x_5 = c \quad (a,b,c \in R)$, $x_1 = 5a + 3b - 2c, x_3 = c - 4b$

$\Rightarrow W = \{X = (5a + 3b - 2c, a, c - 4b, b, c) / a,b,c \in R\}$

$= \{X = (5a, a, 0, 0, 0) + (3b, 0, -4b, b, 0) + (-2c, 0, c, 0, c) / a,b,c \in R\}$

$= \{X = a(5,1,0,0,0) + b(3,0,-4,1,0) + c(-2,0,1,0,1) / a,b,c \in R\}$

Đặt $S = \{\alpha_1 = (5,1,0,0,0), \alpha_2 = (3,0,-4,1,0), \alpha_3 = (-2,0,1,0,1)\}$

$\Rightarrow W = < S >$, S độc lập tuyến tính

$\Rightarrow W$ có một cơ sở là S, $dimW = |S| = 3$.

Áp dụng:

1. Chứng minh B là một cơ sở của không gian W với:
   a. $B = \{(2,-3,1), (4,-5,-2), (5,-7,3)\}$, $W = R^3$
   b. $B = \{(1,1,-cosx), (1,-1,sinx), (sinx,-cosx,1)\}$, $W = R^3$
   c. $B = \{(2,3,-1), (-4,-6,5)\}$, $W = < B >$
   d. $B = \{(0,-2,1,-7,3), (0,6,0,25,-10), (0,-4,-13,-34,13)\}$.W=<B>$
2. Tìm một cơ sở B và số chiều của không gian W với:
   a. $W = \{(a - 2b - 3c + 2d, 2a - b + 7d, -3a + 4b + 5c - 8d) / a,b,c,d \in R\}$
   b. $W = < S >$, $S = \{(-1,-2,4,0), (2,3,3,-1), (1,-4,2,-3), (-1,9,3,5)\}$
   c. $W = \{X \in R^4 / AX = O\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 3 & -20 \\ 3 & 7 & 22 & 15 \end{pmatrix}$
   d. $W = \{X \in R^5 / AX = O\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

Dạng 5: Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

Ví dụ: Cho các cơ sở $S = \{\alpha_1 = (-1,1,2), \alpha_2 = (2,-1,2), \alpha_3 = (1,0,3)\}$, $T = \{\beta_1 = (2,5,-2), \beta_2 = (2,1,-3), \beta_3 = (1,-2,-2)\}$ của R^3, $[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = (4,1,-2)$.

Viết $P(S \to T)$. Tìm X , $[Y]_S$.

Giải: Tìm X : $X = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = (-1,3,11)$

Lập các hệ phương trình tuyến tính *(vế trái giống nhau nên ghép chung vào 1 ma trận để giải song song)*:

$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \quad | \beta_1^t \quad | \beta_2^t \quad | \beta_3^t \quad | Y^t\right)$.

Biến đổi hệ bằng Gauss-Jordan, đưa về dạng

$\left(E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad | X_1 \quad | X_2 \quad | X_3 \quad | X_4\right)$ trong đó E_1, E_2, E_3 là các cột đã chuẩn hóa.

Khi đó, $[\beta_1]_S = X_1 = \begin{pmatrix} -28 \\ -33 \\ 40 \end{pmatrix}$, $[\beta_2]_S = X_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ -14 \\ 17 \end{pmatrix}$, $[\beta_3]_S = X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$P(S \to T) = \left([\beta_1]_S \quad [\beta_2]_S \quad [\beta_3]_S\right) = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$$

$$[Y]_S = X_4 = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Áp dụng:

1. Cho $u_1 = (1,2,-1)$, $u_2 = (2,-1,2)$, $u_3 = (-1,-3,2)$, $v_1 = (3,1,1)$, $v_2 = (1,-4,4)$, $v_3 = (2,-2,3)$, $x = (6,-1,4)$

   a. Chứng minh $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của R^3. Xác định $[x]_B$.

   b. Chứng minh $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ cũng là cơ sở của R^3. Xác định $P(B \to C)$.

2. Cho $S = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $T = \{(-1,0,0),(1,-1,0),(1,1,-1)\}$ là các cơ sở của R^3, $[X]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = (4,1,-2)$.

   Xác định $P(S \to T)$, $P(T \to S)$, X , $[X]_T$, $[Y]_S$, $[Y]_T$.