PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN

Có 3 thao tác biến đổi trên dòng:

a) Hoán vị dòng (i) với dòng (j).
b) Nhân dòng (i) với 1 số thực $c \neq 0$.
c) Thay dòng (i) bằng [dòng(i) + c.dòng(j)].

Phương pháp Gauss – Jordan giải hệ phương trình tuyến tính:

1) Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để xây dựng tuần tự các cột chuẩn:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Việc huẩn hóa phải tuân thủ 2 nguyên tắc sau:
   a) Khi xây dựng cột E_k thì không làm thay đổi các cột trước nó (E_1, E_2,…, E_{k-1}).
   b) Nếu tại cột đang xét E_k không thể chuẩn hóa thì chuẩn hóa tiếp cột kế cận bên phải.
3) Quá trình chuẩn hóa cột kết thúc khi:
   a) Gặp mâu thuẫn $(0\ 0 \dots 0|a)$ với $a \neq 0$.
   b) Chuẩn hóa xong cột cuối của ma trận (không gặp mâu thuẫn).

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y + 3x - 2t = 6 \\ -2x + y + 2z + 3t = -8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Nghiệm: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $t = -2$.

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau bằngp phương pháp Gauss – Jordan:

a) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=1 \\ 2z-2x+3t+y=-2 \\ 2y+2t+3x-z=-5 \\ t+2z-3y+2=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 2t+5x+y-z=-1 \\ 2z-8t+3x-2y=2 \\ -y+z-3t+2x=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 3z+2x+y=0 \\ 5y+4z+3x=0 \\ 4z-17y+x=0 \end{cases}$

MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Định nghĩa:

Cho $A \in M_n(R)$:

_Ta nói A khả nghịch nếu $\exists A' \in M_n(R)$ thỏa $A'.A = A.A' = I_n$.

_A' (nếu có) thì duy nhất.

_Kí hiệu: $A' = A^{-1}$ và ta nói A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A.

Nếu A khả nghịch (có A^{-1}), ta định nghĩa nghĩa them các lũy thừa nguyên âm cho A:

$A^{-k} = (A^{-1})^k \ \forall k \geq 2$.

Ví dụ:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

Ta có: $B.A = A.B = I_3$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{A khả nghịch và } A^{-1} = B \\ \text{B khả nghịch và } B^{-1} = A \end{cases}$.

$\Rightarrow A^{-4} = (A^{-1})^4 = B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^4$.

Kiểm tra sự khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo:

Cho $A \in M_n(R)$:

$(A \mid I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 \mid B_1) \xrightarrow{\varphi_2} (A_2 \mid B_2) \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_k} (A_k = R_A \mid B_k)$.

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ do ma trận bên trái quy định.

_Nếu $R_A \neq I_n$ thì A không khả nghịch.

_Nếu $R_A = I_n$ thì A khả nghịch.

Ví dụ:

a) $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \in M_2(R)$

$(B \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -15 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$R_B \neq I_2$ $(R_B = 1 < 2) \Rightarrow$ B không khả nghịch.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(R)$

$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 31 & 5 \end{array}\right)$

$R_A = I_3 \Rightarrow$ A khả nghịch.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$

Bài tập: Dùng phương pháp Gauss – Jordan để xét tính khả nghịch và tìm mà trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận thực sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

Tính chất:

1) Nếu A khả nghịch thì:

_A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.

_A^t khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

_cA ($c \neq 0$) khả nghịch và $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

_A^k (k ∈ Z) khả nghịch và $(A^k)^{-1} = A^{-k}$.

2) (AB) khả nghịch ⇔ A và B đều khả nghịch,
Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bài tập chứng minh:

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$, chứng minh A = I_n. Tổng quát $A^p = A^q$, chứng minh A = I_n biết rằng p, q nguyên tố cùng nhau.
b) Chứng minh (A + B) khả nghịch ⇔ ($I_n + A^{-1}$B) khả nghịch ⇔ (I_n + BA^{-1}) khả nghịch.

Giải phương trình ma trận:

1) Ma trận khả nghịch:

AX = B ⇔ A^{-1}AX = A^{-1}B ⇔ X = A^{-1}B (nghiệm duy nhất).

XA = B ⇔ XAA^{-1} = BA^{-1} ⇔ X = BA^{-1} (nghiệm duy nhất).

Ví dụ:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$X = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $\left\{A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\right\}$

A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

⇒ X = A^{-1}B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 22 & 21 \end{pmatrix}$

Y$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\left\{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

⇒ Y = BA^{-1} = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -1 & 13 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

2) Ma trận tổng quát (không xét yếu tố khả nghịch):

f(X) = 0.

Xác định kích thước (mxn) của X.

Viết X = (x_{ij}) (1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n).

Giải hệ để tìm (x_{ij}).

Ví dụ:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$X = $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Đặt X = $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left\langle \begin{matrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 6 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{matrix} 1 & 4 & -9 \\ 0 & -11 & 23 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -7 \\ 20 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 7 \\ -19 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{matrix} 1 & 0 & -7/11 \\ 0 & 1 & -23/11 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3/11 \\ 20/11 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/11 \\ 19/11 \end{matrix} \right\rangle$.

Nghiệm:

Hệ 1: z $\in$ R, x = $\frac{7z+3}{11}$, y = $\frac{23z-20}{11}$.

Hệ 2: w$\in$ R, u = $\frac{7w+1}{11}$, y = $\frac{23w+19}{11}$.

X = $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7z+3 & 7w+1 \\ 23z-20 & 23w+19 \\ 11z & 11w \end{pmatrix}$ (z, w $\in$ R).

Bài tập: Áp dụng ma trận khả nghịch để giải các phương trình ma trận thực sau:

a) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ X = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ X $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}^{-4}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 X^5 \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

A $\in M_n$(R) $\xrightarrow{Xác\ định\ duy\ nhất}$ số thực c_A $\rightarrow$ định thức của A.

Kí hiệu c_A = det(A) = $|A|$.

Ý nghĩa:

_Nếu det(A) $\neq$ 0 thì A khả nghịch.

_Nếu det(A) = 0 thì A không khả nghịch.

Công thức tính:

A $\in M_n$(R):

_n = 1: A = (a) thì $|A|$ = a.

_n = 2: A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $|A|$ = a.d – b.c

_n > 2:

Đặt C_{ij} = ma trận A sau khi xóa dòng i và cột j.

C_{ij}^{A} = $(-1)^{i+j}|A(i,j)|$: Hệ số đồng thừa tại vị trí (i,j) của A.

Dựa vào C_{ij}, $|A|$ được tính theo các định thức của ma trận cấp (n-1):

$|A|$ = $a_{i1}C_{i1}^{A}$ + $a_{i2}C_{i2}^{A}$ + … + $a_{in}C_{in}^{A}$ (dòng (i)).

$|A|$ = $a_{1j}C_{1j}^{A}$ + $a_{2i}C_{2j}^{A}$ + … + $a_{nj}C_{nj}^{A}$ (cột (j)).

Ví dụ:

A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & -9 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ ∈ M_3(R)

$|A|$ = $a_{11}C_{11}^{A}$ + $a_{12}C_{12}^{A}$ + $a_{13}C_{13}^{A}$ (dòng (1))

= 3$(-1)^{1+1}|A(1,1)|$ + (-2) $(-1)^{1+2}|A(1,2)|$ + 5$(-1)^{1+3}|A(1,3)|$

= 3$\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$ + 23$\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}$ + 5$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ = (dòng 1) 36 + 192 -80 = 148.

Ghi chú: nếu a_{ij} = 0 thì không cần tính C_{ij}^{A} ($a_{ij}C_{ij}^{A}$ = 0). Do đó khi tính $|A|$, ta tính theo dòng (hay cột) có nhiều hệ số 0 nhất.

Ví dụ:

$\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 9 & 0 & -1 & -6 \end{matrix}}^{A} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 8 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}$ = (dòng 4) $a_{41}C_{41}^{A}$ = (-4)$(-1)^{4+1}|A(4,1)|$ = 4$\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & -1 & 6 \end{matrix}}^{B} \\ \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 8 \end{matrix} \end{vmatrix}$ = (cột 1) 4$b_{31}C_{31}^{B}$

= 4(-2)$|B(3,1)|$ = -8$\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = -72

Ảnh hưởng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng và cột đối với định thức:

_Hoán vị dòng (hoặc cột):

A $\xrightarrow{(i) \leftrightarrow (j) hoặc\ (j)' \leftrightarrow (j)'}$ A', khi đó $|A'|$ = -$|A|$.

_Nhân dòng (hoặc cột) với c ∈ R:

A $\xrightarrow{(i) \rightarrow c(i)\ hoặc\ (j) \rightarrow c(j)'}$ A', khi đó $|A'|$ = c$|A|$.

Ghi chú: ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp để tạo dòng (hoặc cột) chứa nhiều hệ số 0.

Ví dụ:

$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ = (cột 1) -2$(-1)^{1+1}$ $\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$ = 100

Bài tập: Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3m & 2m(1-m) & -7m \\ 4 & 5(1-m) & 2 \\ 2 & 4(m-1) & 4 \end{vmatrix}$

Định thức và ma trận khả nghịch:

A ∈ M_n(R) và A khả nghịch (nghĩa là $|A| \neq$ 0).

Tính n^2 hệ số C_{ij}^A (1 ≤ i,j ≤ n).

Lập ma trận C = (C_{ij}^A) (1 ≤ i,j ≤ n).

Ta có $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$.

Ví dụ:

A = $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ∈ M_3(R)

$|A|$ = $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ = -105

C_{11} = $|A(1,1)|$ = $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ = -25, C_{12} = -$|A(1,2)|$ = -$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = -40, C_{13} = $|A(1,3)|$ = $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ = 10,

C_{21} = -$|A(2,1)|$ = -$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ = -29, C_{22} = $|A(2,2)|$ = $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = -17, C_{23} = -$|A(2,3)|$ = -$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ = -1,

C_{31} = $|A(3,1)|$ = $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ = 32, C_{32} = -$|A(3,2)|$ = -$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ = 26, C_{33} = $|A(3,3)|$ = $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ = -17,

Đặt C = (C_{ij}) (1 ≤ i,j ≤ 3) = $\begin{pmatrix} -25 & -40 & 10 \\ -29 & -17 & -1 \\ 32 & 26 & -17 \end{pmatrix}$.

Ta có $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t = \frac{1}{105}\begin{pmatrix} 25 & 29 & -32 \\ 40 & 17 & -26 \\ -10 & 1 & 17 \end{pmatrix}$.

Bài tập: Xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận thực sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 13 & -12 & 6 \\ 8 & -7 & 4 \\ -12 & 12 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Quy tắc Cramer:

Xét hệ phương trình tuyến tính AX = B.

Đặt $\Delta = |A|$,

Với $1 \le j \le n$, đặt A_j = A sau khi xóa cột j và thay bằng cột B.

$\Delta_j = |A_j|$.

Quy tắc Cramer:

a) Nếu $\Delta \neq 0$ (A khả nghịch) thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$\left(x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\right).$$

b) Nếu $\Delta = 0$ và $\exists\, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $\Delta_j \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

c) Nếu $\Delta = 0$ và $\forall\, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $\Delta_j = 0$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm, phải dung phương pháp Gauss (Jordan) để có kết luận chính xác.

Ví dụ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & m-5 & 2 \\ m & 1 & m+1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix}$ = (m-1)(m-3).

$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix}$ = 4(3-m).

$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix}$ = 0.

$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 2(m-3).

_Nếu $3 \neq m \neq 1$ thì $\Delta \neq 0$ và hệ có nghiệm duy nhất:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4(3-m)}{(m-1)(m-3)} = \frac{4}{1-m}$.

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{(m-1)(m-3)} = 0$.

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2(m-3)}{(m-1)(m-3)} = \frac{2}{m-1}$.

_Nếu m = 1 thì ($\Delta = 0 \neq \Delta_1 = 8$) và hệ vô nghiệm.

_Nếu m = 3 thì ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$), giải hệ bằng phương pháp Gauss – Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ vô số nghiệm:

$x_3 = a \in$ R.

$x_1 = \frac{-6a-4}{5}$

$x_2 = \frac{2-2a}{5}$

Bài tập: Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số thực m bằng quy tắc CRAMER:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2m+5 & 9 & m \\ -3 & m-4 & 1-m \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 4m-2 & -1 \\ 3 & m+1 & -9 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} m^2 & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 0 \\ m & 1 & m & -1 \end{array}\right)$