CHƯƠNG 1

I) QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1) Biến cố A gọi là ***kéo theo*** (con / suy ra) biến cố B *nếu* A xảy ra thì dẫn đến B xảy ra (khi thực hiện phép thử)

Ký hiệu: $A \subset B$ hay $A \Rightarrow B$

***Lưu ý*:**

Nếu $A \subset B$ thì $A.B = A$

Nếu $A \subset B$ thì $A+B = B$

VD:

$A.(A+B) = A$

2) Hai biến cố A, B gọi là ***bằng nhau*** (tương đương) *nếu* $A \subset B$ và $B \subset A$

Ký hiệu: $A = B$ hay $A \Leftrightarrow B$

VD 1:

Xét gia đình có 2 con

A = biến cố gia đình này có ít nhất 1 trai

B = biến cố gia đình này có nhiều nhất 1 gái

VD 2:

Trường đại học AYE dạy 2 ngoại ngữ là AV và PV

Gặp ngẫu nhiên 1 sinh viên của trường

A = biến cố sinh viên này giỏi AV

B = biến cố sinh viên này giỏi PV

C = biến cố sinh viên này giỏi cả 2 ngoại ngữ

$C = A.B$

3) ***Tổng*** (hợp) của 2 biến cố A, B xảy ra *khi* có ít nhất 1 biến cố thành phần xảy ra

Ký hiệu: A+B hay A∪B

Tính giao hoán: A+B = B+A

***<u>Lưu ý</u>*:**

$A.\overline{B}+\overline{A}.B+A.B=A+B$; $A.\overline{B}+\overline{A}.B+\overline{A}.\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$

<u>VD</u>:

A = biến cố người A thi đậu

B = biến cố người B thi đậu

$A+B$: có ít nhất 1 người thi đậu

$\overline{A}+\overline{B}$: có ít nhất 1 người thi rớt

4) ***Tích*** (giao) của 2 biến cố A, B xảy ra *khi* cả 2 biến cố thành phần cùng xảy ra

Ký hiệu: A.B hay A∩B

Tính giao hoán: A.B = B.A

<u>VD</u>:

A = biến cố người A thi đậu

B = biến cố người B thi đậu

$A.B$: cả 2 người cùng thi đậu

$\overline{A}.\overline{B}$: cả 2 người cùng thi rớt

$A.B+\overline{A}.\overline{B}$: cả 2 người có cùng kết quả thi

5) Hai biến cố A, B gọi là ***xung khắc*** *nếu* A, B không đồng thời xảy ra khi thực hiện phép thử

Ký hiệu: A.B = ϕ

***Lưu ý*:**

A, B cùng *không xảy ra* vẫn được

VD:

1) Lấy *lần lượt* 2 sản phẩm từ hộp có 7 sản phẩm tốt, 5 sản phẩm xấu

A_1 là biến cố sản phẩm lấy lần thứ nhất là tốt

A_2 là biến cố sản phẩm lấy lần thứ hai là tốt

A_1, A_2 không xung khắc

2) Lấy *lần lượt* 2 sản phẩm từ hộp có 7 sản phẩm tốt, 5 sản phẩm xấu

A_1 là biến cố có 1 sản phẩm tốt

A_2 là biến cố có 2 sản phẩm tốt

A_1, A_2 xung khắc

6) Nhóm biến cố $A_1,\ldots, A_n$ gọi là ***xung khắc từng đôi*** *nếu* lấy bất kỳ 2 biến cố trong nhóm ra tạo thành 1 đôi thì đôi này xung khắc

VD 1:

Một gia đình có 2 con

A= bc gia đình có 2 gái

B= bc gia đình có 1 trai

C= bc gia đình có 2 trai

VD 2:

Hộp có 9 bi T và 6 bi X. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi

A= bc lấy được 2 bi X

B= bc lấy được 1 bi T

C= bc lấy được 2 bi T

7) Hai biến cố A, B gọi là ***đối lập*** *nếu* A, B xung khắc *<u>và</u>* tổng 2 biến cố này bằng biến cố chắc chắn Ω

Ký hiệu: $\overline{A}$ hay A* là đối lập của biến cố A

***<u>Lưu ý</u>*:**

Bắt buộc 1 trong 2 biến cố A hoặc B phải xảy ra khi thực hiện phép thử

<u>VD</u>:

Hộp có 7 bi T và 6 bi X. Lấy ngẫu nhiên 5 bi từ hộp

A= bc lấy được ít nhất 2 bi T

B= bc lấy được ít nhất 4 bi X

8) Nhóm biến cố $A_1,..., A_n$ gọi là ***đầy đủ*** (và xung khắc từng đôi) *nếu* $A_1,..., A_n$ là nhóm xung khắc từng đôi và tổng của chúng bằng Ω

***<u>Lưu ý</u>*:**

A và $\overline{A}$ là nhóm đầy đủ

<u>VD</u>:

Một gia đình có 2 con

TT, TG, GT, GG là nhóm đầy đủ

0T, 1T, 2T là nhóm đầy đủ

9) Hai biến cố A, B gọi là ***độc lập*** *nếu* A, B không ảnh hưởng gì đến khả năng của nhau khi thực hiện phép thử

Tức là:

A có xảy ra hay không xảy ra *không ảnh hưởng* đến khả năng xảy ra của B

B có xảy ra hay không xảy ra *không ảnh hưởng* đến khả năng xảy ra của A

Các điều sau tương đương với A, B độc lập:

P(A/B) = P(A)

P(B/A) = P(B)

P(A.B) = P(A).P(B)

P(A/B) = P(A/$\overline{B}$)

***Lưu ý*:**

A, B độc lập thì đối lập của nó cũng độc lập

VD 1:

Lấy *lần lượt* 2 bi từ hộp có 6 bi T và 4 bi X.

A= bc lần 1 lấy được bi T

B= bc lần 2 lấy được bi X

VD 2:

Lấy *có hoàn lại* 2 bi từ hộp có 6 bi T và 4 bi X.

A= bc lần 1 lấy được bi T

B= bc lần 2 lấy được bi T

10) Nhóm biến cố A_1,..., A_n gọi là ***độc lập*** (toàn phần/toàn thể) *nếu* lấy bất kỳ 1 biến cố trong nhóm thì nó sẽ độc lập với 1 tích bất kỳ các biến cố còn lại

VD:

A, B, C độc lập ⇔ A, B độc lập *và* A, C độc lập *và* B, C độc lập

và A, BC độc lập và B, AC độc lập và C, AB độc lập

***Lưu ý*:**

Nhóm A_1,..., A_n độc lập thì các đối lập của nó cũng độc lập

11) *Các tính chất của biến cố*

$\overline{\overline{A}} = A$

$A + \overline{A} = \Omega$; $A.\overline{A} = \phi$

$A + \phi = A$; $A.\phi = \phi$

$A + \Omega = \Omega$; $A.\Omega = A$

$A+B = B+A$; $A.B = B.A$

$A+A = A$; $A.A = A$

$A.B+A.C = A.(B+C)$

$(A+B).(A+C) = A+B.C$

<u>Luật De Morgan</u>:

$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$; $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\overline{A+B+C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$; $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

***<u>Lưu ý 1</u>*:**

Luật De Morgan giúp chuyển dấu **+** thành dấu **.**, và ngược lại

***<u>Lưu ý 2</u>*:**

Để diễn tả quan hệ giữa các biến cố ta dùng 3 dấu: cộng (**+**), nhân (**.**), dấu đối lập ($\overline{A}$)

<u>VD</u>:

Hai người cùng thi cuối kỳ môn XSTK

A = biến cố người A thi đậu

B = biến cố người B thi đậu

$A.\overline{B} + \overline{A}.B$: chỉ có 1 người thi đậu

$A.B + \overline{A}.\overline{B}$: 2 người có cùng kết quả thi

II) CÁC CÔNG THỨC XÁC SUẤT

0) Tính xác suất theo định nghĩa cổ điển

P(A) = số biến cố sơ cấp *thuận lợi cho A* / số biến cố sơ cấp *có thể xảy ra*

***Lưu ý 1*:**

Các biến cố sơ cấp ***phải đồng khả năng xảy ra***

VD:

Xét 1 gia đình có 2 con

TT, TG, GT, GG là các biến cố sơ cấp đồng khả năng xảy ra

0T, 1T, 2T không là các biến cố sơ cấp đồng khả năng xảy ra

***Lưu ý 2*:**

Ta có 3 cách lấy phần tử trong xác suất

C1: Lấy ngẫu nhiên 2 bi (phân phối Siêu bội)

Lấy 1 lần đủ 2 bi ra xem màu luôn

C2: Lấy lần lượt 2 bi

Lần 1 lấy 1 bi ra xem màu *rồi bỏ ra ngoài luôn*, lần 2 lấy tiếp 1 bi ra xem màu

C3: Lấy có hoàn lại 2 bi (phân phối Nhị thức)

Lần 1 lấy 1 bi từ hộp ra xem màu, *rồi hoàn lại bi này vào hộp*, lần 2 lấy tiếp 1 bi ra xem màu

A là biến cố ngẫu nhiên bất kỳ

$P(A)_{C1} = P(A)_{C2} \neq P(A)_{C3}$

Nếu lấy ít phần tử trong tập rất nhiều phần tử (n << N) thì $P(A)_{C2} \cong P(A)_{C3}$ (công thức xấp xỉ)

VD:

Hộp có 8 bi T và 10 bi X. Lấy lần lượt 3 bi. Tính xác suất lấy được 2 bi T và 1 bi X

$$P(2T1X) = \frac{C(2,8).C(1,10)}{C(3,18)}$$

1) Công thức cộng

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Nếu A, B xung khắc thì P(AB) = 0

Quan trọng là xác định A, B có xung khắc không

***Lưu ý*:**

a) $P(AB) = P(A)+P(B)-P(A+B)$

b) A, B xung khắc và P(C) > 0 thì P({A+B}/C) = P(A/C)+P(B/C)

c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

d) $P(\overline{A}/\mathrm{B})=1-P(A/B)$

2) Công thức xác suất có điều kiện

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(\mathrm{B})}$$

Trong thực tế nếu ta có thể *giới hạn không gian mẫu theo điều kiện B* một cách dễ dàng thì không cần dùng công thức này

Dạng câu hỏi của công thức xác suất có điều kiện: Nếu (biết) sự kiện B đã xảy ra rồi, tính xác suất sự kiện A xảy ra

VD:

Tung 1 con xúc xắc. Không gian mẫu Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = bc con xúc xắc xuất hiện mặt có số nút là lẻ

B = bc con xúc xắc xuất hiện mặt có số nút lớn hơn 4

Ω_B = {5,6} nên P(A/B) = ½

VD:

Hộp có 7 bi T và 6 bi X. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp thì được 2 T. Lấy tiếp 3 bi nữa. Tính xác suất lần 2 lấy được 2 T 1 X.

Sau lần lấy 1 thì hộp còn 5 T và 6 X. Xác suất lần 2 lấy được 2 T và 1 X là

$$\frac{C(2,5).C(1,6)}{C(3,11)}$$

Quan trọng là ghi kết quả như thế nào?!

3) Công thức nhân

P(A.B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)

A, B độc lập $\Leftrightarrow$ P(A.B) = P(A).P(B) $\Leftrightarrow$ P(A/B) = P(A) $\Leftrightarrow$ P(B/A) = P(B)

$\Leftrightarrow$ P(A/B) = P(A/$\overline{B}$)

Quan trọng là:

Xác định A, B có độc lập không

Chọn cách ghi công thức sao cho dễ tính xác suất

4) Công thức xác suất đầy đủ

A, B, C tạo thành nhóm / hệ biến cố đầy đủ

P(F) = P(F/A).P(A)+P(F/B).P(B)+P(F/C).P(C)

***<u>Lưu ý</u>*:**

Thường vẽ sơ đồ cho dễ hình dung cách tính

Quan trọng là xác định nhóm biến cố đầy đủ cho đúng và dễ tính xác suất

5) Công thức Bayes

A, B, C tạo thành nhóm biến cố đầy đủ

$$P(A/F)=\frac{P(A.F)}{P(F)}=\frac{P(F/A).P(A)}{P(F)}$$

Công thức Bayes là trường hợp đặc biệt của công thức xác suất có điều kiện

***<u>Lưu ý</u>*:**

$$F=A.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+\overline{A}.\overline{B}.C$$

$$P(A/F)=\frac{P(A.F)}{P(\mathrm{F})}=\frac{P(A.\overline{B}.\overline{C})}{P(F)}$$

Gợi ý gì để dùng được công thức Bayes?

6) Các công thức về xác suất mở rộng

6) $P(\overline{A}/B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=1-P(A/B)$

$$P(\overline{B}/A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=1-P(B/A)$$

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}.\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A+B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(B)}$$

7) $P(A.\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$$P(\overline{A}.B)=P(B)-P(AB)$$

$$P(A.\overline{B}+\overline{A}.B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$$

$$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$$

$$P(\overline{A}.\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$$

$$P(A+\overline{A}.B)=P(A)+P(\overline{A}.B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A+B)$$

$$\begin{aligned}P(A+\overline{B})&=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=P(A)+1-P(B)-\{\mathrm{P(A)}-\mathrm{P(AB)}\}\\&=1-P(B)+P(AB)\end{aligned}$$

$$P(AB+\overline{A}.\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}.\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A+B})=P(AB)+1-P(A+B)$$

8) A, B, C xung khắc từng đôi:

$$P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)=1-\{\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)\}$$

A, B, C độc lập toàn thể:

$$P(\overline{A}).\mathrm{P}(\overline{B}).\mathrm{P}(\overline{C})=P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)$$

7) Công thức cho dạng toán lấy nhiều lần có cùng 1 tính chất

A_1, A_2 là nhóm đầy đủ

a) $P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)$

b)

$$P(F/B) = \frac{P(FB)}{P(B)} = \frac{P(FB.\Omega)}{P(B)} = \frac{P(FB.\{A_1 + A_2\})}{P(B)} = \frac{P(FBA_1) + P(FBA_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(F/BA_1)P(BA_1) + P(F/BA_2)P(BA_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(F/BA_1)P(B/A_1)P(A_1) + P(F/BA_2)P(B/A_2)P(A_2)}{P(B)}$$

Hoặc

$$P(F/B) = \frac{P(F/BA_1)P(BA_1) + P(F/BA_2)P(BA_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(F/BA_1)P(A_1/B)P(B) + P(F/BA_2)P(A_2/B)P(B)}{P(B)}$$

$$= P(F/BA_1)P(A_1/B) + P(F/BA_2)P(A_2/B)$$

<u>VD 1</u>:

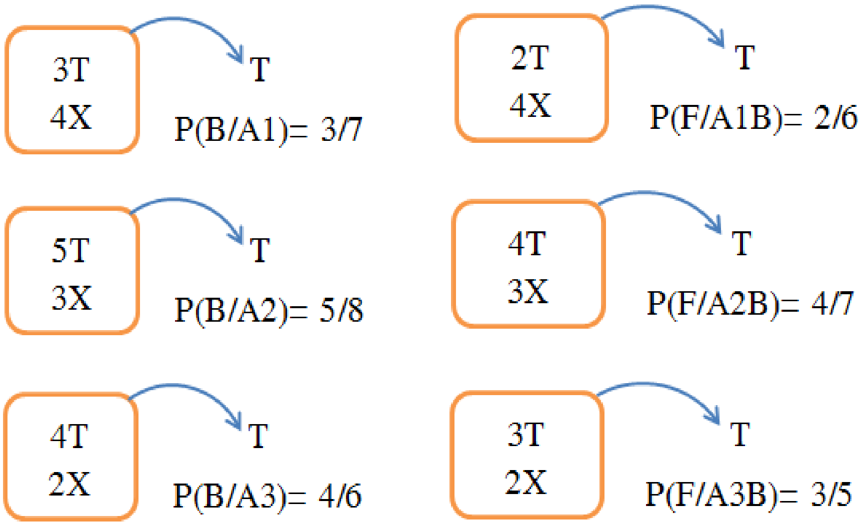
Có 3 hộp loại 1, 5 hộp loại 2, 4 hộp loại 3.

Hộp loại 1 có 3 bi T và 4 bi X, hộp loại 2 có 5 bi T và 3 bi X, hộp loại 3 có 4 bi T và 2 bi X.

Chọn ngẫu nhiên một hộp (trong 12 hộp) rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 bi thì được bi T. *Cũng từ hộp đã chọn* lấy ngẫu nhiên tiếp 1 bi nữa. Tính xác suất bi lấy ra lần 2 là bi T?

HD:

Vẽ sơ đồ liên hệ giữa các xác suất đã tính ở lần 1 và lần 2:



* A_i = bc lấy được hộp loại i, i = 1, 2, 3

$P(A_1)= 3/12$; $P(A_2)= 5/12$; $P(A_3)= 4/12$

* B = bc lần 1 lấy được bi T

$P(B) = P(B/A_1).P(A_1)+ ... +P(B/A_3).P(A_3)$

* F = bc lần 2 lấy được bi T

$$P(F/B)=\frac{P(F/BA_1)\,P(B/A_1)\,P(A_1)+...+P(F/BA_3)P(B/A_3)\,P(A_3)}{P(B)}$$

VD 2:

Một kiện hàng có 10 sản phẩm trong đó có 6 sản phẩm loại I và 4 sản phẩm loại II. Nhân viên bán hàng chọn ngẫu nhiên từ kiện ra 2 sản phẩm để trưng bày.

a) Khách hàng thứ nhất chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm trong số 8 sản phẩm còn lại trong kiện để mua. Tìm xác suất để khách hàng này mua được 2 sản phẩm loại I?

b) Khách hàng thứ hai chọn ngẫu nhiên một sản phẩm trong số 6 sản phẩm còn lại trong kiện để mua. Tính xác suất để khách hàng thứ hai mua được sản phẩm loại I nếu khách hàng thứ nhất mua được 2 sản phẩm loại I?

<u>HD</u>:

a) Gọi A_i là biến cố nhân viên bán hàng lấy ra i sản phẩm loại I để trưng bày, i = 0, 1, 2

B là biến cố khách hàng thứ nhất mua được 2 sản phẩm loại I.

P(B) = 1/3

b) F là biến cố khách hàng thứ hai mua được sản phẩm loại I

P(F/B) = 1/2

https://sites.google.com/a/ueh.edu.vn/phamtricao/
https://sites.google.com/site/phamtricao/