Free download
2015

PHẦN 1: XÁC SUẤT

CHƯƠNG 0: GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Chương này học một số quy tắc đếm thông dụng

- https://sites.google.com/a/ueh.edu.vn/phamtricao/
- https://sites.google.com/site/phamtricao/

0)Nguyên lý cộng

Một công việc để thực hiện thì ta phải phân trường hợp, giả sử có 3 trường hợp A, B, C.

Nếu xảy ra trường hợp A thì không thể xảy ra trường hợp B hoặc C.

Nếu xảy ra trường hợp B thì không thể xảy ra trường hợp A hoặc C.

Tương tự cho C.

Trường hợp A có m_A cách làm.

Trường hợp B có m_B cách làm.

Trường hợp C có m_C cách làm.

Vậy số cách để hoàn thành công việc là $m_A+m_B+m_C$

0)Nguyên lý cộng

- <u>Ví dụ 1</u>:
- Có 2 loại phương tiện để sinh viên đi học: phương tiện cá nhân hoặc phương tiện công cộng.
- Phương tiện cá nhân gồm có: xe đạp, hoặc xe gắn máy, hoặc xe hơi.
- Phương tiện công cộng gồm có: xe bus, hoặc xe taxi, hoặc xe ôm, hoặc xe xích lô.
- (Sinh viên *phải và chỉ* chọn 1 trong các loại phương tiện trên, *không xét đi bộ hoặc Bồ chở!!!*)
- <u>Câu hỏi</u>:
- Có bao nhiêu cách để sinh viên có thể đi đến lớp?
- Có tất cả 3+4 = 7 cách.

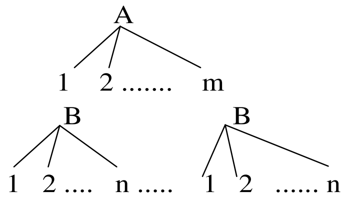
- <u>Ví dụ 2</u>:
- Cửa hàng bán 2 loại hoa: hoa Lan và hoa Hồng.
- Lan gồm có: lan Hoàng hôn, lan Hồ điệp
- Hồng gồm có: hồng Đỏ thổn thức, hồng Xanh huyền bí, hồng Trắng trinh nguyên
- Chàng SV đến cửa hàng mua **1** bông hoa tặng nàng.
- Có bao nhiêu cách lựa chọn để chàng mua được 1 bông hoa?
- <u>Giải</u>:
- Số cách là 2+3 = 5


5

I) NGUYÊN LÝ NHÂN

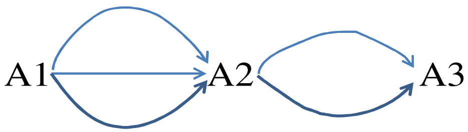
Một công việc để thực hiện *phải qua* 2 giai đoạn A, B.
Giai đoạn A có m cách thực hiện, giai đoạn B có n cách thực hiện
Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện xong công việc?

<u>Giải</u>: Ứng với mỗi cách của giai đoạn A, ta có n cách thực hiện giai đoạn B



6 Vậy: Có m*n cách để thực hiện công việc

<u>Ví dụ 1</u>:



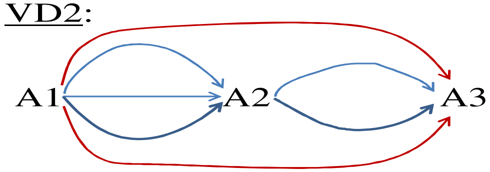
Đi từ A1 đến A3 phải đi qua A2. Từ A1 đến A2 có 3 đường đi, từ A2 đến A3 có 2 đường đi. Có bao nhiêu cách để đi từ A1 đến A3?

<u>Giải</u>:

Số cách đi từ A1 đến A3 là 3*2 = 6

7

<u>VD2</u>:



Đi từ A1 đến A3 có 2 lựa chọn:

* Đi trực tiếp từ A1 đến A3.

* Đi gián tiếp từ A1 qua A2 rồi tới A3.

Có bao nhiêu cách để đi từ A1 đến A3?

<u>Giải</u>:

Số cách đi từ A1 đến A3 là 2+3*2 = 8

8

- Ví dụ 3:
- Một người có 6 cái áo, 5 cái quần. Hỏi có bao nhiêu cách mặc đồ?
- HD:
- Công việc mặc đồ có 2 giai đoạn ta phải thực hiện lần lượt là: mặc áo, mặc quần.
- Mặc áo: có 6 cách
- Mặc quần: có 5 cách
- Vậy ta có: 6*5 = 30 cách

- Mở rộng:
- Một công việc để thực hiện có nhiều giai đoạn.

9

- Ví dụ 4:
- Một người có 4 cái áo, 3 cái quần, 3 cái nón. Hỏi có bao nhiêu cách mặc đồ và đội nón?
- HD:
- Công việc mặc đồ và đội nón có 3 giai đoạn ta phải thực hiện lần lượt là: mặc áo, mặc quần, đội nón.
- Mặc áo: có 4 cách
- Mặc quần: có 3 cách
- Đội nón: có 3 cách
- Vậy ta có: 4*3*3 = 36 cách

10

II) CHỈNH HỢP

- Ví dụ 1: Có 5 bức tranh và 7 cái móc treo trên tường. Có bao nhiêu cách treo 5 bức tranh này (mỗi móc chỉ treo 1 bức tranh)?
- HD: Công việc treo tranh có 5 giai đoạn sau:
- gđ1: treo bức tranh thứ **1**. Ta chọn ra 1 móc treo từ 7 cái móc treo, có 7 cách chọn. (còn lại 6 móc treo)
- gđ2: .... **2**.............. 6 cách ..... Còn 5 móc
- gđ3: .... **3**.............. 5 cách ..... Còn 4 móc
- gđ4: .... **4**............. 4 cách ..... Còn 3 móc
- gđ5: .... **5**............. 3 cách .....

- Theo nguyên lý nhân ta có: 7*6*5*4*3 = 2520 cách treo

11

Một số cách treo cụ thể:

Móc	1	2	3	4	5	6	7
Cách 1:	1	2	3	4	5		
Cách 2:	2	1	3	4	5		
Cách 3:	1	2		3	4	5	

• • • • • • • • • • • • • • •

- *Lấy các móc ra có thứ tự (có để ý trật tự lấy).*

12

Nhận xét

- Mỗi cách treo 5 bức tranh là một cách lấy 5 cái móc treo từ 7 cái móc treo. Đây là *cách lấy có thứ tự*, bởi vì trật tự lấy các móc khác nhau sẽ cho ta các cách treo tranh khác nhau.
- Vậy số cách lấy *có thứ tự* 5 phần tử từ 7 phần tử được tính như thế nào?

13

ĐN: Một chỉnh hợp n chập k (chỉnh hợp chập k của n) là 1 cách lấy k phần tử khác nhau (có để ý thứ tự, trật tự sắp xếp) từ n phần tử khác nhau.

Số chỉnh hợp :

A(k,n)= $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Với n!=1*2*3*...*n , quy ước 0!=1

Ví dụ: Theo ví dụ trên ta có: Một cách treo 5 bức tranh là 1 cách chọn ra 5 móc treo khác nhau từ 7 móc treo (có để ý đến vị trí của chúng)

⇨ Mỗi cách treo là 1 chỉnh hợp 7 chập 5:

A(5,7)=7*6*5*4*3

14

- **Nhận xét:**
- Mỗi k phần tử lấy ra từ n phần tử tạo thành 1 nhóm.
- Các nhóm khác nhau do:
- \- Các phần tử trong nhóm khác nhau
-     Vd: 1234 khác 3456
- \- Thứ tự, trật tự sắp xếp của các phần tử trong nhóm khác nhau
-     Vd: 1234 khác 3412

15

- Ví dụ 2:
- Có 10 người nhưng chỉ có 4 chức vụ: TP, PP, TL, TKR. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 4 người và bố trí chức vụ?
- Giải:
- Số cách là A(4,10)= 5040
- Ví dụ 3:
- Tập có 9 chữ số A= {1,2,....,9}
- Có bao nhiêu số nguyên dương mỗi số có 4 chữ số *khác nhau* được tạo từ tập A?
- Giải:
- Có A(4,9)= 3024 số

16

3) Hoán vị:

- Có n phần tử khác nhau.
- Một hoán vị của n phần tử này là 1 cách sắp xếp n phần tử này theo 1 thứ tự xác định.

- **NX:**
- Hoán vị là trường hợp đặc biệt của chỉnh hợp, với k = n
- Số hoán vị: P(n)= n! (= A(n,n))

- Ví dụ 1:
- Có 4 người.
- Có bao nhiêu cách xếp 4 người này:
- a) ngồi thành hàng dài
- b) ngồi vào bàn tròn *có đánh số*
- c) ngồi thành vòng tròn

17

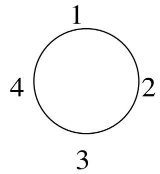
HD:

a) A B C D
1 2 3 4

Mỗi cách xếp 4 người này là 1 hoán vị của 4 người này
→ có 4! Cách

b) 4!

c)



Chọn ra 1 người làm mốc, ta thấy vị trí bắt đầu của người này không quan trọng (ví dụ: A làm mốc, A ở vị trí 1 cũng tương tự như A ở vị trí 2)

⇨ Chỉ sắp xếp 3 người còn lại : có 3! cách

18

Lưu ý:

- Nếu ngồi thành hàng dài *có đánh số* thì ta sắp xếp canh theo số, có 4! cách sắp xếp.
- Vậy nếu ngồi thành hàng dài mà *không đánh số* thì cũng là 4! *hay* 3! (giống ngồi thành vòng tròn không đánh số)?
- HD:
- *Trái* A B C D *Phải*
- Người thứ nhất (giả sử A) ngồi bên trái.
- Người thứ 2 (giả sử B) ngồi kế A.
- Người thứ 3 (giả sử C) ngồi kế B.
- Người thứ 4 (là D) ngồi kế C.

19

- Ví dụ 2:
- Có 4 nam và 4 nữ. Có bao nhiêu cách bắt đôi?
- (Một đôi là 1 nam với 1 nữ, không xét đôi *môi của Mr ĐVH – tin hot 11/2012*)
- Giải:
- Cố định nữ, cho 4 nam chọn 4 nữ.
- Có 4! cách

20

4) Tổ hợp:

Một tổ hợp n chập k là 1 cách lấy k phần tử khác nhau (không để ý thứ tự sắp xếp) từ n phần tử khác nhau

Số tổ hợp :

$$C(k,n)= C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>VD:</u> Một phòng làm việc của 1 công ty có 30 nhân viên.

a) Có bao nhiêu cách giám đốc chọn ra BLĐ phòng gồm 3 người.

b) BLĐ phòng gồm: trưởng phòng, phó phòng, thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra BLĐ phòng.

21

HD:

- a) Một BLĐ phòng là 1 cách chọn 3 người từ 30 người (chọn tùy ý, không quan tâm thứ tự sắp xếp)
  → Mỗi cách chọn là 1 tổ hợp. Số cách chọn là C(3,30)
- b) <u>Cách 1:</u>
- Vì 3 người trong BLĐ có chức vụ rõ ràng: TP, PP, TK
  → có để ý thứ tự sắp xếp
- Số cách chọn là A(3,30)

22

- <u>Cách 2:</u> Chia thành 2 gđ:
- gđ1: chọn tùy ý 3 người từ 30 người: có C(3,30) cách
- gđ2: ứng với 3 người được chọn, chỉ định 1 người làm TP, 1 người làm PP, 1 người làm TK: có 3! Cách
- Vậy có: C(3,30)*3! Cách

- **<u>NX</u>:**
- A(k,n) = C(k,n)*k! ⇒ C(k,n) = A(k,n) / k!

- **<u>NX</u>:**
- Tổ hợp: các nhóm khác nhau do các phần tử trong nhóm khác nhau

23

<u>Bình loạn</u>:

- Qua VD này bạn có cảm nhận được sự "vô thường" của cuộc đời! Ta có 2 cách chọn:
- C1: Chọn 3 người có chỉ định chức vụ ngay từ đầu.
- C2: Chọn tùy ý 3 người, sau đó mới chỉ định chức vụ cho từng người.
- Theo bạn thì 2 cách chọn này có cho cùng kết quả như nhau?!

- Dưới góc độ *khoa học tự nhiên*: c1 và c2 cho cùng 1 kết quả.

24

Bình loạn: (tt)

- Dưới góc độ *khoa học xã hội*: c1 và c2 cho kết quả khác nhau "1 trời 1 vực"! Tại sao ư?!
- Khi GĐ chọn ra 3 người, trong thời gian *chuẩn bị* chỉ định chức vụ cho từng người thì các người này đã lo "vận động hậu trường" cho chức vụ của mình rồi, ai vận động "mạnh hơn" thì sẽ được làm TP.
- Bạn sẽ nói: "Khờ quá! Ai lại để cho c2 xảy ra. Khi GĐ chỉ mới *dự định* chọn BLĐ thôi thì phải lo vận động cho chức vụ TP rồi chứ".
- ???????!!!!!!!
- Ừ! Khờ thiệt!

25

- Ví dụ 2:
- Một ngân hàng đề thi có 10 câu hỏi *tự luận*. Mỗi lần thi lấy ngẫu nhiên ra 4 câu để tạo thành 1 đề thi.
- Có bao nhiêu đề thi khác nhau được tạo ra từ ngân hàng đề thi?
- Giải:
- Số đề thi là C(4,10)= 210

26

5) Chỉnh hợp lặp:

- Ví dụ 0: Tập A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
- Có bao nhiêu Mã số có 4 chữ số được tạo ra từ tập A?
- HD:
- CS1 CS2 CS3 CS4
  10 10 10 10
- Vậy có: $10*10*10*10 = 10^4 = 10.000$ Mã số
- Với vd này thì k= 4 và n= 10

27

5) Chỉnh hợp lặp:

- Ví dụ 1: Có 5 cuốn sách và 3 ngăn tủ, mỗi ngăn có thể chứa được cả 5 cuốn sách.
- Hỏi có bao nhiêu cách xếp 5 cuốn sách vào 3 ngăn tủ?
- HD:
- CS1 CS2 CS3 CS4 CS5
- 3 3 3 3 3
- Vậy có: $3*3*3*3*3 = 3^5 = 243$ cách xếp
- Với vd này thì k= 5 và n= 3

28

5) Chỉnh hợp lặp:

- Ví dụ 2: Tín hiệu Morse (Moóc-xơ) quy ước có độ dài là 4 tín âm. Mỗi tín âm là Tít (T) hoặc te (t)
- Vd: TTTT, TTTt, tTTT, TTtt, Tttt, tttt...
- (TTTT có nghĩa là *I*, TTtt nghĩa là *L*, tttt có nghĩa là *U*)
- Hỏi có bao nhiêu tín hiệu Moóc-xơ được tạo thành?
- HD:
- Tâ1 Tâ2 Tâ3 Tâ4
- 2 2 2 2
- Vậy có: 2*2*2*2 = 2^4 tín hiệu Moóc-xơ

29 Với vd này thì k= 4 và n= 2

ĐN: Một chỉnh hợp lặp n chập k là 1 cách chọn ra k phần tử (có để ý thứ tự) từ n phần tử khác nhau. Mỗi phần tử có thể lặp lại ***tới k lần***.

Số chỉnh hợp lặp:

$A^*(k,n) = B(k,n) = \widetilde{A}_n^k = n^k$

NX:

k có thể lớn hơn n

30

6) Hoán vị lặp:

- Nhắc lại:
- Số hoán vị của n phần tử *khác nhau* là: P(n) = n!
- Ta có n phần tử, trong đó có:
  - n1 phần tử có cùng tính chất A1
  - n2 phần tử có cùng tính chất A2
  - ....
  - nk phần tử có cùng tính chất Ak
  - với n1+n2+...+nk = n
- Số hoán vị của n phần tử này là: n! / (n1! n2! ...nk!)

31

- Ví dụ 1:
- A= {1, 2, 3}. Có bao nhiêu mã số có 3 chữ số khác nhau được tạo ra từ A?
- Giải:
- Số mã là 3!= 6
- Ví dụ 2:
- A= {1, 2}. Có bao nhiêu mã số có 3 chữ số được tạo ra từ A, với chữ số 1 xuất hiện 2 lần?
- Giải:
- 1_a1_b2 , 1_b1_a2 ; 1_a21_b , 1_b21_a ; 21_a1_b , 21_b1_a
- Số mã là 3! / 2! = 3

32

- Ví dụ 3:
- Tập A= {1, 2, 5}
- Có bao nhiêu mã số có 7 chữ số được tạo ra từ tập A, với chữ số 1 xuất hiện *2 lần*, chữ số 2 xuất hiện *2 lần*, chữ số 5 xuất hiện *3 lần*?
- Vd: 1122555, 1221555, 1252155 ...
- Giải:
- Số mã là 7! / 2! 2! 3! = 210

33

- VD4: Có 10 người định cư vào 3 nước: Anh, Pháp, Mỹ.
- Nước Anh nhận 3 người, nước Pháp nhận 3 người, nước Mỹ nhận 4 người. *(Không quan tâm thứ tự của những người vào cùng một nước...)*
- Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?
- HD:
- Ta có 10 người, trong đó có:
- 3 người có cùng tính chất A1 (cùng định cư ở Anh)
- 3 người có cùng tính chất A2 (cùng định cư ở Pháp)
- 4 người có cùng tính chất A3 (cùng định cư ở Mỹ)
- Vậy có: 10! / (3! 3! 4!) Cách
- Cách 2: Dùng nguyên lý nhân?

34

- Cách 2: Chia thành 3 gđ:
- gđ1: Chọn tùy ý 3 người vào nước Anh: có C(3,10) cách → còn lại 7 người sắp xếp vào 2 nước Pháp, Mỹ
- gđ2: Chọn tùy ý 3 người (trong 7 người còn lại) vào nước Pháp: có C(3,7) cách
- gđ3: Chọn tùy ý 4 người (trong 4 người còn lại) vào nước Mỹ: có C(4,4) = 1 cách
- Vậy có: C(3,10)*C(3,7)*C(4,4)
  = 10! / (3! 3! 4!) cách

35

TÓM LẠI

- Tổng kết các quy tắc đếm.
- Ta có bài toán tổng quát sau: *có n phần tử, chọn ra k phần tử*. Các trường hợp:
- a) *Nếu không để ý thứ tự*: tổ hợp
- b) *Nếu có để ý thứ tự*:
- b1) *Nếu k=n*:
-   * Nếu n phần tử khác nhau: hoán vị
-   * Nếu trong n phần tử có các phần tử *có cùng tính chất*: hoán vị lặp
- b2) *Nếu k≠n* và nếu k phần tử lấy ra khác nhau: chỉnh hợp
- b3) *Nếu k≠n* và nếu các phần tử *có thể lặp lại* (tối đa k lần): chỉnh hợp lặp

Nếu ta không áp dụng được các quy tắc: chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp, tổ hợp, hoán vị, hoán vị lặp: dùng *quy tắc nhân / quy tắc cộng* (chia công việc ra thành 1 số giai đoạn, 1 số trường hợp)

36

Trong máy tính Casio fx-570VN Plus có chức năng tính tổ hợp, chỉnh hợp và hoán vị.
Xem hướng dẫn sử dụng trên trang web của tác giả.

- **Bài tập 1**
- Lớp có 30 sinh viên, trong đó có 20 nam. Trong 1 buổi khiêu vũ, có bao nhiêu cách:
- a) Chọn ra 1 đôi
- b) Chọn ra 3 nam, 3 nữ
- c) Chọn ra 3 đôi

(1 đôi là 1 nam và 1 nữ)

37

Hd1:

- a) Có C(1,20)*C(1,10) cách
- b) Có C(3,20)*C(3,10) cách
- c) Chia thành 2 gđ:
- gđ1: chọn ra 3 nam, 3 nữ: có C(3,20)*C(3,10) cách
- gđ2: ứng với 3 nam, 3 nữ vừa chọn → bắt đôi (cố định nữ, cho 3 nam chọn 3 nữ) → mỗi cách bắt đôi là 1 hoán vị của 3 nam → có 3! cách bắt đôi
- Vậy có: C(3,20)*C(3,10)*3! cách

38

bt2

- Để báo tín hiệu trên biển người ta dùng 5 cột cờ với 7 màu khác nhau
- (Vd: Đ Đ Đ Đ Đ là tín hiệu SOS, T V T X T)
- Hỏi có bao nhiêu tín hiệu, có:
- a) 5 màu khác nhau
- b) có màu tùy ý
- c) 2 cờ *kế nhau* không được cùng màu

- <u>Lưu ý</u>:
- Mỗi cột cờ chỉ gắn 1 lá cờ.
- Lá cờ thì rất nhiều nhưng chỉ có 7 màu cờ.

39

Hd2:

- a) Có A(5,7) tín hiệu
- b) Có 7^5 tín hiệu
- c) Đ X Đ V Đ   Đ T X V Đ
- c1 c2 c3 c4 c5   c1 c2 c3 c4 c5

- Cờ 1: có 7 cách chọn màu
- 2: có 6 cách
- 3: có 6
- 4: có 6
- 5: có 6
- Vậy có: 7*6*6*6*6 tín hiệu
- <u>**NX**</u>: Sự khác nhau giữa câu b và c

40

Bt3:

- Hộp có 10 bi, trong đó có 6 bi Trắng và 4 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 bi.
- a) Có bao nhiêu cách lấy được 3 bi?
- b) Có bao nhiêu cách lấy được 3 bi Trắng?
- c) Có bao nhiêu cách lấy được 2 bi Trắng và 1 bi Xanh?
- d) Có bao nhiêu cách lấy được 1 bi Trắng và 2 bi Xanh?
- e) Có bao nhiêu cách lấy được 0 bi Trắng?
- f) Có bao nhiêu cách lấy được ít nhất 2 bi Xanh?
- g) Có bao nhiêu cách lấy được nhiều nhất 2 bi Xanh?

41

Hd3:

- a) Có C(3,10) cách
- b) Có C(3,6) cách
- c) Có C(2,6)*C(1,4) cách
- d) Có C(1,6)*C(2,4) cách
- e) Có C(3,4) cách
- f) Số cách lấy được 2 bi Xanh là C(1,6)*C(2,4)

  Số cách lấy được 3 bi Xanh là C(3,4)

  Vậy số cách lấy được ít nhất 2 bi Xanh = số cách lấy được 2 bi X + số cách lấy được 3 bi X
- g) Số cách lấy được nhiều nhất 2 bi Xanh = số cách lấy được 0 bi X + số cách lấy được 1 bi X+ số cách lấy được 2 bi X = b) + c) + d)
- Hoặc: g) = a) – e)

42

<u>Phụ lục:</u> Các hàm tính toán thông dụng trong EXCEL

Tổ hợp: COMBIN(8,2) = C_8^2

Chỉnh hợp: PERMUT(100,3) = A_{100}^3

Hoán vị: FACT(5) = 5!

Chỉnh hợp lặp: POWER(5,2) = $\tilde{A}_5^2 = 5^2$

Hoán vị lặp: MULTINOMIAL(4,2,3) = $\frac{9!}{4!2!3!}$

LN(e) = 1 , LN(5) = 1,6094

LOG10(5) = $\log_{10}(5)$ = lg(5) = 0,6990

LOG10(10) = 1

43

- <u>Quy ước</u>: Quyển (*) là quyển:
- BÀI TẬP XSTK, ThS. Lê Khánh Luận & GVC. Nguyễn Thanh Sơn & ThS. Phạm Trí Cao, NXB ĐHQG TPHCM 2013.
- Xem thêm 1 số dạng bài tập về quy tắc đếm ở quyển (*).

44