Free download
2015

CHƯƠNG 1:
XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1

- **I/ Phép thử ngẫu nhiên và biến cố ngẫu nhiên:**
- **Phép thử ngẫu nhiên:**
- là việc thực hiện 1 thí nghiệm/ thực nghiệm, hoặc việc quan sát 1 hiện tượng tự nhiên trong **1 số điều kiện nhất định**. Nó có thể dẫn đến kết cục này hoặc kết cục khác (**có ít nhất 2 kết cục**). Và việc làm này có thể **thực hiện bao nhiêu lần cũng được**.
- Quy ước: Một đồng xu có 1 mặt Hình và 1 mặt Chữ được gọi là đồng xu Sấp Ngữa, với quy ước
- mặt Hình = Sấp , mặt Chữ = Ngữa.

2

- *Vd1:* Tung 1 đồng xu Sấp Ngữa (cân đối, đồng chất), xét xem mặt nào xuất hiện (mặt nào được lật lên).
- Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?
- *Vd2:* Ném hòn đá xuống nước, xét xem hòn đá chìm hay nổi.
- Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?
- *Vd3*: Hai vợ chồng cãi nhau. Xét xem họ có ly dị nhau không.
- Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?
- VD4:
- Bắn 1 phát súng vào bia.
- Đây là 1 phép thử NN?

3

- VD5:
- Hộp có 7 bi Trắng và 5 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 bi ra xem màu.
- Đây là 1 phép thử NN?
- VD6:
- Hộp có 7 bi Trắng. Lấy ngẫu nhiên 1 bi ra xem màu.
- Đây là 1 phép thử NN?
- VD7: (Phim "Hãy yêu đi rồi sẽ biết")
- Yêu 1 người *khác giới tính*.
- Đây là 1 phép thử NN?
- Từ đây trở đi khi ta nói *phép thử* thì có nghĩa là *phép thử NN*.

4

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Các kết cục của phép thử NN gọi là các <u>biến cố.</u>
Có 3 loại biến cố: bc ngẫu nhiên, bc chắc chắn, bc không thể có
<u>BcNN:</u> là bc có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu A, B, C,...
<u>Bc chắc chắn:</u> là bc luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu Ω
<u>Bc không thể có:</u> là bc không thể xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu Φ (hoặc ϕ)
Ta chỉ nghiên cứu bcNN mà thôi.

5

- *<u>Vd1:</u>*
- Tung 1 con xúc xắc (cân đối, đồng chất), xét xem mặt nào xuất hiện.
- (Con xúc xắc có các mặt được đánh số nút từ 1→6)

- Đặt: A= bc xuất hiện mặt có số nút <=6
- B= bc xuất hiện mặt có số nút là 7
- C= bc xuất hiện mặt có số nút là số chẵn

- Biến cố nào là biến cố chắc chắn, bc ktc, bcNN?

6

- <u>VD2</u>:
- Xét 1 gia đình *văn hóa* có 2 con.
  (*Một người **chỉ** có thể là trai **hoặc** là gái, không xét hifi*)

- Đặt: A = bc gia đình có 1 trai, 1 gái.
  B = bc gia đình có 2 con.
  C = bc gia đình có 3 con.

- Bc nào là bccc, bcktc, bcNN?

7

- <u>Vd3</u>:
- Hộp có 8 bi: 6 bi Trắng, 2 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 3 bi xem màu.

- Đặt A= bc lấy được 3 bi T
  B= bc lấy được 3 bi X
  C= bc lấy được 3 bi

- Bc nào là bccc, bcNN, bcktc?

8

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

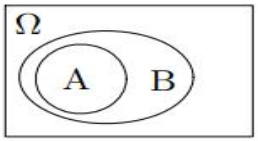
II) QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

- Thông thường sinh viên coi nhẹ phần này, cho rằng "chuyện nhỏ như con thỏ", "không có gì mà ầm ỉ". Phải tính xác suất cái này, xác suất cái kia thì mới "Xứng danh đại anh hùng"! Học xác suất mà "không thấy xác suất đâu", học các quan hệ này thì chán chết!
- Tuy nhiên khi gặp bài toán xác suất đòi hỏi phải biết cách *tự phân tích, tự đặt* các biến cố, *diễn tả* câu hỏi đề cho theo các biến cố *đã đặt* thì lại không làm được, hoặc diễn tả không đúng!
- Hoặc đọc bài giảng trong sách thì lại không hiểu tại sao người ta biến đổi được như vậy!
- Nếu đã hiểu rõ về các quan hệ giữa các biến cố thì các vấn đề trên *đúng là* "chuyện nhỏ như con thỏ"!
- Vậy bạn thích "con thỏ" nào !?

9

II/QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ:

- *1)Kéo theo:*
- bc A gọi là kéo theo bc B **nếu** bc A xảy ra thì dẫn đến bc B xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu: $A \subset B$ hay $A \Rightarrow B$



$A \Longrightarrow B$

- *Vd1:*
- Một sv mua 1 tờ vé số.
- Đặt A= bc sv này trúng số độc đắc
  B= bc sv này trúng số

$A \subset B$ hay $B \subset A$?

10

1)KÉO THEO

- VD2: Xét 1 gia đình *văn hóa* có 2 con.
- Đặt A= bc gia đình có con trai.
  B= bc gia đình có 2 con trai.
- $A \subset B$ hay $B \subset A$?
- VD3: Xét 1 học sinh đi thi đại học khối A.
- Đặt A= bc học sinh này thi đậu
  B= bc học sinh này có điểm Toán là 10
- $A \subset B$ hay $B \subset A$?

11

2) TƯƠNG ĐƯƠNG (BẰNG NHAU):

- bc A gọi là bằng bc B **nếu** bc A xảy ra thì bc B xảy ra, và ngược lại bc B xảy ra thì bc A xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu A=B hay $A \Leftrightarrow B$
- Vậy A=B **nếu** $A \subset B$ và $B \subset A$
- *Vd1:*
- Tung 1 con xúc xắc.
- Đặt A= bc con xx xh mặt có số nút chẵn
  B= bc con xx xh mặt có số nút là: 2,4,6
  C= bc con xx xh mặt có số nút là: 2,4

A=B? A=C?

12

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2) Tương đương

- VD2:
- Xét 1 gia đình văn hóa có 2 con.
- (*Một người **chỉ** có thể là trai **hoặc** là gái, không xét hifi*)

- A= bc gia đình có **1** con trai
- B= bc gia đình có **1** con gái
- C= bc gia đình có con trai
- D= bc gia đình có ít nhất 1 con trai
- E= bc gia đình có nhiều nhất 1 con trai

13

- A=B? A=C? C=D? C=E?

2)TƯƠNG ĐƯƠNG

- Vd3:
- Hộp có 8 bi: 6T, 2 X. Lấy 2 bi ra xem màu.

- Đặt A= bc lấy được 1 bi T
  B= bc lấy được 1 bi X
  C= bc lấy được 3 bi T
  D= bc lấy được bi T

- A=B? A=C? A=D?

14

2)TƯƠNG ĐƯƠNG

- Vd4:
- Hộp có 8 bi: 4T, 2X, 2Đỏ. Lấy 2 bi ra xem màu.

- Đặt A= bc lấy được 1 bi T
  B= bc lấy được 1 bi X

A=B?

15

2)TƯƠNG ĐƯƠNG

- VD5:
- Hộp có 7 bi Trắng và 5 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 bi.

- A= bc lấy được ít nhất 2 bi T
- B= bc lấy được nhiều nhất 1 bi X
- C= bc lấy được nhiều nhất 2 bi X
- D= bc lấy được 2 bi T
- E= bc lấy được 1 bi X

- D=E? A=B ? A=C ?

16

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)TƯƠNG ĐƯƠNG

- VD6:
- Hộp có 6 bi Trắng và 2 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 bi.

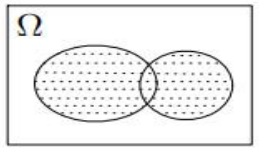
- A= bc lấy được nhiều nhất 2 bi T
- B= bc lấy được ít nhất 2 bi X
- C= bc lấy được 2 bi X
- D= bc lấy được ít nhất 2 bi T
- E= bc lấy được nhiều nhất 2 bi X

- A=B? A=C? D=E?

17

3)TỔNG (HỢP):

- bc C gọi là tổng của 2 bc A và B, ký hiệu C=A+B hay C=A∪B.
- C xảy ra **nếu** có ít nhất 1 trong 2 bc A hoặc B xảy ra, khi thực hiện phép thử.



A+B

- Câu hỏi: Vậy A và B *cùng xảy ra* khi thực hiện phép thử được hông?

18

3)HỢP

- Vd1:
- Tung 1 con xúc xắc. Xét xem mặt nào xuất hiện.

- Đặt C= bc con xx xh mặt có số nút chẵn.
  B= bc con xx xh mặt có số nút là 2
  A= bc con xx xh mặt có số nút là 4,6
  D= bc con xxxh mặt có số nút là 2,4

- C= A+B? C= A+D?

19

3)HỢP

- VD2:
- Có 2 xạ thủ, mỗi người bắn 1 phát đạn vào bia.

- A= bc người thứ nhất bắn trúng
- B= bc người thứ hai bắn trúng
- C= bc bia trúng đạn

- C= A+B?

20

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3)HỢP

- *Vd3:* Lớp có 50 sv, trong đó có: 20 sv giỏi AV, 15 sv giỏi PV, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ trên.
- Chọn NN 1 sv trong lớp.

- Đặt A= bc sv này giỏi Anh
  B= bc sv này giỏi Pháp
  C= bc sv này giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ.
  D= bc sv này giỏi cả 2 ngoại ngữ

C= A+B? D= A+B?

- Dùng biểu đồ Venn minh họa?

21

3)HỢP

- *Vd4:*
- Hộp có 9 bi T và 7 bi X. Lấy NN 3 bi từ hộp.

- Đặt A= bc lấy được 2 bi T và 1 bi X
  B= bc lấy được 3 bi T
  C= bc lấy được ít nhất 2 bi T
  D= bc lấy được nhiều nhất 1 bi X

C= A+B? D= A+B?

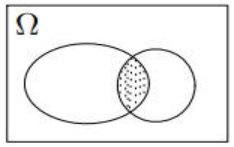
22

- *Tổng quát:* C= A1+A2+...+An .
  C xảy ra **nếu** có ít nhất 1 bc Ai xảy ra, khi thực hiện phép thử
- *VD1:* Có 3 người đi thi
- Ai= bc người thứ i thi đậu
- C= bc có ít nhất 1 người thi đậu
- C= A1+A2+A3
- *Vd2:* Kiểm tra chất lượng n sản phẩm.
  Đặt Ai= bc sp thứ i xấu.
  C= bc có ít nhất 1 sp xấu
- C= A1+A2+...+An
- ***Vậy "hiểu" dấu + giữa các biến cố nghĩa là gì?***

23

4)TÍCH (GIAO):

- bc C gọi là tích của 2 bc A và B, ký hiệu C= A.B hay C= A∩B
- C xảy ra **nếu** cả 2 bc A và B cùng xảy ra, khi thực hiện phép thử.



AB

24

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

4)TÍCH

- Vd1:
- Tung 1 con xúc xắc. Xét xem mặt nào xuất hiện.

- Đặt A= bc con xx xh mặt có số nút là 2,4
  B= bc con xx xh mặt có số nút là 2,6
  C= bc con xx xh mặt có số nút là 2
  D= bc con xx xh mặt có số nút là 2,4,6

- C= A.B? C= A.D?

25

4)TÍCH

- VD2:
- Có 2 xạ thủ, mỗi người bắn 1 phát đạn vào bia.

- A= bc người thứ nhất bắn trật
- B= bc người thứ hai bắn trật
- C= bc bia không trúng đạn

- C= A.B? C= A+B?

26

4)TÍCH

- *Vd3:*
- Lớp có 50 sv, trong đó có: 20 sv giỏi AV, 15 sv giỏi PV, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ trên.
- Chọn NN 1 sv trong lớp.

- Đặt A= bc sv này giỏi Anh
  B= bc sv này giỏi Pháp
  C= bc sv này giỏi cả 2 ngoại ngữ

C= A.B?

27

4)TÍCH

- VD4: Một sinh viên được gọi là có mái tóc *highlight* kiểu "tắc kè bông" khi trên đầu vừa *có cọng* tóc màu xanh, vừa *có cọng* tóc màu vàng.
- Lớp có 40 sv, trong đó có 5 sinh viên tóc màu vàng, 7 sinh viên tóc màu xanh, 3 sinh viên tóc "tắc kè bông".
- Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp.

- A= bc sv này *có* tóc màu vàng
- (*Chỉ cần có **1** cọng tóc màu vàng là A xảy ra*)
- B= bc sv này *có* tóc màu xanh
- C= bc sv này *có* tóc "tắc kè bông"
- C= A.B ?

28

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

4) TÍCH

- *Vd5:*
- Chọn NN **1** lá bài từ bộ bài tây 52 lá.

- Đặt A= bc có được lá già.
  B= bc có được lá cơ
  C= bc có được lá già cơ.

- C=A.B?

29

4)TÍCH

- *Tổng quát:* C = A1.A2...An.

  C xảy ra **nếu** tất cả các Ai cùng xảy ra, khi thực hiện phép thử
- *VD1:* Có 3 người đi thi
- Ai= bc người thứ i thi rớt
- C= bc tất cả đều thi rớt
- C = A1.A2.A3
- *Vd2:* Kiểm tra chất lượng n sp.
- Đặt Ai= bc sp thứ i tốt
- C= bc tất cả các sp đều tốt
- C = A1.A2...An
- ***Vậy "hiểu" dấu . giữa các biến cố nghĩa là gì?***

30

4)KẾT HỢP TỔNG VÀ TÍCH

VD6: Hộp 1 có 6 bi T và 4 bi X. Hộp 2 có 7 bi T và 3 bi X.

- Lấy NN từ hộp 1 ra **2** bi và lấy NN từ hộp 2 ra **1** bi.

- A= bc lấy được 2 bi T từ hộp 1
- B= bc lấy được 1 bi T từ hộp 2
- C= bc lấy được 3 bi T (trong 3 bi lấy ra)
- D= bc lấy được 1T 1X từ hộp 1
- E= bc lấy được 2T 1X (trong 3 bi lấy ra)
- F= bc lấy được 1X từ hộp 2

- C=A.B? C=D.B?
- E=B.D? E=A.F? E= A.F+D.B?

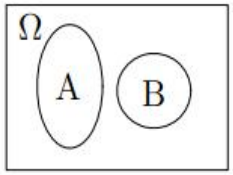
31

5)XUNG KHẮC:

- A và B gọi là xung khắc **nếu** A và B không đồng thời xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu A.B=Φ

- Với 2 biến cố A, B thì ta có 4 trường hợp:

  A xr, Bxr
  A xr, Bkxr
  A kxr, Bxr
  A kxr, Bkxr



Vậy trường hợp nào ứng với *xung khắc*?

32

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

5)XUNG KHẮC

- *Vd 1:*
- Tung 1 con xúc xắc.

đặt A= bc được mặt có số nút chẵn.
B= bc được mặt có số nút là 2.
C= bc được mặt có số nút lẻ.
D= bc được mặt có số nút 1, 3

- Xác định A.B? A.C?
- A,B xung khắc? A,C xk? A,D xk?

33

5)XUNG KHẮC

- *Ví dụ 2:* Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN **1** viên phấn ra xem màu.
- (*Từ quá khứ đến hiện tại, 1 viên phấn hoặc toàn Trắng hoặc toàn Đỏ; chưa thấy 1 viên phấn có khúc T và khúc Đ cùng lúc. Còn tương lai thì vô định!*)

- Đặt T= bc được viên phấn T.
Đ= bc được viên phấn Đ.
A= bc lấy được 1 viên phấn

T,Đ xung khắc? T,A xk?

34

5)XUNG KHẮC

- VD3:
- Xét 1 gia đình văn hóa có 2 con.
- (*Một người **chỉ** có thể là trai **hoặc** là gái, không xét hifi*)

- A= bc gia đình có 0 con trai
- B= bc gia đình có 1 con trai
- C= bc gia đình có 2 con trai

- A,B xk? A,C xk? B,C xk?

35

5)XUNG KHẮC

- *Ví dụ 4:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN **2** viên phấn ra xem màu.

- Đặt A= bc được 1 viên phấn T.
B= bc được 1 viên phấn Đ.
C= bc được 2 viên phấn T
D= bc lấy được viên phấn T

A,B xung khắc? A,C xk? B,D xk?

36

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

5)Xung khắc

- VD5: Lớp có 50 sv, trong đó có 7 sv tóc *highlight* 7 màu (đỏ, xanh, vàng, lục, lam, chàm, đen), 15 sv tóc *highlight* màu vàng, các sv còn lại tóc màu đen.
- Chọn NN 1 sv trong lớp.
- A= bc sv này *có* tóc màu đen (*chỉ cần có 1 cọng tóc đen*)
- B= bc sv này *có* tóc màu vàng
- A, B xung khắc?
- VD6: giả thiết giống VD5. Lấy NN 2 sinh viên.
- A= bc 2 sv này *có* tóc màu đen
- B= bc 2 sv này *có* tóc màu vàng
- A, B xung khắc?
- VD7: giống VD6. Nhưng lớp chỉ có **1** sv có tóc 7 màu.

37

5)Xung khắc

- VD8: Bộ bài tây có 52 lá. Lấy ngẫu nhiên ra **1** lá.
- A= bc lấy được lá ách
  B= bc lấy được lá cơ
- A, B xung khắc?

- VD9: Bộ bài tây có 52 lá. Lấy ngẫu nhiên ra **2** lá.
- A= bc lấy được 2 lá ách
  B= bc lấy được 2 lá cơ
- A, B xung khắc?

38

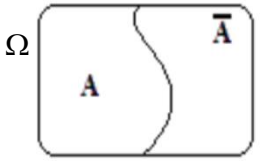
6)ĐỐI LẬP:

- A, B gọi là đối lập **nếu** A và B không đồng thời xảy ra, và 1 trong 2 bc A hoặc B phải xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu: biến cố đối lập của A ký hiệu là $\overline{A}$ hay A*
- Với 2 bc A,B ta có 4 trường hợp xảy ra:
  A xr, Bxr
  A xr, Bkxr
  A kxr, Bxr
  A kxr, Bkxr
  Vậy trường hợp nào ứng với *đối lập*?

39

6)ĐỐI LẬP

- Nhận xét sau đúng hay sai?
  A, A* đối lập ⇔ A+A* = Ω
  và A.A* = ϕ



- Nhận xét sau đúng hay sai?
  A,B xung khắc → A,B đối lập

40

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

6)ĐỐI LẬP

- *Vd1:*
- Tung 1 con xúc xắc.

A= bc xuất hiện mặt có số nút chẵn
B= bc xuất hiện mặt có số nút lẻ
C= bc xuất hiện mặt có số nút là : 2 hoặc 4
D= bc xuất hiện mặt có số nút là : 1, 3, 5, 6
E= bc xuất hiện mặt có số nút là : 1, 2, 4

A,B đối lập? B,C đối lập?
C,D đối lập? D,E đối lập?

41

6)ĐỐI LẬP

- VD2: Xét phụ nữ sinh **1** con. (Không xét *con hifi*)
- A= bc sinh con trai
- B= bc sinh con gái
- A, B đối lập?
- VD3: Xét một sinh viên đi thi môn XSTK
- (*Thi đạt nếu điểm từ 5-10, thi rớt nếu điểm từ 0-4*)
- A= bc sinh viên thi đậu
- B= bc sinh viên thi rớt
- C= bc sinh viên có điểm thi từ 0-3
- A, B đối lập?
- A, C đối lập?

42

6)ĐỐI LẬP

- *Ví dụ 4:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN **1** viên phấn ra xem màu.

- Đặt T= bc được viên phấn T.
  Đ= bc được viên phấn Đ.
  A= bc lấy được 1 viên phấn

T,Đ đối lập? T,A đối lập?

43

6)ĐỐI LẬP

- *Ví dụ 5:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN **2** viên phấn ra xem màu.

- Đặt B= bc được 2 viên phấn T.
  C= bc được 2 viên phấn Đ.
  A= bc lấy được nhiều nhất 1 viên phấn Đ
  D= bc lấy được viên phấn T

B,C đối lập? A,C đối lập? C,D đối lập?

44

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

6)ĐỐI LẬP

- *Ví dụ 6:*
- Hộp phấn có: 10 viên phấn trắng, 9 viên phấn đỏ. Lấy NN 9 viên phấn ra xem màu.

- Đặt A= bc được ít nhất 1 viên phấn T.
  B= bc được 9 viên phấn Đ.
  C= bc lấy được ít nhất 2 viên phấn T
  D= bc lấy được ít nhất 8 viên phấn Đ
  E= bc lấy được nhiều nhất 2 viên phấn T
  F= bc lấy được nhiều nhất 6 viên phấn Đ

A,B đối lập? C,D đối lập? E,F đối lập?

45

6) Đối lập

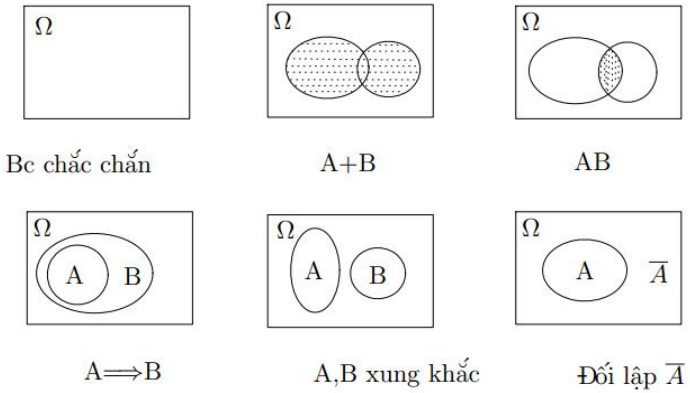
- VD7:
- Hộp có 6 bi Trắng và 2 bi Xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 bi.

- A= bc lấy được nhiều nhất 2 bi T
- B= bc lấy được nhiều nhất 1 bi X
- C= bc lấy được ít nhất 3 bi T
- D= bc lấy được 2 bi X

- A, B đối lập? C, D đối lập?

46

BIỂU ĐỒ VENN MINH HỌA CÁC LOẠI QUAN HỆ



47

7)NHÓM BIẾN CỐ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI:

- Nhóm biến cố A, B, C xung khắc từng đôi *nếu* A,B xung khắc; A,C xung khắc; B,C xung khắc.

- Nhóm (họ) n biến cố A1,A2,...,An gọi là xung khắc từng đôi **nếu** hai biến cố bất kỳ trong nhóm là xung khắc nhau (nghĩa là Ai.Aj = Φ, với mọi i≠j)

48

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

7)NHÓM BIẾN CỐ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI:

- VD1:
- Tung 1 con xúc xắc

- Đặt A= bc con xx xh mặt có số nút là 1,2
  B= bc con xx xh mặt có số nút là 4,6
  C= bc con xx xh mặt có số nút là 5
  D= bc con xx xh mặt có số nút là lẻ

A,B,C xktđ? A,B,D xktđ?

49

7)XKTĐ

- *Vd2:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ, 3 viên phấn Xanh. Lấy NN 1 viên phấn ra xem màu.

- T= bc được viên phấn T
  Đ= bc được viên phấn Đ
  X= bc được viên phấn X

- T,Đ,X xktđ?

50

7)XKTĐ

- *Vd3:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN **2** viên phấn ra xem màu.

- A= bc được 2 viên phấn T
  B= bc được 2 viên phấn Đ
  C= bc được 1 viên phấn T

- A,B,C xktđ?

51

7)XKTĐ

- *Ví dụ 4:*
- Khối tứ diện có 4 mặt: 1 mặt sơn xanh, 1 mặt sơn trắng, 1 mặt sơn vàng, mặt còn lại ½ sơn xanh và ½ sơn vàng. Chọn ngẫu nhiên 1 mặt của tứ diện để xem màu.

- T= bc chọn được mặt *có* sơn T
- (*Chỉ cần mặt có dính tí xíu sơn trắng là T xảy ra*)
  X= bc chọn được mặt *có* sơn X
  V= bc chọn được mặt *có* sơn V

52

- X,T,V xk tđ?

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

8)NHÓM BC ĐẦY:

- Nhóm n biến cố A1,A2,...,An gọi là đầy **nếu** A1+A2+...+An = Ω

- Vd 1:
- Tung một con xúc xắc
  A= bc mặt 1,2 xh
  B= bc mặt 3,4 xh
  C= bc mặt 4,5,6 xh
  D= bc mặt lẻ xh

A,B,C đầy? A,B,D đầy?

53

8)NHÓM BC ĐẦY:

- VD2:
- Hộp có 7 bi T và 6 bi X. Lấy ngẫu nhiên 4 bi từ hộp.
- A= bc lấy được 4 bi T
- B= bc lấy được 3 bi T
- C= bc lấy được nhiều nhất 1 bi T
- D= bc lấy được nhiều nhất 2 bi T
- E= bc lấy được nhiều nhất 3 bi T

- A, B, C đầy?
- A, B, D đầy?
- A, B, E đầy?

54

9)NHÓM BC ĐẦY ĐỦ (VÀ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI):

- A1,A2,...,An gọi là nhóm bc đầy đủ (và xktđ) **nếu** A1,A2,...,An là nhóm bc đầy và là nhóm bc xktđ

- Nhận xét:
- A, A* là 2 biến cố *đối lập* thì A, A* là nhóm bc *đầy đủ*

55

9)NHÓM BC ĐĐ (VÀ XKTĐ)

- Vd1: Tung một con xúc xắc
  A= bc mặt 1,2 xh
  B= bc mặt 3,4 xh
  C= bc mặt 4,5,6 xh
  D= bc mặt 5,6 xh
  E= bc mặt 5 xh

A,B,C đđ (và xktđ)?
A,B,D đđ (và xktđ)?
A,B,E đđ (và xktđ)?

56

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

9)NHÓM BC ĐĐ (VÀ XKTĐ)

- *Vd2:*
- Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ, 3 viên phấn Xanh. Lấy NN 1 viên phấn ra xem màu.

- T= bc được viên phấn T
  Đ= bc được viên phấn Đ
  X= bc được viên phấn X

- T,Đ,X là nhóm bc đđ (và xktđ)?

57

9)NHÓM BC ĐĐ (VÀ XKTĐ)

- *Vd3:*
- Hộp phấn có: 5 viên phấn trắng, 3 viên phấn Xanh. Lấy NN **2** viên phấn ra xem màu.

- A= bc được 2 viên phấn T
  B= bc được 2 viên phấn X
  C= bc được 1 viên phấn X.

- A,B,C là nhóm bc đđ (và xktđ)?

58

10)BIẾN CỐ SƠ CẤP:

- Biến cố sơ cấp là biến cố không thể phân chia thành *tổng* các biến cố khác. ***Biến cố sơ cấp là kết cục đơn giản nhất có thể có của phép thử***.

- Tập hợp các bc sơ cấp tạo thành không gian các bc sơ cấp, hay không gian mẫu. Ký hiệu Ω
- Bcsc còn được gọi là *kết cục tối giản*

- Biến cố sơ cấp ***đồng khả năng***: Các biến cố sơ cấp gọi là đồng khả năng xảy ra nếu khả năng xảy ra của các biến cố là như nhau, khi thực hiện phép thử.

59

10) BIẾN CỐ SƠ CẤP

- *Vd1:*
- Tung 1 con xúc xắc, xét xem mặt nào xuất hiện.

- Ai= bc con xúc xắc xuất hiện mặt có số nút là i, i=1,...,6
- B= bc con xúc xắc xuất hiện mặt có số nút chẵn

- Ta có: Ai, i=1,6 là các bc sơ cấp (*đồng khả năng*)
  B không là bcsc (đkn) vì: B= A2+A4+A6
  Ω= {A1, A2,..., A6} : kg mẫu
- Lưu ý:
  A1+A2+...+A6 = Ω

60

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

10)BC SƠ CẤP

- Vd2:
- Xét gia đình có 2 con.
- 1) Hãy xác định các bc sơ cấp (*đồng khả năng*) và kg mẫu?
- 2) Đặt:

  A= bc gia đình có 0 Trai

  B= bc gia đình có 1 Trai

  C= bc gia đình có 2 Trai

- A, B, C là các bc sơ cấp *đồng khả năng*?

61

10)BC SƠ CẤP

- Giải vd2:
- 1) Ω= {TT, TG, GT, GG}
- 2) Ta chỉ có thể "*cố xem*" A, B, C là các bc "sơ cấp" *không đồng khả năng*.

- ***Để tính xác suất theo định nghĩa cổ điển thì ta chỉ quan tâm các bc sơ cấp đồng khả năng.***

- Vd3:
- Tung 1 đồng xu sấp ngữa (cân đối, đồng chất) 2 lần. Hãy xác định các bc sơ cấp (đkn) và kg mẫu?

62

10)BC SƠ CẤP

- Giải VD3:
- Ω= {SS, SN, NS, NN}

- BT1: Tung 1 đồng xu sấp ngữa 3 lần. Hãy xác định các bcsc (đkn) và kg mẫu.

- BT2: Tung 1 con xúc xắc và 1 đồng xu sấp ngữa. Hãy xác định các bcsc (đkn) và kg mẫu.

- BT3: Tung 1 con xúc xắc 2 lần. Hãy xác định các bcsc (đkn) và kg mẫu.

63

10)BC SƠ CẤP

- BT4: Hộp có 3 bi T, 2 bi X. Lấy từ hộp ra 2 bi xem màu. Có 3 cách lấy:

  Cách 1: Lấy NN 2 bi *(lấy 1 lần, và lần đó lấy cả 2 bi)*

  Cách 2: Lấy lần lượt 2 bi *(lấy 2 lần, mỗi lần 1 bi. Lần 1 lấy 1 bi ra xem màu rồi bỏ bi đó ra ngoài luôn, sau đó lấy 1 bi nữa lần 2)*

  Cách 3: Lấy có hoàn lại (*nói hoàng gia*) (hoặc bỏ lại-*nói dân giả*) 2 bi *(lấy 2 lần, mỗi lần 1 bi. Lần 1 lấy 1 bi ra xem màu rồi bỏ bi đó trở lại hộp, sau đó lấy tiếp 1 bi nữa lần 2)*
- Hãy xác định các bc sơ cấp (đkn), kg mẫu ứng với từng cách lấy.

64

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

HDBT4:

- C1: có C(2,5)= 10 bcsc
- C2: có A(2,5)= 20 bcsc
- C3: có 5^2= 25 bcsc

- Tự nghỉ cách ghi các bcsc này, rất thú vị!

- HD:
- Đánh số các bi

65

III)TÍNH CHẤT

$\bar{\bar{A}} = A$ hay $(A^*)^* = A$, $A+A^* = \Omega$

$A+\Omega = \Omega$, $A.\Omega = A$

$A+\phi = A$, $A.\phi = \phi$

$A + A = A$, $A.A = A$

$A + B = B + A$, $A.B = B.A$

$A+(B.C) = (A+B).(A+C)$, $A.(B+C) = A.B+A.C$

$\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$, $\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$

$\overline{A+B+C} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$, $\overline{A.B.C} = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

66

III) TÍNH CHẤT

- VD:
- Xét Ω= {1,2,3,4,5,6}
- A= {1,3,6} → A* = {2,4,5}
- B= {1,3,4} → B* = {2,5,6}

- Vậy A*.B* = {2,5}
- Và A+B = {1,3,4,6} → (A+B)* = {2,5}

- Ta thấy: (A+B)* = A*.B*

67

III)TÍNH CHẤT

- *Vd1:* Kiểm tra chất lượng 4 sản phẩm.

Đặt Ak= bc sp thứ k tốt. Biểu diễn các bc sau theo Ak:

- A= bc cả 4 sp đều tốt

B= bc có 3 sp tốt , C= bc có ít nhất 1 sp xấu

D= bc có ít nhất 1 sp tốt , E= bc có tối đa 1 sp xấu

- Giải: A= A1.A2.A3.A4

B= A1*.A2.A3.A4+ A1.A2*.A3.A4
+A1.A2.A3*.A4+ A1.A2.A3.A4*

C= A1*+A2*+A3*+A4* , C= A*

D= A1+A2+A3+A4 , D*= A1*.A2*.A3*.A4*

E= A+B

68

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Tính chất:

- VD2: Có 2 sinh viên đi thi.
- A= bc sv 1 thi đậu , B= bc sv 2 thi đậu

Hãy diễn tả các biến cố sau theo A, B :

- 1) Cả hai sv đều thi đậu
- 2) Không có ai thi đậu
- 3) Có ít nhất một người thi đậu
- 4) Chỉ có sv 1 thi đậu
- 5) Sinh viên 1 thi đậu
- 6) Chỉ có một sv thi đậu
- 7) Có nhiều nhất một người thi đậu
- 8) Có sv thi đậu
- 9) Hai sv có cùng kết quả thi

69

Giải:

- 1) AB
- 2) A*B*
- 3) A+B
- 4) AB*
- 5) AB+AB* = A (*tại sao?*)
- 6) AB*+A*B
- 7) A*B*+(A*B+AB*) = (AB)* = A*+B*

(*có ít nhất 1 người thi rớt*)

- 8) (AB*+A*B)+AB = A+B (*tại sao?*)
- 9) AB+A*B*

70

BT1:

- Hộp có 3 bi T, 2 bi X. Lấy *lần lượt* 2 bi từ hộp.
- Ti= bc lấy được bi T ở lần lấy thứ i, i=1,2
- Biểu diễn các biến cố sau theo các Ti (xét cho 2 bi lấy ra):
- 1) Lấy được 0 bi T
- 2) Lấy được 1 bi T
- 3) Lấy được 2 bi T
- 4) Lấy được ít nhất 1 bi T
- 5) Lấy được 2 bi cùng màu
- 6) Lấy được nhiều nhất 1 bi T
- 7) Lấy được bi T

71

Giải:

- 1) T1*T2*
- 2) T1T2*+T1*T2
- 3) T1T2
- 4) T1+T2
- 5) T1T2+T1*T2*
- 6) (T1T2)*
- 7) T1+T2

72

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

BT2:

- Hộp 1 có: 2 bi T, 3 bi X. Hộp 2 có: 2 bi T, 2 bi X. Lấy 1 bi từ hộp 1 bỏ sang hộp 2, rồi sau đó lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp 2 ra.
- A= bc lấy được bi T từ hộp 1
- Bi= bc lấy được i bi T từ hộp 2, i=0,2
- Biểu diễn các biến cố sau theo A, Bi (xét cho 3 bi lấy ra):
- 1) Lấy được 3 bi T
- 2) Lấy được 1 bi T
- 3) Lấy được 2 bi T
- 4) Lấy được 0 bi T
- 5) Lấy được bi T

73

Giải:

- 1) AB2
- 2) AB0+A*B1
- 3) AB1+A*B2
- 4) A*B0
- 5) (A*B0)*= A+B0*= A+B1+B2

74

- BT4: Hộp 1 có: 3 bi T, 2 bi X. Hộp 2 có: 3 bi T, 3 bi X.
- Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 bi.
- Ai= bc lấy được i bi T từ hộp 1, i=0,2
- Bi= bc lấy được i bi T từ hộp 2, i=0,2
- Hãy diễn tả các bc sau theo Ai, Bi *(xét cho 4 bi lấy ra)*:
- 1) Lấy được 4 bi X
- 2) Lấy được 1 bi T
- 3) Lấy được 2 bi T
- 4) Lấy được 3 bi T
- 5) Lấy được 4 bi T
- 6) Lấy được ít nhất 1 bi T
- 7) Lấy được nhiều nhất 2 bi T
- 8) Lấy được 3 bi cùng màu
- 9) Lấy được 4 bi cùng màu

75

Giải:

- 1) A0B0
- 2) A1B0+A0B1
- 3) A0B2+A2B0+A1B1
- 4) A2B1+A1B2
- 5) A2B2
- 6) (A0B0)*
- 7) = 1)+2)+3)
- 8) = 2)+4)
- 9) = 1)+5)

76

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bình loạn:

- Qua các ví dụ trên bạn có thấy được *lợi ích* của việc học Xác suất?!
- Một nàng trước khi "*trao thân gởi phận*" cho chàng luôn muốn chàng hứa là: *chàng yêu nàng và không yêu ai khác nữa!*
- Nếu nàng *không học XS* thì sẽ nói: "anh có hứa yêu em không" (lúc đó chàng mừng thầm trong bụng!)
- Nếu nàng *đã học XS* thì sẽ nói: "anh có hứa *chỉ* yêu *một mình* em không" (lúc đó chàng ôm bụng khóc thầm!)

77

IV/ ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT:

- *1) Khái niệm:* Xác suất của 1 biến cố là *1 con số* đặc trưng cho khả năng xảy ra của biến cố đó khi thực hiện phép thử.
- ***2) Đn cổ điển:*** Thực hiện 1 phép thử NN. Giả sử có n bc sơ cấp xảy ra.

  Các bcsc này gọi là *đồng khả năng xảy ra* **nếu** các bcsc này có khả năng xảy ra như nhau, khi thực hiện phép thử (không có bcsc nào ưu tiên hay xảy ra hơn bcsc nào).
- Bcsc mà khi nó xảy ra *kéo theo* bc A xảy ra gọi là *bcsc thuận lợi* cho bc A.

78

2)ĐN CỔ ĐIỂN

- P(A) = số bcsc thuận lợi cho A / số bcsc đkn xảy ra
  = |A| / |Ω|

- *Tính chất:*

  0<= P(A) <=1 với A là bc bất kỳ.

- P(Φ)= |Φ| / |Ω| = 0/ |Ω|= 0 , P(Ω)= |Ω| / |Ω| = 1

  A là biến cố ngẫu nhiên thì 0 < P(A) < 1

79

2)ĐN CỔ ĐIỂN

- *Vd1:* Tung 1 con xúc xắc, xét xem mặt nào xuất hiện.
- Ai= bc xh mặt có số nút i

  B= bc xh mặt có số nút chẵn

  C= bc xh mặt có số nút là: 2 hoặc 3

  D= bc xh mặt có số nút là: 1,4,5,6

  E= bc xh mặt có số nút là: 4,5,6

- Ta có: Ai là bcsc, Ω= {A1, A2, A3, A4, A5, A6}
- P(Ai)= 1/6
- P(B)= 3/6= 1/2 , P(C)= 2/6= 1/3 ,

  P(D)= 4/6= 2/3 , P(E)= 3/6= 1/2

80

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)ĐNCĐ (NHẬN XÉT VD1)

- **C,E xung khắc**. P(C+E)= 5/6
  C+E= bc xh mặt có số nút là: 2,3,4,5,6
  Vậy 5/6 = **P(C+E) = P(C)+P(E)** = 2/6+3/6

- **C,D đối lập: P(C)+P(D)=** 2/6+ 4/6 **= 1**
  Vậy **P(D) = 1- P(C)** hay **P(C*)= 1-P(C)**
- **B,C không xung khắc**
  B.C= bc xh mặt có số nút là 2 , P(B.C)= 1/6
  B+C= bc xh mặt có số nút là: 2,3,4,6
  P(B+C)= 4/6
  Vậy **P(B+C)= P(B)+P(C)-P(B.C)**
  4/6 = 3/6 + 2/6 – 1/6

81

2)ĐNCĐ (NHẬN XÉT VD1)

- Tổng quát:
- A, B không xung khắc:
  P(A+B)= P(A)+P(B)-P(AB)
- A, B xung khắc:
  P(A+B)= P(A)+P(B)
- A, A* đối lập
  P(A*)= 1-P(A)
  P(A)= 1-P(A*)

82

2)ĐNCĐ

- *Vd2:*
- Hộp có 10 bi T, 4 bi X. Lấy ngẫu nhiên 2 bi (lấy một lần 2 bi) ra xem màu.
- Tính xs :
  a) Lấy được 2 bi T?
  b) Lấy được 1 bi T, 1 bi X?
  c) Lấy được 2 bi X?
  d) Lấy được 3 bi T?

83

2)ĐNCĐ

- Giải VD2:
- Phép thử: lấy ngẫu nhiên 2 bi từ 14 bi → Có C(2,14) cách lấy → |Ω|= C(2,14)
- a) A= bc lấy được 2 bi T
  Trong C(2,14) cách lấy trên, ta thấy có C(2,10) cách lấy được 2 bi T → |A|= C(2,10)
  Vậy P(A)= |A| / |Ω| = C(2,10) / C(2,14)= 45/91
- b) B= bc lấy được 1 bi T, 1 bi X
  Trong C(2,14) cách lấy trên, ta thấy có C(1,10)*C(1,4) cách lấy được 1 bi T, 1 bi X
  → |B|= C(1,10)*C(1,4)
  Vậy P(B)= |B| / |Ω| = C(1,10)*C(1,4) / C(2,14)
  = 10*4 / 91 = 40/91

84

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)ĐNCĐ (GIẢI VD2 -TIẾP)

- c) C= bc lấy được 2 bi X

P(C) = C(2,4) / C(2,14) = 6/91

d) D= bc lấy được 3 bi T

P(D)= 0 / C(2,14) = 0

85

2)ĐNCĐ

- **Nhận xét:**
- Để tính xs của bc A ta thực hiện 2 bước sau:
- b1) Từ giả thiết bài toán (việc thực hiện phép thử) ta tính số bcsc đkn xảy ra → |Ω|
- b2) Trong các bcsc đkn xảy ra, ta tính số bcsc thuận lợi cho bc A → |A|
- Xác suất của bc A là: P(A)= |A| / |Ω|

86

2)ĐNCĐ

- VD3:
- Hộp có 5 bi T và 9 bi X. Lấy NN 4 bi từ hộp. Tính xác suất lấy được 2 bi T?
- Giải:
- P(2T2X)= C(2,5)C(2,9) / C(4,14)

- BT1: Hộp có 5 bi T và 3 bi V và 6 bi Đ. Lấy NN 4 bi từ hộp.
- 1) Tính xác suất lấy được 2 bi T?
- 2) Đáp số có giống VD3 không?

87

ÍCH LỢI CỦA CÔNG THỨC P(A)= 1-P(A*)

VD4: Hộp có 10 bi T và 8 bi X. Lấy ngẫu nhiên ra 7 bi.

- a) Tính xác suất lấy được ít nhất 1 bi T?
- b) Tính xác suất lấy được nhiều nhất 6 bi T?
- Giải:
- a) F= bc lấy được ít nhất 1 bi T
- F*= bc lấy được 0 bi T (7 bi X)
- P(F*)= C(7,8) / C(7,18) → P(F)= 1-P(F*)
- b) K= bc lấy được nhiều nhất 6 bi T
- K*= bc lấy được 7 bi T
- P(K*)= C(7,10) / C(7,18) → P(K)= 1-P(K*)

88

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

BT2: Theo bạn lập luận sau đúng hay sai, tại sao?

- Xét một gia đình có 2 con.
- Ta có 3 trường hợp:
- A= gia đình có 0 con trai (2 con gái)
  B= gia đình có 1 con trai
  C= gia đình 2 con trai

- Ta có 3 trường hợp xảy ra nên :
  P(A)= P(B)= P(C)= 1/3

89

BT3: Theo bạn lập luận sau đúng hay sai, tại sao?

- Hộp có 3 bi T, 2 bi X. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi xem màu.
- Ta có 3 trường hợp xảy ra:
- A= lấy được 0 bi T (2 bi X)
  B= lấy được 1 bi T (1 bi X)
  C= lấy được 2 bi T

- Ta có 3 trường hợp xảy ra nên:
  P(A)= P(B)= P(C)= 1/3

90

BT4: Theo bạn lập luận sau đúng hay sai, tại sao?

- Hộp có 3 bi T, 2 bi X. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 1 bi xem màu.
- Ta có 2 trường hợp xảy ra:
- A= lấy được bi T
  B= lấy được bi X

- Ta có 2 trường hợp xảy ra nên:
  P(A) = P(B) = 1/2

91

3) ĐN XÁC SUẤT THEO THỐNG KÊ:

- P(A)= |A| / |Ω|

- Do định nghĩa cổ điển *có 1 số hạn chế* nên người ta đưa ra định nghĩa thống kê.
- Tuy nhiên định nghĩa thống kê vẫn có 1 số hạn chế của nó.

92

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3)ĐNTK

- *Tần suất:* Thực hiện 1 phép thử T n lần. Gọi m là số lần xuất hiện bc A quan tâm trong n lần thử.
- Tỷ số $f_n(A)= m/n$ gọi là tần suất xuất hiện của bc A (trong n lần thử)
- Ta có $|f_{101}(A)-f_{100}(A)| < |f_{11}(A)-f_{10}(A)|$
- Ta nhận xét thấy: khi số phép thử n càng lớn thì $f_n(A)$ càng tiến gần đến 1 giá trị p nào đó, nghĩa là $\lim f_n(A)= p$, khi $n \to \infty$

- ***Đn***: p gọi là xs của bc A *theo thống kê*: P(A)= p
- Trong thực tế ta hay dùng $f_n(A)$ như là xs của bc A *khi n lớn*

93

3)ĐNTK

- Vd1: Để xác định xác suất 1 cặp vợ chồng sau khi cưới nhau thì sẽ ly dị *thực tế* là bao nhiêu. Người ta điều tra thời gian vừa qua thấy có trong 10000 cặp cưới nhau, có 500 cặp ly dị. Vậy có thể xem xác suất để 1 cặp sau khi cưới nhau sẽ ly dị là:

  500 / 10000 = 0,05 (!)
- Nếu điều tra 1000000 và có 51000 cặp ly dị thì xác suất để 1 cặp sau khi cưới nhau sẽ ly dị là:

  51000 / 1000000 = 0,051 (!)
- Vậy ta nên chọn con số nào trong 2 con số 0,05 và 0,051 để làm xác suất 1 cặp sẽ ly dị?

94

3)ĐNTK

- Vd2: Kết quả thống kê mới đây ở VN năm 2010 cho thấy tần suất *sinh con trai* là 112 / 212 = 0,5283. Năm 2014 tần suất này là 114 / 214 = 0,5327. Vậy thì khả năng 1 người phụ nữ sinh con trai trong 1 lần sinh hổng phải là 0,5. Có nghĩa là biến cố sinh con trai có xác suất là 0,5327. Tỷ lệ này ở TQ năm 2000 là 120 / 220.
- *Lưu ý: tuy nhiên trong bài tập xác suất người ta vẫn thường giả định xác suất sinh con trai trong 1 lần sinh là 0,5 (người ta đơn giản cho rằng người phụ nữ khi sinh chỉ có 2 trường hợp: có hoặc không có con trai, mà không xét đến các yếu tố ảnh hưởng khác. Hay vì lý do nào đó mà ctmb!)*
- **Xác suất tính theo thống kê thay đổi theo thời gian, không gian**

95

- Ngoài ra, người ta còn định nghĩa xác suất theo *phương pháp hình học*. Tuy nhiên pp hình học vẫn có hạn chế của nó.
- Định nghĩa xác suất 1 cách chặt chẽ là định nghĩa theo *tiên đề xác suất*. Một định nghĩa không lấy gì làm thú vị cho lắm đối với chúng ta!
- Bạn đọc quan tâm xin xem các giáo trình XSTK.
- *Bài tập phần xác suất chỉ có định nghĩa cổ điển.*

96

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

V/ CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT:

- *1)Công thức cộng:*

P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A.B)

- Nếu **A.B = Φ** (A,B xung khắc) thì: P(AB)= 0
  P(A+B) = P(A)+P(B)

- **Một Câu hỏi lớn:**
- Cái khó khăn nhất khi áp dụng công thức cộng là gì?

97

1)CT CỘNG

- Trả lời:
- không xác định được 2 bc A, B có xung khắc nhau hay không, trong bài tập cụ thể.

- *Nếu bạn đã nắm vững phần quan hệ giữa các biến cố thì việc xác định A, B có xung khắc không là "chuyện nhỏ như con thỏ"*

98

1)CT CỘNG

- *Vd1:* Lớp có 50 sv, trong đó có 20 sv giỏi Anh, 15 sv giỏi Pháp, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ. Chọn NN **1** sv.
- Tính xs:
  a) Chọn được 1 sv giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ
  b) Chọn được 1 sv không giỏi ngoại ngữ nào hết
- *HD:*
- a) A= bc sv này giỏi Anh
  B= bc sv này giỏi Pháp
  C= bc sv này giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ

- C=A+B ? A,B xung khắc?

99

1)CTCỘNG (VD1)

- A,B không xung khắc vì có sinh viên giỏi cả 2 ngoại ngữ.
- P(C)= P(A+B)= P(A)+P(B)-P(AB)
  = 20/50 + 15/50 –7/50 = 28/50
- b) D= bc sv này không giỏi NN nào hết
- P(D)= P(A*.B*)= P[(A+B)*]
- = P(C*)= 1-P(C)= 1-28/50 = 22/50

- BT:
- Giải lại 2 câu trên dựa theo biểu đồ Venn?

100

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

1)Công thức cộng

- VD2: Giả thiết giống VD1. Tính xác suất:
- a) SV này chỉ giỏi AV?
- b) SV này chỉ giỏi đúng 1 ngoại ngữ?

- VD3: Giả thiết giống VD1. Nhưng thay vì chọn **1** sv thì ta chọn ngẫu nhiên **2** sv. Tính xác suất:
- a) Cả 2 sv đều giỏi cả 2 ngoại ngữ?
- b) Cả 2 sv giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ?
- c) Cả 2 sv chỉ giỏi AV?
- d) Cả 2 sv chỉ giỏi 1 ngoại ngữ?
- e) Cả 2 sv không giỏi ngoại ngữ nào hết?
- f) Một sv chỉ giỏi AV và 1 sv không giỏi gì hết?

101

1)Công thức cộng

- VD2:
- a) P(AB*)= P(A)-P(AB)
- b) P(AB*+A*B)= P(A)+P(B)-2P(AB)

- VD3: |Ω|= C(2,50)
- a) số sv giỏi cả 2 NN: 7 *nên* |A| = C(2,7)
- b) số sv giỏi ít nhất 1 NN: 13+7+8 = 28
- c) số sv chỉ giỏi AV: 20-7 = 13
- d) số sv chỉ giỏi một NN: 13+8 = 21
- e) số sv không giỏi NN nào hết: 50-28 = 22
- f) số sv chỉ giỏi AV là 13 và số sv k giỏi gì hết là 22
- Bài tập: Giải lại VD1, VD2 bằng cách giải ở VD3.

102

1)CT CỘNG

- *Vd4:*
- Hộp có 10 cây viết bic, trong đó có 3 cây viết xấu. Lấy ngẫu nhiên 2 cây. Tính xs lấy được ít nhất 1 cây viết tốt
- *HD:* A= bc lấy được 1 cây viết tốt
  B= bc lấy được 2 cây viết tốt
  C= bc lấy được ít nhất 1 cây viết tốt.

C=A+B? A,B xung khắc?

103

1)CT CỘNG

- Giải VD4:
- A,B xung khắc, vì ta chỉ lấy có **2** cây. Hoặc ta được 1 cây viết tốt **hoặc** ta được 2 cây viết tốt. Không thể được cả 2 trường hợp. Ta chỉ được cả 2 trường hợp khi lấy **4** cây.
- P(C)= P(A+B) = P(A)+P(B)
  = C(1,7)*C(1,3) / C(2,10) + C(2,7) / C(2,10)

104

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

ÍCH LỢI CỦA CÔNG THỨC P(A)= 1-P(A*)

VD6: Hộp có 10 bi T và 8 bi X. Lấy ngẫu nhiên ra 7 bi.

- Tính xác suất lấy được ít nhất 2 bi T?
- Giải:
- F= bc lấy được ít nhất 2 bi T
- F*= bc lấy được nhiều nhất 1 bi T
- A= bc lấy được 0 bi T (7 bi X)
- B= bc lấy được 1 bi T (6 bi X)
- P(A)= C(7,8) / C(7,18)
- P(B)= C(1,10).C(6,8) / C(7,18)
- P(F*) = P(A+B) = P(A)+P(B)
- P(F)= 1-P(F*)

105

1) CTCỘNG

- *Tổng quát:* Nắm cách ghi nha!
- * P(A+B+C)= P(A)+P(B)+P(C)
  -P(AB)-P(AC)-P(BC)
  +P(ABC)
- Nếu A,B,C xk *từng đôi* thì:
  P(A+B+C)= P(A)+P(B)+P(C)
- * P(A+B+C+D)= P(A)+P(B)+P(C)+P(D)
  -P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)
  +P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)
  -P(ABCD)
- Nếu A,B,C,D xk *từng đôi* thì:
  P(A+B+C+D)= P(A)+P(B)+P(C)+P(D)

106

- **Lưu ý:**
- Công thức cộng tổng quát từ 3 biến cố trở lên ít ai làm trực tiếp, bởi vì phải tính xác suất của nhiều số hạng. Thí dụ công thức cộng cho 4 biến cố thì có đến 15 số hạng.
- Trong thực hành người ta dùng biến cố đối lập để tính ngược lại.
- P(A+B+C+D) = 1-P([A+B+C+D]*)
  = 1-P(A*B*C*D*)
  (*công thức nhân*)

107

2)CT XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN:

- *Vd1:*
- Hộp có 5 viên bi đỏ, 7 bi trắng. Lấy *lần lượt* 2 bi (lấy không hoàn lại)
- *Biết rằng lần 1 lấy được bi T, tính xs lần 2 lấy được bi T*?
- Giải:

  Ti= bc lần i lấy được bi T , i=1,2
- Ta có thể viết lại câu hỏi như sau: *Biết rằng T1 xảy ra, tính xs T2 xảy ra*

108

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)CT XSCĐK

- Giải VD1:
- T1 xảy ra: Lần 1 lấy được bi T → hộp chỉ còn lại 11 bi (trong đó có 6 bi T) → Ở lần lấy thứ 2 (chọn 1 bi trong 11 bi) : số trường hợp đkn là 11, số trường hợp thuận lợi cho T2 là 6 → xác suất của T2 (với điều kiện T1 xảy ra) là 6/11.
- Ta viết: *P(T2/T1): xác suất của T2 với điều kiện T1 xảy ra*
- Ta có: P(T2/T1)= 6/11

109

2)CT XSCĐK

- VD2:
- Hộp có 7 bi T và 6 bi X.
- a) Lấy ngẫu nhiên 2 bi thì được 2 bi T, lấy tiếp 2 bi trong 11 bi còn lại của hộp. Tính xác suất lấy được 1 bi T và 1 bi X?
- b) Lấy ngẫu nhiên 2 bi thì được 1 bi T và 1 bi X, lấy tiếp 3 bi trong 11 bi còn lại của hộp. Tính xác suất lấy được 2 bi T và 1 bi X?

110

2)CT XSCĐK

- Giải VD2:
- a) gọi A= bc lấy được 2 bi T *lần 1*
- B= bc lấy được 1 bi T và 1 bi X *lần 2*
- P(B/A)= C(1,5)C(1,6) / C(2,11)
- b) gọi A= bc lấy được 1 bi T và 1 bi X *lần 1*
- B= bc lấy được 2 bi T và 1 bi X *lần 2*
- P(B/A)= C(2,6)C(1,5) / C(3,11)

- *Tổng quát:*
- P(A/B) : xác suất của bc A với điều kiện bc B

  B gọi là bc điều kiện, B *đã xảy ra rồi*
- Công thức: **P(A/B) = P(AB) / P(B)**

111

2)CTXSCĐK

- *Vd3:*
- Một tổ điều tra dân số vào thăm 1 gia đình có 2 con.

  a) Tính xác suất gia đình này có 2 con trai?

  b) *Biết thêm thông tin gia đình này có con trai*. Tính xs gia đình này có 2 con trai?

  c) Biết đứa con đầu lòng là trai. Tính xs gia đình này có 2 trai?

Câu hỏi:

Theo *cảm tính* bạn cho rằng câu nào có xs cao hơn?

112

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)CTXSCĐK

- Giải VD3: Với 1 gđình có 2 con, ta có 4 trường hợp xảy ra:

TT	TG	GT	GG
¼	¼	¼	¼

- a) gọi A= bc gia đình này có 2 trai
  A= TT → P(A)= P(TT)= ¼
- b) gọi B= bc gia đình này có con trai
  B= TG+GT+TT → P(B)= ¾ (A⊂B ↔ A.B = A)
  Ta có: A.B= TT.(TG+GT+TT)= TT → P(AB)= ¼
  bc B xảy ra → xs gia đình này có 2 trai là: P(A/B)
  Vậy P(A/B)= P(AB) / P(B)= ¼ / ¾ = 1/3
- Ta thấy: *Khi bc B chưa xảy ra thì xs của A là P(A)= ¼ .*
- *Tuy nhiên khi bc B xảy ra thì khả năng xảy ra của bc A tăng lên là P(A/B)= 1/3*

113

2)CTXSCĐK

- b) Cách lý luận khác: (*Dành cho Cao thủ có Nội công thâm hậu, nếu không dễ bị Tẩu hỏa nhập ma*)
- Gia đình có 2 con thì có 4 trường hợp: TT, TG, GT, GG
- Nếu đã biết thông tin gia đình này có con trai (B xảy ra) thì trường hợp GG không thể xảy ra, vậy chỉ còn 3 trường hợp có thể xảy ra (đkn) nên xs có 2 trai là P(A/B)= 1/3.
- c) Xác suất là 1/2
- VD4: Tung 1 con xúc xắc
- A= bc con xx xuất hiện mặt có số nút lớn hơn 3
- B= bc con xx xuất hiện mặt có số nút là chẵn
- Tính P(A/B) , P(B/A) ?

114

2)CTXSCĐK

- Giải:
- Tung 1 con xx thì kg mẫu Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- P(A)= 3/6 = ½
- Nếu bc B đã xảy ra thì kg mẫu thu hẹp lại:
  Ω_B= {2, 4, 6}
  P(A/B)= 2/3
- P(B/A)= 2/3
- VD5:
- Một gia đình có 3 con. Biết thông tin gia đình có 2 con trai, *đứa còn lại con gì BV cũng không biết*!
- Tính xs gia đình này có 3 trai?

115

2)CTXSCĐK

- Giải:
- Kg mẫu là:
- Ω= {GGG, GGT, GTG, TGG, GTT, TGT, TTG, TTT}
- A= bc gia đình có 3 trai
- P(A)= 1/8
- B= bc gia đình có 2 con trai (*đứa còn lại con gì BV cũng không biết*!)
- Nếu bc B đã xảy ra thì kg mẫu thu hẹp lại:
- Ω_B= {GTT, TGT, TTG, TTT}
- P(A/B)= 1/4

116

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)CTXSCĐK

- BT1:
- Một gia đình có 3 con. Biết thông tin 2 đứa con đầu là con trai, còn đứa thứ 3 *con gì BV cũng không biết*!
- Tính xs gia đình này có 3 trai?

- BT2:
- Bộ bài tây có 52 lá, rút ngẫu nhiên ra 1 lá.
- Biết rằng rút được lá màu đen, tính xs đó là lá Ách?

117

BT3: Kết quả thi môn XSTK như sau:

K.Quả / G.Tính	Đậu	Rớt
Nam	20	35
Nữ	30	15

Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp.

1) Biết rằng sv này là nữ, tính xs sv này thi đậu?

2) Biết rằng sv này thi rớt, tính xs đó là sv nam?

118

BT4: Bảng kết quả khảo sát như sau:

K.Quả / G.Tính	Giỏi Anh	Giỏi Anh và Pháp	Giỏi Pháp	Số sv không giỏi gì hết	Số sv
Nam	45	10	40	?	?
Nữ	30	5	15	10	?

Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp.

1) Biết rằng sv này là nữ, tính xs sv này giỏi Anh?

2) Biết rằng sv này *chỉ* giỏi Anh, tính xs đó là sv nam?

119

2)CTXSCĐK

- VD7:
- Hộp có 10 bi T và 7 bi X. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp.
- 1) Biết rằng lần 1 lấy được bi X, tính xs lần 2 lấy được bi X?
- 2) Biết rằng lần 2 lấy được bi X, tính xs lần 1 lấy được bi X?
- HD:
- 1) P(X2/X1) = 6/16

120

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

2)CTXSCĐK

- ĐS:
- 2) P(X1/X2)= 21/56 ?

- Câu này *cực khó* để *lý luận trực tiếp* hoặc dùng chiêu "*công thức xác suất có điều kiện*" như các VD trên, may ra chỉ có các bậc *Nhất đại tôn sư Võ lâm* mới làm được! Còn những *Tiểu tốt giang hồ* như Chúng ta thì đành *botay.com*, chúng ta phải luyện thêm tuyệt chiêu danh trấn giang hồ "*công thức xác suất đầy đủ*" và "*công thức Bayes*" thì mới mong chế ngự được "*Câu hỏi ngược*" bá đạo trên!

121

3) CT NHÂN
3.1) BIẾN CỐ ĐỘC LẬP:

- Bc A độc lập đối với bc B **nếu** bc B xảy ra hay không xảy ra *không* ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của A, nghĩa là P(A/B) = P(A)
- Nếu A độc lập đv B thì B cũng độc lập đv A, nghĩa là P(B/A) = P(B). Lúc đó ta nói A,B độc lập đối với nhau.

- *Vd1:* Xét lại ví dụ 3 mục 2 (gia đình có 2 con)
- Ta có P(A/B) = 1/3 ≠ ¼ = P(A) nên A,B không độc lập

122

3.1)BC ĐỘC LẬP

- *Vd2:*
- Tung 1 đồng xu sấp ngữa 2 lần.

  A= bc được mặt sấp lần *thứ nhất*

  B= bc được mặt sấp lần *thứ hai*

  Xét xem A, B có độc lập?

123

3.1)BC ĐỘC LẬP

- *Giải:*
- Ω= {S_1S_2, S_1N_2, N_1S_2, N_1N_2}

  A= S_1S_2+S_1N_2 = S_1

  B= S_1S_2+N_1S_2 = S_2

  P(A/B)= ½ = P(A)

  Vậy A, B độc lập

124

3.1)BC ĐỘC LẬP

- VD3: Tung 1 con xúc xắc
- A= bc con xx xuất hiện mặt có số nút lớn hơn 3
- B= bc con xx xuất hiện mặt có số nút là chẳn

- P(A/B)= 2/3 ≠ ½ = P(A) nên A, B không độc lập

- VD4: Tung 1 con xúc xắc
- A= bc con xx xuất hiện mặt có số nút lớn hơn 4
- B= bc con xx xuất hiện mặt có số nút là chẳn

- P(A/B)= 1/3 = P(A) nên A, B độc lập

125

3.1)BC ĐỘC LẬP

- *Vd5:*
- Tung đồng thời 2 con xúc xắc.

A= bc con xx *thứ nhất* xuất hiện mặt có số nút là1
B= bc con xx *thứ hai* xuất hiện mặt có số nút lẻ.

Xét xem A, B có độc lập?

126

3.1)BC ĐỘC LẬP

- **Lưu ý:** Trong thực tế ta khó có thể dùng công thức P(A/B) = P(A) để xác định A,B độc lập *(một cách chặt chẽ)* cho mọi bài toán.
- Chủ yếu dựa vào giả thiết bài toán và suy luận: nếu khả năng xảy ra của bc A *không* phụ thuộc vào bc B (không bị ảnh hưởng bởi bc B) thì ta nói A độc lập đối với B.
- *Muốn có "linh cảm" tốt thì làm nhiều bài tập!!!*

- Nhận xét:
- Nếu A, B độc lập thì A, B* ; A*, B ; A*, B* cũng độc lập.

127

3.2)CÔNG THỨC NHÂN:

- **P(AB) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)**
- Nếu **A,B độc lập** thì:

P(A/B) = P(A) → **P(AB) = P(A).P(B)**

Nhận xét: A, B độc lập ⇔ P(A.B) = P(A).P(B)
Câu hỏi: *CT nhân* và *CT xs có điều kiện* có liên quan?

1) Câu hỏi lớn:
Cái khó nhất khi áp dụng công thức nhân là gì?
2) **Câu hỏi hơi lớn**:
Khi nào thì ta xét *bc điều kiện* là bc A hoặc bc B?

128

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3.2)CT NHÂN

- Trả lời:
- 1) Là xác định xem A,B có độc lập không
- 2) Nếu ta dễ tính P(A/B) hơn là P(B/A) thì ta nên chọn bc điều kiện là B.

VD1: Hộp có 4 bi T, 3 bi X. Lấy lần lượt 2 bi.
đặt Ti= bc lần i lấy được bi T, i=1,2
Tính xác suất lấy được 2 bi T?

HD: Ta thấy P(T2/T1) dễ tính hơn P(T1/T2)
Do đó: P(T2.T1) = P(T2/T1).P(T1)
= (3/6).(4/7) = 2/7

129

CÁCH XỬ LÝ CÁC DẤU TRONG CÔNG THỨC XÁC SUẤT

Để biểu diễn quan hệ giữa các biến cố ta dùng 3 dấu: **+** (hoặc), **.** (và), * (đối lập)

Lưu ý:

A⊂B ↔ A.B = A ↔ A+B = B

Trật tự xử lý các dấu như thế nào?

130

CÁCH XỬ LÝ CÁC DẤU TRONG CÔNG THỨC XÁC SUẤT

- VD 2:
- Có hai người A và B đi *thi hết môn* với xác suất thi đậu lần lượt là 0,7 và 0,8. Tính xs chỉ có 1 người thi đậu?
- Giải:
- Gọi A là biến cố người A thi đậu
- Gọi B là biến cố người B thi đậu
- Gọi F là biến cố chỉ có 1 người thi đậu
- P(F)= P(A.B*+A*.B)= P(A.B*)+P(A*.B)
= P(A).P(B*)+P(A*).P(B)= P(A).[1-P(B)]+[1-P(A)].P(B)
= 0,7 . (1-0,8) + (1-0,7) . 0,8

131

3.2) CÔNG THỨC NHÂN

- VD3:
- Hộp có 4 bi T và 5 bi X. Lấy NN 2 bi từ hộp. Rồi lấy tiếp 2 bi từ 7 bi còn lại. Tính xác suất lấy được 3 bi T và 1 bi X trong 4 bi lấy ra?
- Giải:
- Ai= bc lấy được i bi T ở *lần 1,* i=0,1,2
- Bi= bc lấy được i bi T ở *lần 2,* i=0,1,2
- F= bc lấy được 3 bi T và 1 bi X trong 4 bi lấy ra
- P(F)= P(A2B1+A1B2) = P(B1/A2)P(A2)+P(B2/A1)P(A1)
- = C(1,2)C(1,5)/C(2,7) * C(2,4)/C(2,9)
- + C(2,3)/C(2,7) * C(1,4)C(1,5)/C(2,9)

132

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3.2) CÔNG THỨC NHÂN

- VD4:
- Hộp 1 có 5 bi T và 3 bi X. Hộp 2 có 6 bi T và 4 bi X. Lấy NN từ hộp 1 ra **2** bi, và lấy NN từ hộp 2 ra **1** bi. Tính xác suất lấy được 2 bi T và 1 bi X trong 3 bi lấy ra.
- Giải:
- Ai= bc lấy được i bi T từ hộp 1, i=0,1,2
- Bi= bc lấy được i bi T từ hộp 2, i=0,1
- F= bc lấy được 2 bi T và 1 bi X trong 3 bi lấy ra
- P(F)= P(A2B0+A1B1) = P(A2)P(B0)+P(A1)P(B1)
- = C(2,5)/C(2,8) * 4/10 + C(1,5)*C(1,3)/C(2,8) * 6/10

133

3.2) CT NHÂN

- VD5:
- Có 2 người A và B với khả năng *thi cuối kỳ* đậu môn XSTK lần lượt là 60%, 80%. Khả năng thi đậu của A và B là độc lập nhau.
- Biết rằng có ít nhất 1 người thi đậu, hãy tính xác suất người A thi đậu?

134

- Giải VD5:
- Đặt các biến cố sau:
- A= bc người A thi đậu
- B= bc người B thi đậu
- C= bc có ít nhất 1 người thi đậu
- C= A+B (Lý luận khác: A⊂C nên A.C=A)
- AC= A(A+B)= A+AB= A.Ω+AB= A(Ω+B)= A.Ω= A
- Suy ra: P(AC)= P(A)= 0,6
- P(C)= P(A+B)= P(A)+P(B)-P(AB)
- = P(A)+P(B)-P(A)P(B)= 0,6+0,8-0,6*0,8
- Hoặc P(C)= P(A+B)= 1-P(A*B*)= 1-P(A*).P(B*)
- Vậy P(A/C) = P(AC) / P(C) = P(A) / P(C)

135

3.2)CT NHÂN

- **Lưu ý:**
- Tính xung khắc và tính độc lập của 2 bc A,B.
- A.B= ϕ (A,B xung khắc) → P(A.B) = P(ϕ) = 0
- P(A) > 0, P(B) > 0
- Vậy P(A.B) ≠ P(A).P(B)
- A,B xung khắc → A, B không độc lập

136

3.2)CT NHÂN

- * Nhóm 3 biến cố độc lập từng đôi:
- A,B,C độc lập từng đôi **nếu** A,B đl ; A,C đl ; B,C đl

- * Nhóm 3 biến cố độc lập toàn thể:
- A,B,C độc lập tt **nếu** A,B đl ; A,C đl ; B,C đl
  và A,BC đl ; B,AC đl ; C,AB đl
- Hay:
  P(AB)= P(A)P(B) ; P(AC)= P(A)P(C) ; P(BC)= P(B)P(C)
  P(ABC)= P(A)P(B)P(C)

137

Quy ước (sách Luyện thi CH): nhóm biến cố độc lập

3.2)CT NHÂN

- * Nhóm n bc độc lập (toàn thể):
  Nhóm biến cố A1,...,An độc lập (toàn thể) **nếu** *mỗi* biến cố *bất kỳ* trong nhóm độc lập đối với *một tích bất kỳ* các biến cố còn lại

- **Nhận xét:**
- Độc lập (toàn thể) → độc lập từng đôi

138

VD1: ĐỘC LẬP TOÀN THỂ

- Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
- A= {1, 2, 3, 5} → P(A)= 4/8 = ½
- B= {1, 2, 4, 6} → P(B)= ½
- C= {1, 3, 4, 7} → P(C)= ½

- AB= {1, 2} → P(AB)= 2/8 = ¼
- AC= {1, 3} → P(AC)= ¼
- BC= {1,4} → P(BC)= ¼
- ABC= {1} → P(ABC)= 1/8
- Ta có: P(AB)= P(A).P(B) ; P(AC)= P(A).P(C) ; P(BC)= P(B).P(C) nên A, B, C độc lập từng đôi
- Ta có: P(ABC)= P(A).P(B).P(C) nên A, B, C độc lập toàn thể

139

- BT1:
- Tung 1 đồng xu Sấp Ngữa 3 lần.
- A= bc lần 1 được mặt S
- B= bc lần 2 được mặt S
- C= bc lần 3 được mặt S

- A, B, C độc lập toàn thể?
- HD:
- Xác định kg mẫu Ω
- Đánh số các biến cố sơ cấp
- Ta sẽ quay về VD1

140

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3.2)CT NHÂN (ĐỘC LẬP TT)

- *Vd2:* Quan sát 1 gia đình có 2 con
  A= bc sinh con trai lần I, A= TT+TG
  B= bc sinh con trai lần II, B= TT+GT
  C= bc chỉ có 1 lần sinh con trai, C= TG+GT.
- Xét xem A,B,C có độc lập (toàn thể)?
- *HD:* *) P(AB) = P(TT)= ¼ = P(A)P(B)= ½ . ½
  P(AC) = P(TG) = ¼ = P(A)P(C) = ½ . ½
  P(BC) = P(GT)= ¼ = P(B)P(C) = ½ . ½
  → A,B,C độc lập từng đôi
- *) ABC= Φ → P(ABC) = 0 ≠ 1/8 = P(A)P(B)P(C)
  → A,B,C không độc lập toàn thể

141

32)CT NHÂN

- *Vd3:*
- Tung 3 lần 1 con xúc xắc.
- Ai= bc lần tung i xuất hiện mặt có số nút chẵn, i=1,3
- Ta có: A1, A2, A3 độc lập toàn thể

- Chủ yếu dựa vào giả thiết bài toán và suy luận.
- *Muốn có "linh cảm" tốt thì làm nhiều bài tập!!!*

- Bài này muốn chứng minh chặt chẽ thì không gian mẫu có $6^3 = 216$ trường hợp.

142

3.2)CT NHÂN

- *Tổng quát:*
- * P(ABC) = P(A/BC).P(BC)
  = P(A/BC).P(B/C).P(C)
- Nếu A,B,C độc lập toàn thể thì
  P(ABC)= P(A).P(B).P(C)
- * P(ABCD)= P(A/BCD).P(BCD)
  = P(A/BCD).P(B/CD).P(CD)
  = P(A/BCD).P(B/CD).P(C/D).P(D)
- Nếu A,B,C,D độc lập toàn thể thì
  P(ABCD)= P(A).P(B).P(C).P(D)

143

- Câu hỏi: Nắm cách ghi CT nhân chưa?

BT3:

- Nếu A, B, C độc lập toàn thể thì A*, B*, C* cũng độc lập toàn thể?
- HD:
- 1) A, B độc lập thì A, B* ; A*, B ; A*, B* cũng độc lập
- 2) A, B, C độc lập toàn thể thì A, B+C độc lập
- 3) A*, (B+C)* độc lập

144

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

ÍCH LỢI CỦA CÔNG THỨC P(A)= 1-P(A*)

- VD4: Có 4 sinh viên *thi hết môn* với xác suất thi đậu lần lượt là 0,5 và 0,7 và 0,8 và 0,9.
- a) Tính xác suất có ít nhất 1 người thi rớt?
- b) Tính xác suất có ít nhất 1 người thi đậu?
- c) Tính xác suất có nhiều nhất 3 người thi đậu?
- Giải:
- a) Ai= bc người thứ i thi đậu
- F= bc có ít nhất 1 người thi rớt
- F*= bc có 0 người thi rớt (tất cả đều thi đậu)
- $P(F^*)= P(A_1A_2A_3A_4)= P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4)$
- b) K= bc có ít nhất 1 người thi đậu
- K*= bc có 0 người thi đậu (tất cả đều thi rớt)
- $P(K^*)= P(A_1^*A_2^*A_3^*A_4^*)= P(A_1^*).P(A_2^*).P(A_3^*).P(A_4^*)$
- c) L= bc có nhiều nhất 3 người thi đậu. P(L*)= P(F*)

145

5)CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ:

Xét 1 phép thử T. Giả sử *A1,...,An là 1 nhóm các bc đầy đủ (và xktđ)*
F là 1 biến cố liên quan tới phép thử T *(khi bc F xảy ra thì chỉ có 1 bc Ai cùng xảy ra)*
Cho biết các xác suất *P(Ai) , P(F/Ai)*

Tính P(F)?
P(F)= P(F/A1)P(A1)+.... +P(F/An)P(An)

146

5)CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ:

- Câu hỏi lớn:
  Khó khăn khi áp dụng công thức xsđđ là gì?

- Gợi ý:
  Ta nên phân chia các trường hợp Ai sao cho *dễ tính xác suất* P(Ai) và P(F/Ai)

147

5)CTXSĐĐ

Vd1:
Hộp có 5 bi T, 4 bi X. Lấy lần lượt 2 bi (lấy ngẫu nhiên không hoàn lại)
Tính xác suất lần 2 lấy được bi X?
HD:
Ta thấy khả năng lấy được bi X ở lần 2 phụ thuộc vào lần 1: lấy được bi X hay bi T → có 2 trường hợp xảy ra → ta có nhóm gồm 2 bc , xét xem chúng có đầy đủ và xung khắc ?

148

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

5)CTXSĐĐ

VD1:

* F= bc lần 2 lấy được bi X
  A1= bc lần 1 lấy được bi T
  A2= bc lần 1 lấy được bi X

A1,A2 là nhóm bc đđ và xk

* P(A1)= 5/9 , P(A2)= 4/9
* P(F/A1)= 4/8 , P(F/A2)= 3/8

P(F)= P(F/A1)P(A1)+P(F/A2)P(A2)
= (4/8).(5/9)+ (3/8).(4/9) = 4/9

149

5)CTXSĐĐ

- *Vd2:*
- Xí nghiệp bút bi Thiên long có 3 phân xưởng sản xuất.
- PX1: sản xuất 50% sp của toàn XN ; PX2: sản xuất 30% ; PX3: sản xuất 20% (*1 cây viết chỉ do 1 phân xưởng sản xuất*)
- Tỷ lệ phế phẩm tính trên số sp do từng PX sản xuất là: 1%, 2%, 3%
- Một sinh viên mua 1 cây bút bi Thiên long. Tính xác suất mua phải cây viết xấu?

150

5)CTXSĐĐ

- *HDVD2: Cây viết xấu có thể do: PXI sx, PXII sx, PXIII sx → có 3 trường hợp xảy ra → ta có nhóm gồm 3 bc , xét xem chúng có đầy đủ và xung khắc từng đôi?*
- *Đặt Ai= bc cây viết do PXi sản xuất, i=1,3
- F= bc mua phải cây viết xấu
- A1,A2,A3 tạo thành nhóm bc đđ và xktđ
- *P(A1)= 0,5 P(A2)= 0,3 P(A3)= 0,2
- *P(F/A1)= 0,01 P(F/A2)= 0,02 P(F/A3)= 0,03

- P(F)= P(F/A1)P(A1)+ P(F/A2)P(A2)+ P(F/A3)P(A3)
- = 0,017= 1,7%
- Vậy xác suất mua phải 1 cây viết xấu là 1,7%

151

5)CTXSĐĐ

- Câu hỏi ngược:
- Biết rằng mua phải cây viết xấu, tính xs cây viết này do PXI sản suất?

- Giải:
- P(A1/F)= P(FA1) / P(F)= P(F/A1)P(A1) / P(F)
  = 0,01*0,5 / 0,017 = 0,294

152

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

5)CTXSĐĐ

- Ta thấy: Trước khi mua cây viết thì xs cây viết do PXI sản xuất là 0,5 (P(A1)= 0,5) , nhưng khi bc F xảy ra (mua phải cây viết xấu) thì khả năng cây viết do PXI sản xuất giảm đi (P(A1/F)= 0,294).
- * Trước khi thực hiện thí nghiệm (mua 1 cây viết, xem tốt hay xấu) ta tính trước rằng : xs cây viết do PXI sx là P(A1)= 0,5 , gọi là xác suất tiền/ tiên nghiệm
- * Sau khi thực hiện thí nghiệm , bc F xảy ra → ta có xs cây viết do PXI sx là P(A1/F)= 0,294 , gọi là xác suất hậu nghiệm
- P(Ai/F) = ? Gọi là công thức Bayes.

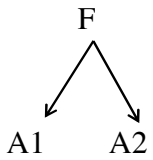
153

5)CTXSĐĐ

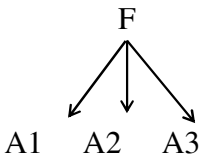
Nhận xét:

Thường ta dùng sơ đồ để biểu diễn các trường hợp (bcsc) của ctxsđđ như sau:

VD1



VD2



154

6)Công thức Bayes:

- Lấy lại giả thiết trong công thức xs đầy đủ
- Tính xác suất của bc Ai với điều kiện bc F đã xảy ra:
- P(Ai/F)= P(FAi) / P(F)= P(F/Ai)P(Ai) / P(F)
- Lưu ý:
- Nên tính P(F) trước khi tính P(Ai/F)

155

6)CTBAYES

- *Vd0:*
- Có 3 hộp phấn, mỗi hộp có 10 viên phấn. Hộp thứ 1 có 6 viên phấn T. Hộp thứ 2 có 8 viên phấn T. Hộp thứ 3 có 7 viên phấn T. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp (trong 3 hộp), rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 viên phấn ra xem màu.
- 1) Tính xs lấy được viên phấn T?
- 2) Biết rằng viên phấn lấy ra là viên phấn T, tính xs viên phấn này thuộc hộp thứ 2?

156

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

6)CTBAYES

- HD VD0:

Viên phấn lấy ra xem màu có thể thuộc hộp thứ 1 hoặc thứ 2 hoặc thứ 3 → có 3 trường hợp có thể xảy ra

- 1) F= bc lấy được viên phấn T

Hi= bc lấy được hộp ***thứ*** i

P(F)= P(F/H1)P(H1)+P(F/H2)P(H2)+P(F/H3)P(H3)

= (6/10)(1/3)+(8/10)(1/3)+(7/10)(1/3) = 21/30 = 0,7

- 2) P(H2/F)= P(H2.F) / P(F) = P(F/H2)P(H2) / P(F)

= (8/10)(1/3) / (21/30) = 8/21

157

6)CTBAYES

- *Vd1:*
- Có 2 hộp phấn loại I, 1 hộp phấn loại II. Hộp loại I có 8 viên phấn T, 2 viên phấn X; hộp loại II có 9 viên phấn T, 1 viên phấn X. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp (trong 3 hộp), rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 viên phấn ra xem màu.
- 1) Tính xs lấy được viên phấn T?
- 2) Tính xs viên phấn lấy ra thuộc hộp loại I, biết rằng nó là viên phấn T?

158

6)CTBAYES

- *HDVd1:*

1) Viên phấn lấy ra xem màu có thể thuộc: hộp loại I hoặc hộp loại II → có 2 trường hợp xảy ra

* F= bc lấy được viên phấn T

Hi= bc lấy được hộp ***loại*** i, i=1,2

* P(F)= P(F/H1)P(H1)+P(F/H2)P(H2)

= (8/10)(2/3)+ (9/10)(1/3) = 5/6

2) P(H1/F)= P(FH1) / P(F)= P(F/H1)P(H1) / P(F)

= (8/10)(2/3) / (5/6) = 48/75

159

PHÂN BIỆT CT XS CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ CT BAYES

- VD2: Có 3 người đi *thi cuối kỳ* với xác suất thi đậu của từng người lần lượt là 0,7 ; 0,6 ; 0,8.
- 1) Tính xác suất chỉ có 1 người thi đậu?
- 2) Tính xác suất chỉ có 2 người thi đậu?
- 3) Biết rằng chỉ có 1 người TĐ, hãy tính xs đó là người thứ nhất?
- Giải:
- 1) Gọi Ai là biến cố người thứ i thi đậu
- F= bc chỉ có 1 người thi đậu
- $P(F)= P(A_1A_2^*A_3^*+A_1^*A_2A_3^*+A_1^*A_2^*A_3)$
- $= P(A_1)P(A_2^*)P(A_3^*)+P(A_1^*)P(A_2)P(A_3^*)+P(A_1^*)P(A_2^*)P(A_3)$
- 2) K= bc chỉ có 2 người thi đậu
- $P(K)= P(A_1A_2A_3^*+A_1A_2^*A_3+A_1^*A_2A_3)$
- 3) $P(A_1/F) = P(A_1F) / P(F) =$ $\mathbf{P(A_1A_2^*A_3^*)}$ / P(F)

160

Bình loạn: Qua công thức xsđđ và Bayes bạn có cảm thấy sự "vô thường" của cuộc đời! Trong cuộc đời, ai cũng đã từng ít nhất 1 lần thốt lên câu: "*giá như*..."! Thí dụ: "*giá như* biết lấy chồng được sung sướng thì tôi đã lấy chồng sớm rồi", "*giá như* biết lấy vợ sẽ chịu đau khổ thì tôi đã không lấy rồi", "*giá như* tôi chăm học thêm tý nữa thì tôi đã thi đậu rồi",... Giả sử trước khi lấy vợ bạn ước tính xác suất bạn sẽ bị đau khổ là P(A)= 50%; và sau khi bạn lấy vợ, một người vợ được mọi người cho là "*hiện đại*", bạn tính được xác suất bạn bị đau khổ là P(A/F)= 80%. Lúc đó bạn *mong ước* phải chi F đừng xảy ra, nhưng bạn chỉ biết F xảy ra khi bạn đã thực hiện "phép thử" lấy vợ. Đây là 1 phép thử mà bạn chỉ thực hiện 1 lần là "quá đủ"!

161

7)NGUYÊN LÝ BIẾN CỐ HIẾM

- Một biến cố A có xác suất P(A) nhỏ thì khi thực hiện **1** phép thử *ta xem như* nó không xảy ra. Ta gọi A là biến cố hiếm.
- Vậy P(A) bằng bao nhiêu là nhỏ? Tùy theo thực tế, tùy theo từng người mà P(A) được xem là nhỏ hay không.
- *Thí dụ*: Nếu bạn yêu 1 người mà người đó hầu như không yêu bạn, bạn chỉ có $1/10^6$ hy vọng là người đó yêu bạn. Với hy vọng đó thì bạn có thể chờ đợi cả đời (từ lúc tóc đen, da mịn cho đến lúc tóc bạc, da nhăn). Thậm chí trước khi chết bạn chỉ cần người đó nói 1 câu yêu bạn thì bạn đã mãn nguyện xuống suối vàng rùi (Y như phim!) Vậy thì $1/10^6$ không nhỏ chút nào hết!

162

MỘT SỐ LƯU Ý

- 1) A,B xung khắc $\rightarrow$ P([A+B]/C) = P(A/C)+P(B/C)
- 2) P(A*/B) = 1-P(A/B) ; P(A/ B*) $\neq$ 1-P(A/B)
- 3) A,B xung khắc $\rightarrow$ P(C/A*B) = P(C/B)

- 4) A,B độc lập $\not\Rightarrow$ A, BC độc lập
- 5) A,B độc lập ; A,C độc lập $\not\Rightarrow$ A, BC độc lập
- 6) A,B độc lập $\not\Rightarrow$ P([AB]/C) = P(A/C).P(B/C)
- 7) A,C độc lập $\not\Rightarrow$ P(A/BC) = P(A/B)

- BT: Cho VD minh họa các điều 4-7

163

BÀI TẬP 1:

- Ta có biến cố A, B bất kỳ ; C thỏa P(C)>0
- "Nếu A, B độc lập $\rightarrow$ P([AB]/C) = P(A/C). P(B/C)"

- Điều này đúng hay sai?

164

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

- Giải:
- Xét Ω= {1,2,3,4}
- A= {1,2} B= {1,3}, C= {1,4}
- P(A)= 2/4 , P(B)= 2/4 , P(AB)= P({1})= ¼
- Vậy: P(AB) = P(A).P(B) nên A, B độc lập.
- P(AB/C)= P(ABC) /P(C) = (1/4) / (2/4) = **1/2**
- P(A/C) = P(AC) / P(C)= (¼) / (2/4) = ½
- P(B/C) = P(BC) / P(C)= (¼) / (2/4) = ½
- P(A/C).P(B/C) = (½).(½) = **1/4**
- Vậy P(AB/C) ≠ P(A/C).P(B/C)

165

- Vậy điều kiện gì thì dấu "=" xảy ra?

- Bài tập 2:
- A1, A2 là họ biến cố đầy đủ và xung khắc
- C là biến cố bất kỳ, P(B)>0
- Ta có 2 công thức sau:
- P(C)= P(A1/B)P(C/A1B)+P(A2/B)P(C/A2B)
- P(C/B)= P(A1/B)P(C/A1B)+P(A2/B)P(C/A2B)
- 1) Theo bạn thì công thức nào đúng?
- 2) Hãy chứng minh công thức đúng 1 cách "đường đường, chính chính", nghĩa là đúng cho biến cố bất kỳ chứ hổng phải chỉ đúng qua 1 thí dụ cá biệt?

166

- Giải:
- 1) Ω= {1,2,3,4,5,6}
- A1= {1,2} , A2= {3,4,5,6}, B= {2,3,4}, C= {2}
- P(C)= **1/6**
- P(A1/B)= P(A1B) / P(B)= (1/6) / (3/6)= 1/3
- P(A2/B)= P(A2B) / P(B)= (2/6) / (3/6)= 2/3
- P(C/A1B)= P(CA1B) / P(A1B)= (1/6) / (1/6)= 1
- P(C/A2B)= P(CA2B) / P(A2B)= 0 / (2/6)= 0
- Ta có: P(A1/B)P(C/A1B)+P(A2/B)P(C/A2B)
- = (1/3)(1)+(2/3)(0)= **1/3**
- P(C/B)= P(CB)/P(B)= (1/6) / (3/6)= **1/3**
- 2) Bạn hãy tự chứng minh, đây là 1 bài tập rất thi vị!

167

TÓM LẠI:

- Ta có định nghĩa xác suất của biến cố theo cổ điển
- Các công thức tính xác suất:
  - Công thức cộng
  - Công thức xác suất có điều kiện
  - Công thức nhân
  - Công thức xác suất đầy đủ
  - Công thức Bayes

168

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

- Tuy nhiên trong bài tập người ta không nỡ để các dạng toán này một cách "cô đơn, buồn chán". Thường người ta "hợp hôn" nhiều công thức tính xác suất trong một bài toán. Điều này đòi hỏi ta phải biết phân biệt khi nào thì nên dùng công thức nào, cách kết hợp các công thức này như thế nào, ... và còn hơn thế nữa!
- Sự "hợp hôn" này có "hoàn hảo" hay không là do ta có "khéo tay hay làm" không!

169

BÀI TẬP

- **Bài tập 1:**
- Hộp có 4 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng. Lấy ra 2 bi từ hộp.
- Tính xs lấy được 2 bi T trong 3 cách lấy sau:
- a) C1: Lấy ngẫu nhiên 2 bi (lấy 1 lần 2 bi)
- b) C2: Lấy lần lượt 2 bi (không hoàn lại)
- c) C3: Lấy có hoàn lại 2 bi

170

HDBT1:

- A= bc lấy được 2 bi T
- a) P(A)= C(2,3) / C(2,7)= 3/21
- b) P(A)= P(T1.T2) = P(T2/T1)P(T1) = (3/7).(2/6)
- = 6/42 = 3/21
- c) Do chọn có hoàn lại nên ở lần chọn thứ 2 ta cũng có giả thiết y như ở lần chọn 1 (Hộp có 7 bi , có 4 bi đỏ, 3 bi trắng) → T1 và T2 độc lập
- P(A)= P(T1.T2) = P(T1).P(T2) = (3/7).(3/7)= 9/49
- Nhận xét: câu a và b có xác suất bằng nhau.

171

BT1: TÍNH XS LẤY ĐƯỢC 2 BI TRẮNG?

Lấy n bi trong N bi	Cách 2	Cách 3	Sai số
Lấy 2 bi trong 7 bi, trong 7 bi có 3 bi T	0.142857	0.183673	-0.040816
Lấy 2 bi trong 70 bi, trong 70 bi có 30 bi T	0.180124	0.183673	-0.003549
Lấy 2 bi trong 700 bi, trong 700 bi có 300 bi T	0.183323	0.183673	-0.000350
Lấy 2 bi trong 7000 bi, trong 7000 bi có 3000 bi T	0.183638	0.183673	-0.000035

172

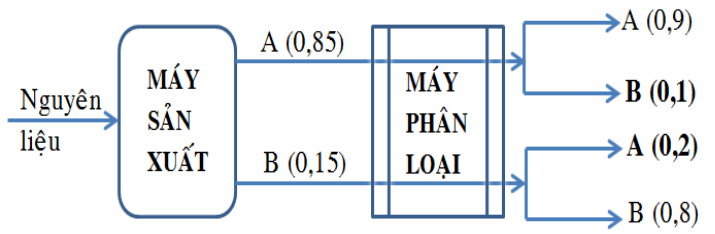
ỨNG DỤNG NHẬN XÉT BÀI TẬP 1

- Hộp có 5 bi T, 3 bi X, 4 bi V. Lấy *lần lượt* 4 bi từ hộp. Tính xác suất lấy được 2 bi T, 1 bi X và 1 bi V.
- Đáp số:

  8/33

173

BT3:



- *Máy tự động sản xuất* ra sản phẩm có tỷ lệ sản phẩm loại A là 85%, tỷ lệ sản phẩm loại B là 15%. Sản phẩm sản xuất ra đi qua *máy phân loại* (PL) tự động, máy PL *nhận đúng* sản phẩm loại A với tỷ lệ 90%, *nhận đúng* sản phẩm loại B với tỷ lệ 80%.

174

BT3:

- 1) Tính xác suất 1 sản phẩm đi qua máy PL thì bị nhận nhầm?
- 2a) Biết rằng máy PL kết luận 1 sản phẩm là loại A, tính xác suất nó đúng là loại A?
- 2b) Biết rằng máy PL kết luận 1 sản phẩm là loại A, tính xác suất nó là loại B?
- 3a) Biết rằng máy PL kết luận 1 sản phẩm là loại B, tính xác suất nó đúng là loại B?
- 3b) Biết rằng máy PL kết luận 1 sản phẩm là loại B, tính xác suất nó là loại A?

175

- GIẢI: A= biến cố sản phẩm sản xuất ra là loại A
- B= biến cố sản phẩm sản xuất ra là loại B
- 1) F= biến cố sản phẩm bị máy PL nhận nhầm
- $P(F)= P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)$
- $= (0,1)(0,85)+(0,2)(0,15)$
- 2a) F= bc sản phẩm được máy PL kết luận là loại A
- $P(F)= P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)$
- $= (0,9)(0,85)+(0,2)(0,15)$
- $P(A/F)= P(F/A)P(A) / P(F)$

176

GIẢI:

- 2b) P(B/F)= P(F/B)P(B) / P(F)
- 3a) F= bc sản phẩm được máy PL kết luận là loại B
- P(F)= P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)
- = (0,1)(0,85)+(0,8)(0,15)
- P(B/F)= P(F/B)P(B) / P(F)
- 3b) P(A/F)= P(F/A)P(A) / P(F)

177

- Quy ước: Quyển (*) là quyển:
- BÀI TẬP XSTK, ThS. Lê Khánh Luận & GVC. Nguyễn Thanh Sơn & ThS. Phạm Trí Cao, NXB ĐHQG TP.HCM 2013.
- Xem thêm 1 số dạng bài tập về xác suất của biến cố ở quyển (*).

❖https://sites.google.com/a/ueh.edu.vn/phamtricao/
❖https://sites.google.com/site/phamtricao/

178

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt