Free download
2015

CHƯƠNG 3:
CÁC QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

Dùng trong Kinh tế

1

- Trong cuộc sống có những "điều/ cái" tuân theo một quy luật nào đó, hoặc không có quy luật. Có quy luật chúng ta biết, nhưng cũng có quy luật mà chúng ta chưa biết. Những cái mà ta biết quy luật chỉ chiếm số lượng nhỏ nhoi so với vô số những cái mà chúng ta chưa biết.

- Vậy tình yêu có quy luật không? *Người nói có* (cho rằng quy luật muôn đời của tình yêu là giận hờn, đau khổ, bị ngăn cấm,... rồi mới được hạnh phúc. Y như phim!), *người nói không* (cho rằng hể thấy thích nhau, hợp nhãn..., và còn vì điều gì nữa thì chỉ ctmb, là yêu. Không cần biết "sẽ ra sao ngày sau". Thí dụ như cô gái 20 lấy ông già 60, hay chàng trai 26 lấy bà già 62, hay "chát chít" gặp nhau trên mạng,.... Y như kịch!).

2

Các quy luật thông dụng sẽ học:

- Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc
  - Quy luật pp siêu bội
  - Quy luật pp nhị thức
  - Quy luật pp Poisson

- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục
  - Quy luật pp chuẩn (chuẩn tắc)
  - Quy luật pp Chi bình phương (*không bài tập*)
  - Quy luật pp Student (*không bài tập*)

3

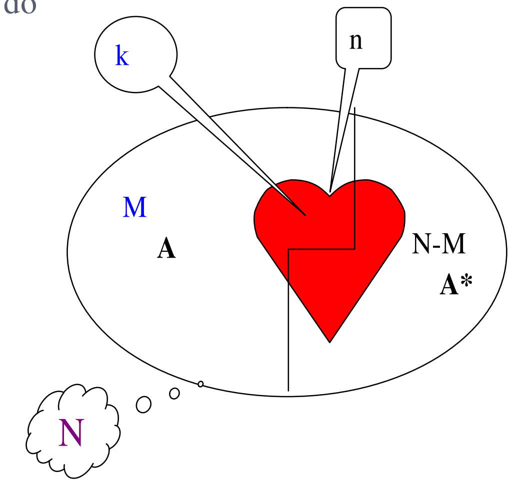
- **I) QUY LUẬT PHÂN PHỐI SIÊU BỘI**
- **<u>VD</u>:**
- Hộp có 10 bi, trong đó có 4 bi T. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp.
- Tính xác suất lấy được 2 bi T?
- **<u>Giải</u>:**
- Gọi X = số bi T lấy được (trong 3 bi lấy ra).
- P(X=2) = C(2,4)*C(1,6) / C(3,10)
- Nhận xét gì từ thí dụ này?

4

- **Tổng quát:**
- Ta có 1 tập hợp có N phần tử, trong đó có M phần tử có tính chất A quan tâm. Lấy ngẫu nhiên n phần tử từ tập.
- Tính xác suất có k phần tử có tính chất A trong n phần tử lấy ra?
- **Giải:**
- Gọi X= số phần tử có tính chất A trong n phần tử lấy ra.
- P(X=k) = C(k,M)*C(n-k,N-M) / C(n,N)
- Lúc đó X gọi là có quy luật pp siêu bội.
  Ký hiệu X~H(N,M,n)

5

Sơ đồ



6

- **Tính chất:** X~H(N,M,n)
  - E(X)= np , với p= M/N
  - Var(X)= npq (N-n)/(N-1)

  (*không cần biết bảng ppxs của X*)
- (N-n)/(N-1) gọi là hệ số hiệu chỉnh.
- **VD:** Ở VD trên thì N= 10, M= 4, tính chất A quan tâm là lấy được bi T. Với n= 3, k= 2. X~H(10,4,3).
- **Câu hỏi:**
- 1) Tính số bi T lấy được trung bình?
- 2) Tính phương sai của số bi T lấy được?
- **Giải:**
- 1) p= M/N= 4/10
- E(X)= np = 3(4/10) = 12/10
- 2) q= 1-p = 6/10
- Var(X) = npq (N-n)/(N-1) = 3(4/10)(6/10) (10-3)/(10-1)

7

- **VD:** Hộp có 5 bi Trắng, 4 bi Vàng, 3 bi Đỏ, 2 bi Cam. Lấy ngẫu nhiên 6 bi từ hộp. Tính xác suất lấy được 4 bi T?
- **HD:**

  X= số bi T lấy được trong 6 bi lấy ra.

  X~H(14,5,6)

  P(X=4)= C(4,5).C(2,9) / C(6,14)

8

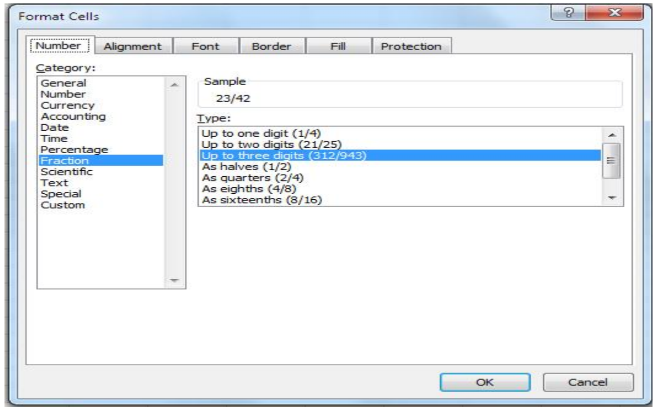
PHÂN PHỐI SIÊU BỘI VỚI EXCEL

	A	B	C
1	0	=HYPGEOMDIST(A1,4,6,10)	=HYPGEOM.DIST(A1,4,6,10,1)
2	0	0.00476	0.00476
3	1	0.11429	0.11905
4	**2**	**0.42857**	**0.54762**
5	3	0.38095	0.92857
6	4	0.07143	1
7	k	P(X=k)	P(0<=X<=k)
8			
9		X~H(10,6,4)	

9

CHUYỂN KẾT QUẢ VỀ DẠNG PHÂN SỐ

Chọn các ô cần chuyển. Chuột phải. Chọn *Format Cells*



10

KẾT QUẢ DẠNG PHÂN SỐ

	A	B	C
1	0	=HYPGEOMDIST(A1,4,6,10)	=HYPGEOM.DIST(A1,4,6,10,1)
2	0	1/210	1/210
3	1	4/35	5/42
4	**2**	**3/7**	**23/42**
5	3	8/21	13/14
6	4	1/14	1
7	k	P(X=k)	P(0<=X<=k)
8			
9		X~H(10,6,4)	

11

- *Vậy quy luật phân phối siêu bội là 1 cái gì đó rất gần gũi, thân thương với chúng ta. Đó là bài toán "bốc bi từ hộp". Ở chương 2, ta chưa biết quy luật pp siêu bội thì ta vẫn làm "đàng hoàng" đấy thôi. Tuy nhiên ta thấy nó tuân theo 1 quy luật ppxs nào đó, và ta cụ thể nó thành quy luật siêu bội.*
- *Đó chính là "Hãy đặt tên cho em, hãy cho em một danh phận" (Thuyết "Chính Danh" của Khổng Tử).*

12

II) QUY LUẬT PP NHỊ THỨC

- VD0:
- Một xạ thủ bắn vào bia 3 lần. Xác suất bắn trúng mỗi lần là 0,7. Kết quả của các lần bắn là độc lập nhau.
- Gọi X= số lần bắn trúng bia
- Lập bảng ppxs cho X?

13

Giải VD0:

Gọi A_i = bc lần thứ i bắn trúng, i= 1,3

p= $P(A_i) = 0,7$, $q = 1-p = P(A_i^*) = 0,3$

$P(X=0) = P(A_1^*A_2^*A_3^*) = P(A_1^*)P(A_2^*)P(A_3^*)$
$= (0,3)(0,3)(0,3) = C(0,3)\ p^0q^{3-0}$

$P(X=1) = P(A_1)P(A_2^*)P(A_3^*) + P(A_1^*)P(A_2)P(A_3^*) + P(A_1^*)P(A_2^*)P(A_3)$
$= (0,7)(0,3)(0,3) + (0,3)(0,7)(0,3) + (0,3)(0,3)(0,7)$
$= 3(0,7)(0,3)(0,3) = C(1,3)\ p^1q^{3-1}$

$P(X=2) = P(A_1)P(A_2)P(A_3^*) + P(A_1)P(A_2^*)P(A_3) + P(A_1^*)P(A_2)P(A_3)$
$= (0,7)(0,7)(0,3) + (0,7)(0,3)(0,7) + (0,3)(0,7)(0,7)$
$= 3(0,7)(0,7)(0,3) = C(2,3)\ p^2q^{3-2}$

$P(X=3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$
$= (0,7)(0,7)(0,7) = C(3,3)\ p^3q^{3-3}$

Nhận xét gì?

14

II) QUY LUẬT PP NHỊ THỨC

- VD1:
- Tung 1 con xúc xắc 3 lần.
- Gọi X= số lần xuất hiện mặt 1 trong 3 lần tung
- Lập bảng ppxs cho X?

15

Giải VD1:

Gọi Ai = bc lần tung thứ i được mặt 1, i= 1,3

p= P(Ai) = 1/6 , q = 1-p = P(Ai*) = 5/6

P(X=0) = P(A1*A2*A3*) = P(A1*)P(A2*)P(A3*)
$= (5/6)(5/6)(5/6) = C(0,3)\ p^0q^{3-0}$

P(X=1) = P(A1)P(A2*)P(A3*)+ P(A1*)P(A2)P(A3*) +P(A1*)P(A2*)P(A3)
$= (1/6)(5/6)(5/6) + (5/6)(1/6)(5/6) + (5/6)(5/6)(1/6)$
$= 3(1/6)(5/6)(5/6) = C(1,3)p^1q^{3-1}$

P(X=2) = P(A1)P(A2)P(A3*)+ P(A1)P(A2*)P(A3) + P(A1*)P(A2)P(A3)
$= (1/6)(1/6)(5/6) + (1/6)(5/6)(1/6) + (5/6)(1/6)(1/6)$
$= 3(1/6)(1/6)(5/6) = C(2,3)p^2q^{3-2}$

P(X=3) = P(A1)P(A2)P(A3)
$= (1/6)(1/6)(1/6) = C(3,3)\ p^3q^{3-3}$

Nhận xét gì?

16

Nhận xét:
Ta thấy mỗi lần tung 1 con xúc xắc thì khả năng được mặt 1 là p= 1/6, khả năng được các mặt còn lại là q= 5/6.
Ta tung 3 lần con xúc xắc.
* Muốn cho (X=0) trong 3 lần tung ta chọn ra 0 lần được mặt 1, tức là chọn C(0,3) lần được mặt 1 trong 3 lần tung. Xác suất được mặt 1 trong mỗi lần tung là p. Vậy xs không được mặt 1 trong 3 lần tung là $P(X=0) = C(0,3)\, p^0 q^{3-0}$.
* Muốn cho (X=1) trong 3 lần tung ta chọn ra 1 lần được mặt 1, có C(1,3) cách chọn. Mỗi cách chọn thì xs được một lần mặt 1 trong 3 lần tung là $p^1 q^{3-1}$. Vậy $P(X=1) = C(1,3)\, p^1 q^{3-1}$.
* Tương tự cho (X=2) , (X=3).

17

Lúc đó ta nói X có quy luật phân phối nhị thức.

- Nhận xét:
- Phép thử của ta là tung 1 con xúc xắc.
- Ta thấy các lần tung là *độc lập nhau*, có nghĩa là kết quả ở các lần tung không ảnh hưởng lẫn nhau.
- Ở mỗi lần tung thì ta *quan tâm* đến việc có được mặt 1 hay không - *biến cố A quan tâm*, và xác suất của A là *không đổi* qua các lần tung và bằng p.

18

Tổng quát:
* Ta thực hiện phép thử T n lần, ký hiệu là T1, T2,...Tn. Mỗi lần thực hiện T ta *quan tâm* bc A có xảy ra hay không.
* Các T1, T2,...Tn gọi là *dãy phép thử độc lập* nếu kết quả xảy ra ở các lần thử *không ảnh hưởng lẫn nhau.*
* Xác suất p = P(A) là *cố định* qua các lần thử.
Gọi: X= số lần biến cố A xảy ra trong n lần thử.
Thì X có quy luật phân phối nhị thức, ký hiệu X~B(n,p).
Xác suất X nhận giá trị k (có k lần biến cố A xảy ra trong n lần thử) là:

$$P(X=k) = C(k,n)\, p^k q^{n-k} \quad , \text{với } q = 1-p$$

19

VD1: Với VD ở bài trên thì X~B(3, 1/6).

Tính chất: X~B(n,p)
E(X)= np
Var(X)= npq
$np-q \le mod(X) \le np+p$
(*không cần biết bảng pp của X*)
VD1:
Xác định E(X), var(X), mod(X)?
Giải VD1:
X~B(3, 1/6)
E(X)= 3(1/6) = 3/6 , var(X) = 3(1/6)(5/6)
$(3/6)-(5/6) \le mod(X) \le (3/6)+(1/6) \rightarrow -2/6 \le mod(X) \le 4/6$
$\rightarrow$ mod(X)= 0 (*Lưu ý X có các giá trị 0, 1, 2, 3*)

20

Lưu ý quan trọng:
Quy luật phân phối nhị thức rất dễ áp dụng! nhưng điều khiến cho sinh viên *thường* làm sai là:
- Không phân biệt được là các phép thử có độc lập không
- Không biết P(A) có cố định không.

VD2:
Có 3 máy thuộc 3 đời (version) khác nhau. Cho mỗi máy sản xuất ra 1 sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm tốt do từng máy sản xuất lần lượt là 0,7 ; 0,8 ; 0,9.
Tính xác suất trong 3 sản phẩm sản xuất ra thì có 2 sản phẩm tốt?

21

Giải VD2:
Ta không thể áp dụng quy luật pp nhị thức cho bài toán này, tại sao? Cmkb!
Nếu ta không biết quy luật ppxs thì sao, không lẽ *botay.com* à!?
Ta hãy trở về một cách làm gần gũi và cơ bản nhất là: đặt biến cố, xác định giá trị của X thông qua các biến cố.

Gọi X= số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm.
Đặt Ai= bc máy i sản xuất ra sản phẩm tốt.
P(X=2) = P(A1A2A3*)+P(A1A2*A3)+ P(A1*A2A3)
= P(A1)P(A2)P(A3*)+ P(A1)P(A2*)P(A3)+P(A1*)P(A2)P(A3)
= (0,7)(0,8)(0,1) + (0,7)(0,2)(0,9) + (0,3)(0,8)(0,9)

22

- VD3:
- Máy tự động sản xuất ra sản phẩm, cứ 10 sản phẩm đóng thành 1 hộp. Giả sử mỗi hộp có 9 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên 10 hộp, kiểm tra mỗi hộp như sau: lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ hộp, nếu 3 sản phẩm tốt hết thì mua hộp đó.
- 1) Tính xác suất có 2 hộp được mua?
- 2) Tính xác suất có ít nhất 3 hộp được mua?
- 3) Tính xác suất có nhiều nhất 3 hộp được mua?

23

- Giải:
- Xác suất để 1 hộp bất kỳ được mua là
- p = C(3,9) / C(3,10) = 84/120 = 0,7
- Gọi X = số hộp được mua trong 10 hộp
- X~B(10 ; 0,7)
- 1) P(X=2) = C(2,10)$(0,7)^2(0,3)^8$ = 0,0014
- 2) P(X>=3) = 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)] = 0,9984
- 3) P(X<=3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)
- = 0,0106

24

Bài tập: Trong các ĐLNN sau, ĐL nào có quy luật pp nhị thức (xác định n, p), ĐL nào không có? Tại sao?

- Tung một đồng xu sấp ngữa 3 lần.
  Gọi X= số lần được mặt ngữa.
- Hộp có 4 bi T, 3 bi Đ. Lấy từ hộp ra 3 bi.
  Gọi X= số bi Đ lấy được. Xét cho 3 cách lấy:
  - C1: Lấy ngẫu nhiên 3 bi
  - C2: Lấy lần lượt 3 bi
  - C3: Lấy có hoàn lại 3 bi
- Một máy sản xuất ra sản phẩm có tỷ lệ phế phẩm là 2%. Cho máy sản xuất ra (lần lượt) 10 sản phẩm.
  Gọi X= số phế phẩm có được.

25

Bài tập (tt): Trong các ĐLNN sau, ĐL nào có quy luật pp nhị thức (xác định n, p), ĐL nào không có? Tại sao?

- Một xạ thủ bắn 3 phát đạn vào bia. Ở lần bắn sau sẽ *rút kinh nghiệm* các lần bắn trước nên xác suất trúng của từng phát lần lượt là: 0,7 ; 0,8 ; 0,9.
  Gọi X= số phát bắn trúng.
- Một người lấy *lần lượt* 4 vợ. Do *rút kinh nghiệm* ở các lần lấy trước nên khả năng ly dị vợ ở các lần lấy lần lượt là: 0,9 ; 0,8 ; 0,6 ; 0,5.
  Gọi X= số lần ly dị vợ.
- Xác suất để một chiếc dù không bung ra khi nhảy dù là 0,001. Chiếc dù được dùng 3 lần (*có thể với 3 người khác nhau! Hic hic*).
  Gọi X= số lần dù không bung.

26

- VD4: Đề thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi. Mỗi câu có 4 cách trả lời, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Các câu hỏi độc lập với nhau. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một người đi thi *không học bài* nên trả lời các câu hỏi bằng cách "*đánh đại*" một câu trả lời.
- 1) Tính xác suất để người này được 5 điểm?
- 2) Tính xác suất để người này đạt ít nhất 5 điểm?
- Giải:
- Gọi X= số câu trả lời đúng trong 50 câu.
- X~B(50, ¼)
- 1) $P(X=25) = C(25,50)(1/4)^{25}(3/4)^{50-25} = 0,00008$
- 2) $P(X>=25) = P(25<=X<=50) = P(X=25)+ ... +P(X=50)$
- $= 1-P(0<=X<=24) = 1- 0,99988 = 0,00012$
- Dùng EXCEL để tính kết quả, tính tay rất "*chua*"!

27

- VD5: Đề thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi. Mỗi câu có 4 cách trả lời, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Các câu hỏi độc lập với nhau. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một người trả lời "*chắc cú*" 10 câu hỏi, các câu hỏi còn lại trả lời bằng cách "*đánh đại*" một câu trả lời.
- 1) Tính xác suất để người này được 5 điểm?
- 2) Tính xác suất để người này đạt ít nhất 5 điểm?
- Giải:
- Gọi X= số câu trả lời đúng trong 40 câu còn lại.
- X~B(40, ¼)
- 1) $P(X=15) = C(15,40)(1/4)^{15}(3/4)^{25} = 0,02819$
- 2) $P(X>=15) = 1-P(0<=X<=14) = 1- 0,94556 = 0,05444$

28

- VD6: Đề thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi. Mỗi câu có 4 cách trả lời, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Các câu hỏi độc lập với nhau. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một người trả lời "*chắc cú*" k câu hỏi ($k<25$), các câu hỏi còn lại trả lời bằng cách "*đánh đại*" một câu trả lời.
- 1) Tính xác suất để người này được 5 điểm?
- 2) Tính xác suất để người này đạt ít nhất 5 điểm?
- Giải:
- Gọi X là số câu trả lời đúng trong 50-k câu còn lại.
- X~B(50-k, ¼)
- 1) P(X= 25-k)
- 2) P(X>= 25-k) = 1- P(0 <=X<= 25-k-1)
- Bảng kết quả cho ở 2 bảng sau:

29

BẢNG KẾT QUẢ VỚI CÁC GIÁ TRỊ CỦA K

	A	B	C	D	E
1	9	=25-A1	=BINOMDIST(25-A1,50-A1,0.25,0)	=BINOMDIST(25-A1-1,50-A1,0.25,1)	=1-D1
2	0	25	0.00008	0.99988	0.00012
3	1	24	0.00017	0.99975	0.00025
4					
5	10	15	0.02819	0.94556	0.05444
6	11	14	0.04229	0.91385	0.08615
7	12	13	0.06072	0.86830	0.13170
8	**13**	**12**	**0.08309**	**0.80598**	**0.19402**
9	14	11	0.10780	0.72514	0.27486
10	15	10	0.13175	0.62632	0.37368
11	16	9	0.15057	0.51339	0.48661
12	k=13	25-k=12	P(X=12)	P(0<=X<=11)	P(X>=12)

30

BẢNG KẾT QUẢ VỚI CÁC GIÁ TRỊ CỦA K

	A	B	C	D	E
1	9	=25-A1	=BINOMDIST(25-A1,50-A1,0.25,0)	=BINOMDIST(25-A1-1,50-A1,0.25,1)	=1-D1
2	17	8	0.15943	0.39382	0.60618
3	18	7	0.15460	0.27787	0.72213
4	19	6	0.13527	0.17642	0.82358
5	**20**	**5**	**0.10473**	**0.09787**	**0.90213**
6	21	4	0.06982	0.04551	0.95449
7	22	3	0.03852	0.01661	0.98339
8	23	2	0.01651	0.00423	0.99577
9	24	1	0.00489	0.00056	0.99944
10	k=20	25-k=5	P(X=5)	P(0<=X<=4)	P(X>=5)

31

- **III) QUY LUẬT PHÂN PHỐI POISSON**
- VD1:
- Khảo sát số người đến siêu thị trong 1 tháng. Một tháng có 30 ngày.
- Gọi X= số người đến siêu thị trong 1 ngày.
- Ta thấy: trong 1 ngày có thể có 0, 1, 2, ... đến siêu thị nên X có các giá trị là 0, 1, 2, ...
- Ta không đoán biết chính xác trong 1 ngày nào đó sẽ có bao nhiêu người đến. Nhưng ta biết số người trung bình đến siêu thị trong một ngày là λ= 600 người (*theo thống kê*).
- Lúc đó ta nói X là ĐLNN có quy luật pp Poisson.

32

- VD2:
- Có một miền A, trong miền A có nhiều vùng A1, A2,...Bắn 1 phát đạn đại bác vào miền A. ta xét khả năng có k mảnh đạn rơi vào vào vùng A1.
- Gọi X= số mảnh đạn rơi vào vùng A1.
- Ta thấy số mảnh đạn có thể rơi vào vùng A1 có thể là 0, 1, 2,...
- Ta biết số mảnh đạn trung bình rơi vào vùng A1 là λ= 2,5 (*theo thống kê*).
- Lúc đó ta nói X là ĐLNN có quy luật phân phối Poisson.

33

Trong thực tế có nhiều ĐLNN có phân phối Poisson: Số cuộc gọi đến tổng đài trong 1 ngày, Số người chết trong 1 năm, Số khách du lịch Nhật đến VN trong 1 tháng,... Số lần chụt chụt nhau trước khi cưới của 1 đôi uyên ương
Lưu ý: Trong thực tế, mặc dù chặn trên của X không biết nhưng không phải là vô hạn. Thí dụ người ta chỉ có thể chụt nhau *1 tỷ lũy thừa 1 tỷ* lần trong cuộc đời mà thôi!!!

- Tổng quát:
- X là ĐLNN rời rạc có các giá trị là k= 0, 1, 2,... với giá trị trung bình là λ, và xác suất tương ứng là:
- $P(X=k) = \exp(-\lambda).\ \lambda^k / k!$
- Ta nói X có quy luật pp Poisson. Ký hiệu X~P(λ).
- Tính chất: X~P(λ)
- $E(X) = var(X) = \lambda$
- $\lambda-1 \le mod(X) \le \lambda$

34

Định lý:

X~B(n,p)

Nếu n đủ lớn ($n\to+\infty$) và p đủ nhỏ ($p\to 0$) sao cho $np\to\lambda$ (hằng số) thì:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow[np\to\lambda]{n\to+\infty,\, p\to 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Hay nói cách khác:

$B(n,p)\to P(\lambda)$

35

Trong máy tính Casio fx-570VN Plus có chức năng tính hàm $\exp(x) = e^x$

- VD1:
- Biết trung bình trong 1 ngày có 600 người đến siêu thị.
- 1) Tính xác suất trong ngày 1/1/2012 có 700 người đến siêu thị?
- 2) Xác định số người tin chắc nhất có thể đến siêu thị trong ngày 1/1/2012?
- Giải:
- Gọi X = số người đến siêu thị trong ngày 1/1/2012
- Ta có X~P(600)
- 1) $P(X=700) = \exp(-600).\ 600^{700}/700! = 0{,}0000056$
- 2) $600-1 \le mod(X) \le 600 \to mod(X) = 599$ hoặc 600

36

- VD2:
- Ta biết trung bình có 2,5 mảnh đạn rơi vào vùng A1
- Gọi X= số mảnh đạn rơi vào vùng A1
- X~P(2,5)
- 1) Tính xác suất có 3 mảnh đạn rơi vào vùng A1?
- 2) Xác định số mảnh đạn tin chắc nhất có thể rơi vào vùng A1?
- 3) Tính xác suất có ít nhất 5 mảnh đạn rơi vào vùng A1?

37

Giải VD2:

1) P(X=3) = exp(-2,5). $2,5^3/3!$ = 0,2138

2) $2,5-1 \le \text{mod}(X) \le 2,5 \to \text{mod}(X) = 2$

3) $P(X\ge 5) = 1-P(0\le X\le 4)$

$$= 1-\sum_{k=0}^{4} P(X=k) = 1-\sum_{k=0}^{4} \exp(-2,5)(2,5)^k / k!$$

$$= 1-0,8912 = 0,1088$$

Câu hỏi:

Gợi ý của bài toán để có thể áp dụng quy luật pp Poisson là gì?

38

PHÂN PHỐI POISSON VỚI EXCEL

	A	B	C
1	0	=POISSON(A1,1.5,0)	=POISSON(A1,1.5,1)
2	0	0.22313	0.22313
3	1	0.33470	0.55783
4	2	0.25102	0.80885
5	3	0.12551	0.93436
6	4	0.04707	0.98142
7	k	P(X=k)	P(0<=X<=k)
8			
9		X~P(1.5)	

39

IV)PHÂN PHỐI CHUẨN

Một ĐLNN liên tục có hàm mật độ như sau được gọi là có quy luật pp chuẩn. Ký hiệu $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

Hàm mật độ : $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Tính chất 1: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

E(X) = μ

D(X) = σ^2

mod(X) = med(X) = μ

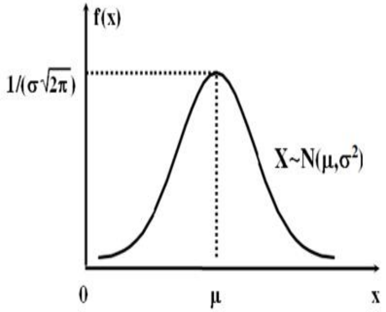
đặc biệt: nếu $\mu=0$ và $\sigma=1$ thì $X\sim N(0,1)$: gọi là pp chuẩn tắc. PP chuẩn tắc có hàm mật độ là hàm mật độ Gauss:

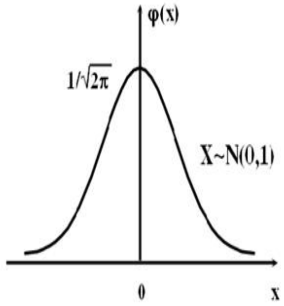
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

40

Định lý chuẩn hóa:

Nếu X~N(μ,σ²) thì $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ~N(0,1)





Phân phối đối xứng qua đường thẳng x=μ

Phân phối đối xứng qua trục tung

41

Tính chất 2: X~N(μ,σ²)

$$P(\alpha<X<\beta)=\phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X<\alpha)=\frac{1}{2}+\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X>\alpha)=1-P(X<\alpha)=\frac{1}{2}-\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(|X-\mu|<\alpha)=2\phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

$$P(|X|<\alpha)=\phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)+\phi\left(\frac{\alpha+\mu}{\sigma}\right)$$

Với $\phi(x)=\int_0^x \varphi(t)dt$

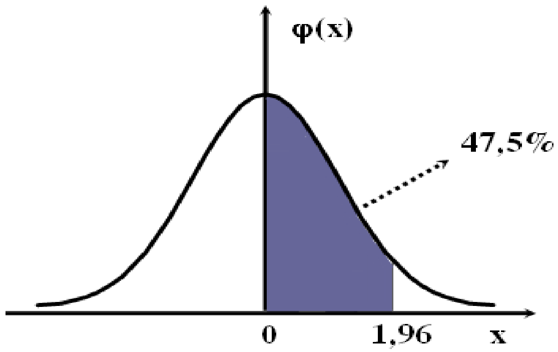
Lưu ý:

ϕ(x) là hàm lẻ, tức là: ϕ(-x)= -ϕ(x) ; ϕ(+∞)= 0,5

Các giá trị của ϕ(x) được tính sẵn thành bảng, là bảng F.

42

VD: $\phi(1{,}96)=\int_0^{1{,}96}\varphi(x)dx=0{,}475$



Dùng Casio fx-570 VN Plus để tính ϕ(x)

43

CÁCH TÍNH BẢNG F VÀ E

	A	B	C
1	1.96	=NORMSDIST(1.96)-0.5	=NORMDIST(1.96,0,1,0)
2	1,96	0.4750	0.0584
3		ϕ(1,96)= 0,475	φ(1,96)= 0,0584
4		Bảng F	Bảng E
5			
6	1,65	0.4505	0.1023
7	2,57	0.4949	0.0147

44

- VD1: Chiều dài của một loại chi tiết máy có *quy luật phân phối chuẩn* với chiều dài thiết kế là $\mu = 30$cm, độ lệch (tiêu) chuẩn là $\sigma = 2$cm.
- 1) Một chi tiết máy được xem là đạt yêu cầu khi sản xuất ra có chiều dài nằm trong khoảng 28 đến 31. Chọn NN 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết này đạt yêu cầu?
- 2) Một chi tiết máy được xem là "quá dài" khi chiều dài của nó lớn hơn 34,5cm. Chọn NN 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết này "quá dài"?
- 3) Một chi tiết máy được xem là "quá ngắn" khi chiều dài của nó nhỏ hơn 20cm. Chọn NN 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết này "quá ngắn"?
- 4) Chọn NN 1 chi tiết máy, tính xác suất chi tiết này có chiều dài bằng 31 cm?

45

- Giải VD1:
- Gọi X là chiều dài của chi tiết máy sản xuất ra.
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Theo đề bài thì $X \sim N(30\text{cm}, (2\text{cm})^2)$
- 1) $P(28<X<31) = \phi[(31-30)/2] - \phi[(28-30)/2]$
- $= \phi(0,50) + \phi(1,00) = 0,1915 + 0,3413$
- 2) $P(X>34,5) = 0,5 - \phi[(34,5-30)/2]$
- $= 0,5 - \phi(2,25) = 0,5 - \phi(2,25) = 0,5 - 0,4878$
- 3) $P(X<20) = 0,5 + \phi[(20-30)/2] = 0,5 - \phi(5,00) \approx 0,5 - \boldsymbol{0,5} = \boldsymbol{0}$
- 4) $P(X=31) = \mathbf{0}$

- Câu hỏi:
- Rút ra được cách làm của bài toán về quy luật phân phối chuẩn chưa?

46

- VD2:
- Các vòng bi do một máy tự động sản xuất ra được coi là đạt tiêu chuẩn nếu đường kính của nó sai lệch so với đường kính thiết kế không quá 0,7mm.
- Biết rằng độ sai lệch này là biến ngẫu nhiên *phân phối chuẩn* với $\mu = 0$ và $\sigma = 0,4$mm.
- Tìm tỷ lệ vòng bi đạt tiêu chuẩn của máy đó?

47

Giải VD2:

Ta thấy rằng tỷ lệ vòng bi đạt tiêu chuẩn chính là xác suất để lấy ngẫu nhiên một vòng bi thì được vòng bi đạt tiêu chuẩn.

Gọi X = độ sai lệch giữa đường kính của vòng bi được sản xuất ra so với đường kính thiết kế.

$X \sim N(0\text{mm}; (0,4\text{mm})^2)$

Ta có: $P(|X|<0,7) = P(|X-0|< 0,7)$

$= 2\phi(0,7/0,4) = 2\phi(1,75) = 0,9198$

Vậy tỷ lệ vòng bi đạt tiêu chuẩn của máy là 91,98%.

Lưu ý: có thể áp dụng các công thức khác để tính $P(|X|<0,7)$

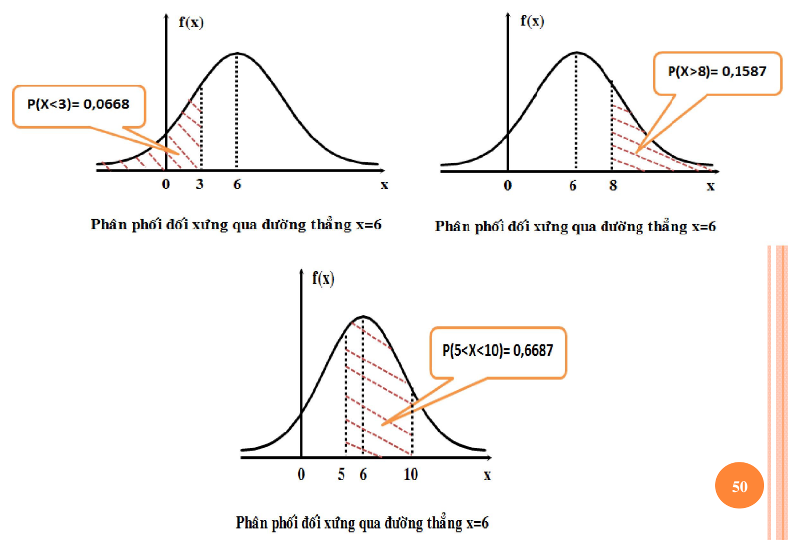
48

PHÂN PHỐI CHUẨN VỚI EXCEL

	A	B	C
1	=NORMDIST(3,6,2,1)	=NORMDIST(10,6,2,1)-NORMDIST(5,6,2,1)	=1-NORMDIST(8,6,2,1)
2	0.0668	0.6687	0.1587
3	P(X<3)	P(5<X<10)	P(X>8)
4		X~N(6,4)	

- $X \sim N(6,2^2)$
- $P(X<3) = 0,5 + \phi([3-6]/2) = 0,5 - \phi(1,5) = 0,5-0,4332 = 0,0668$
- $P(5<X<10) = \phi([10-6]/2) - \phi([5-6]/2) = \phi(2) + \phi(0,5)$
  $= 0,4772+0,1915 = 0,6687$
- $P(X>8) = 0,5 - \phi([8-6]/2) = 0,5 - \phi(1) = 0,5-0,3413 = 0,1587$
- $P(|X-5|<3) = P(2<X<8)$
- **$P(|X-5|>3) = P(|X-5|>=3) = 1-P(|X-5|<3)$**

49



50

V) CÁC CÔNG THỨC XẤP XỈ

1) X có phân phối siêu bội H(N,M,n)
   Khi n << N ta xấp xỉ : $X \sim B(n, p)$ với $p = M/N$

2) X có phân phối nhị thức B(n,p)

a) Khi n lớn, *p nhỏ gần 0* (*thường* p<0,09) thì ta xấp xỉ:
   $X \sim P(np)$

b) Khi n lớn (*thường n>=100*) và *p* không quá gần 0 và 1 (*thường 0,2<=p<=0,8*) thì ta dùng công thức xấp xỉ chuẩn:
   $X \sim N(np, npq)$

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$ (ct tích phân Laplace)

51

V) CÁC CÔNG THỨC XẤP XỈ

- Máy tính tay Casio fx-570VN Plus chỉ tính được các giá trị tính toán không quá lớn. Do đó 1 số phân phối với tham số nhập vào quá lớn thì máy sẽ báo lỗi.
- *Các công thức xấp xỉ là cần thiết khi làm bài thi.*
- EXCEL thì không bị giới hạn về giá trị tính toán.

52

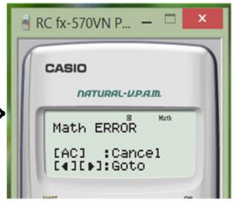
1) Phân phối siêu bội:

$X \sim H(4.10^8, 3.10^8, 500)$

$P(X=300) = C(300, 3.10^8) * C(200, 1.10^8) / C(500, 4.10^8)$

$\Rightarrow$ **Máy báo lỗi**

$\Rightarrow$



2) Phân phối nhị thức:

* $X \sim B(9.10^{99}; 0,4)$

$P(X=4.10^{60}) \Rightarrow$ Máy báo lỗi

* $X \sim B(9.10^{100}; 0,4) \Rightarrow$ Máy báo lỗi

* $X \sim B(9.10^{98}; 4.10^{-60}) \Rightarrow$ Máy báo lỗi

<u>VD1</u>: Một lô hàng có 1000 sản phẩm, trong đó có 600 sản phẩm loại I. Chọn NN 10 sản phẩm từ lô hàng. Tính xác suất trong 10 sp lấy ra có 6 sp loại I?

<u>Giải VD1</u>:

Gọi X = số sp loại I trong 10 sp lấy ra.

$X \sim H(1000, 600, 10)$

Ta thấy n= 10 << N= 1000 nên ta xấp xỉ: $X \sim B(n,p)$

Với p= 600/1000 = 0,6

vậy $X \sim B(10; 0,6)$

$P(X=6) = C(6,10)(0,6)^6(0,4)^4 = 0,2508$

VD1:

- So sánh kết quả làm trực tiếp và tính xấp xỉ:

siêu bội	nhị thức	sai số
0.252086	0.250823	0.001263

- <u>Lưu ý</u>: Nếu đề cho n *không quá nhỏ* so với N thì không làm xấp xỉ được, vì sai số lớn. Phải "*cắn răng*" tính trực tiếp!!!
- <u>Thí dụ</u>: Hộp có 10 bi, trong đó có 7 bi T. Lấy NN 3 bi, tính xác suất lấy được 2 bi T?

siêu bội	nhị thức	sai số
0.525000	0.441000	0.084000

- VD1bis: Hộp có 150 bi, trong đó có 110 bi T. Lấy ngẫu nhiên 20 bi từ hộp. Tính xác suất lấy được 15 bi T?
- Giải:
- Gọi X là số bi T lấy được trong 20 bi lấy ra. X~H(150, 110, 20)

  P(X=15) = C(15,110).C(5,40)/ C(20,150) = 0,21305
- Nếu xem n=20 << N=150 (tỷ lệ 2/15= 0,13333) thì xấp xỉ: X~B(20; 11/15)

  $P(X=15) = C(15,20)(11/15)^{15}(4/15)^{5} = 0,19944$
- Sai số giữa 2 cách làm là 0,21305-0,19944 = 0,01361
- Sai số 0,01361 có thể *xem là nhỏ* mà cũng có thể *xem là lớn*. Nếu *xem là lớn* thì phải *tính tay trực tiếp* (*rất chua*), còn *xem là nhỏ* thì *tính xấp xỉ*. Nếu ***đề thi rõ ràng*** thì phải có câu "***Tính xấp xỉ kết quả***". Còn nếu ***đề thi không rõ ràng*** thì khi làm bài *Ta sẽ phải làm gì?* Câu trả lời đúng đắn nhất là câu hỏi ngược "***Thầy muốn gì thì Em sẽ chiều ??***!!"

57

VD2: sản phẩm do 1 máy tự động sản xuất ra. Tỷ lệ sản phẩm hỏng do máy sản xuất là 1%. Khảo sát 100 sản phẩm do máy sản xuất. Tính xác suất có 10 sp hỏng?

Giải VD2:

Gọi X= số sp hỏng trong 100 sp do máy sản xuất.

X~B(100; 0,01)

n=100 lớn, p=0,01 nhỏ gần 0 nên ta xấp xỉ X~P(λ)

với λ= np = 100(0,01) = 1

Vậy X~P(1)

$P(X=10)= \exp(-1)\, 1^{10}/10! = 0,0000001014$

58

LƯU Ý XẤP XỈ TỪ NHỊ THỨC QUA POISSON

- VD3: Sản phẩm do một máy tự động sản xuất ra với tỷ lệ sản phẩm tốt là 0,95. Cho máy sản xuất 200 sản phẩm. Tính xác suất có ít nhất 195 sản phẩm tốt.
- Giải:
- Gọi X= số sản phẩm xấu có trong 200 sản phẩm sản xuất ra
- X~B(200; 0,05) ≈ P(10)

  P(Y>=195)= P(X<=5)= P(X=0)+...+P(X=5)= 0,0671
- Lưu ý:
- Gọi Y= số sản phẩm tốt có trong 200 sản phẩm sản xuất ra

  Y~B(200; 0,95) ***Không xấp xỉ được***
- Y+X= 200 và Y>=195 → X<=5

59

XẤP XỈ NHỊ THỨC QUA CHUẨN

- VD4:
- Sản phẩm do một máy tự động sản xuất ra. Tỷ lệ phế phẩm do máy sản xuất ra là 0,4. Lấy 100 sản phẩm do máy sản xuất ra để kiểm tra.
- 1) Tính xác suất có ít nhất 50 phế phẩm?
- 2) Tính xác suất có nhiều nhất 40 phế phẩm?

60

Giải VD4:
Gọi X = số phế phẩm trong 100 sản phẩm kiểm tra
X~ B(100; 0,4)
Ta thấy n=100 lớn và p=0,4 *không quá gần 0 và 1* nên ta xấp xỉ:
X~N(np, npq) = N(100*0,4 , 100*0,4*0,6)
Vậy X~N(40 ; 24)
(tra bảng E)
1)

$$P(50 \le X \le 100) = \phi\left(\frac{100-40}{\sqrt{24}}\right) - \phi\left(\frac{50-40}{\sqrt{24}}\right) = \phi(12,25) - \phi(2,04)$$

$= 0,5 – 0,4793 = 0,0207$ *(tra bảng F)*

2) $$P(0 <= X <= 40) = \phi\left(\frac{40-40}{\sqrt{24}}\right) - \phi\left(\frac{0-40}{\sqrt{24}}\right) = \phi(0) + \phi(8,16)$$

$= 0+0,5 = 0,5$

61

XẤP XỈ SIÊU BỘI QUA NHỊ THỨC
XẤP XỈ NHỊ THỨC QUA POISSON

- VD5:
- Hộp có 20000 bi, trong đó có 200 bi T. Lấy ngẫu nhiên 100 bi từ hộp. Tính xác suất lấy được 5 bi T?
- Giải:
- Gọi X= số bi T lấy được trong 100 bi lấy ra
- X~H(20000, 200, 100)
- Do n=100 << N= 20000 nên xấp xỉ X~B(100; 0,01)
- Do n=100 lớn và p=0,01 nhỏ gần 0 nên xấp xỉ X~P(1)
- P(X=5) = exp(-1).1^5/ 5! = 0,0031

62

XẤP XỈ SIÊU BỘI QUA NHỊ THỨC ; XẤP XỈ NHỊ THỨC QUA CHUẨN

VD6: Hộp có 20000 bi, trong đó có 8000 bi T. Lấy ngẫu nhiên 100 bi từ hộp. Tính xs lấy được ít nhất 50 bi T?

- Giải:
- Gọi X= số bi T lấy được trong 100 bi lấy ra
- X~H(20000, 8000, 100)
- Do n=100 << N= 20000 nên xấp xỉ X~B(100; 0,4)
- Do n=100 lớn và p=0,4 không quá gần 0 và 1 nên xấp xỉ X~N(40; 24)

$$P(50 \le X \le 100) = \phi\left(\frac{100-40}{\sqrt{24}}\right) - \phi\left(\frac{50-40}{\sqrt{24}}\right) = \phi(12,25) - \phi(2,04)$$

$= 0,5 – 0,4793 = 0,0207$ *(tra bảng F)*

63

CÁC ĐỊNH LÝ

X_1 , X_2 là 2 đại lượng ngẫu nhiên **độc lập**

1) $X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$
$\Rightarrow X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2, p)$

2) $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$
$\Rightarrow X_1+X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\Rightarrow X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

64

- VD1:
- Người thứ nhất tung 1 con xúc xắc 10 lần.
- Người thứ hai tung 1 con xúc xắc 15 lần.
- Gọi X= số lần được mặt 1 trong 25 lần tung
- 1) Tính xác suất P(X>=3)?
- 2) Xác định E(X), var(X), mod(X)?

65

- Giải:
- Gọi X1= số lần được mặt 1 của người thứ nhất
- X1~B(10; 1/6)
- Gọi X2= số lần được mặt 1 của người thứ hai
- X2~B(15; 1/6)
- Ta có X= X1+X2 ~B(25; 1/6)

- 1) P(X>=3) = 1-P(X<=2) = 1-0,1887 = 0,8113
- 2) E(X)= 25(1/6) ; var(X)= 25(1/6)(5/6)
- 3,33 <= 25/6-(5/6)<= Mod(X) <= 25/6+(1/6) = 4,33
- $\rightarrow$ mod(X) = 4

66

- VD2:
- Một tổng đài điện thoại có 3 nhân viên trực, làm việc ở 3 *line* độc lập nhau. Số cuộc gọi đến từng nhân viên có quy luật phân phối Poisson, với số cuộc gọi trung bình đến từng nhân viên lần lượt là 2, 4, 5 cuộc/phút.
- 1) Tính xác suất trong 1 phút có ít nhất 3 cuộc gọi đến tổng đài?
- 2) Xác định số cuộc gọi tin chắc nhất đến tổng đài trong 1 phút?

67

- Giải:
- Gọi Xi = số cuộc gọi đến nhân viên thứ i trong 1 phút
- X1~P(2)
- X2~P(4)
- X3~P(5)
- Gọi X = số cuộc gọi đến tổng đài trong 1 phút
- X= X1+X2+X3 ~P(2+4+5) = P(11)

- 1) P(X>=3) = 1-P(X<=2) = 1-0,0012 = 0,9988
- 2) 11-1 <= mod(X) <= 11 $\rightarrow$ mod(X) = 10 hoặc 11

68

- VD3:
- Trại gia cầm nuôi gà và vịt.
- Trọng lượng của gà có quy luật phân phối N(3 kg ; (0,6 kg)²).
- Trọng lượng của vịt có quy luật phân phối N(2 kg ; (0,5 kg)²).
- Lấy ngẫu nhiên 2 con gà và 3 con vịt của trại.
- Tính xác suất tổng trọng lượng của 5 con này nằm trong khoảng (10 ; 16) kg?

69

- Giải:
- X_i = trọng lượng của con gà thứ i. $X_i \sim N(2kg; (0,4\ kg)^2)$
- Y_i = trọng lượng của con vịt thứ i. $Y_i \sim N(3\ kg; (0,5\ kg)^2)$
- X = trọng lượng của 5 con này
- $X = X_1+X_2+Y_1+Y_2+Y_3$; $X \sim N(12\ kg; (1,2124\ kg)^2)$

  $E(X)= E(X_1+X_2+Y_1+Y_2+Y_3) = 2E(X_1)+3E(Y_1)$

  $= 2(3)+3(2) = 12$

  $Var(X) = var(X_1+X_2+Y_1+Y_2+Y_3) = 2var(X_1)+3var(Y_1)$

  $= 2(0,6)^2+3(0,5)^2 = 1,47 = (1,2124)^2$
- $P(10 < X < 16) = \phi([16-12]/ 1,2124) - \phi([10-12]/ 1,2124)$

  $= \phi(3,30) + \phi(1,65) = 0,4995+0,4505 = 0,95$

70

VI)QUY LUẬT PP CHI BÌNH PHƯƠNG

Giả sử X_i (i =1, .., n) là các *ĐLNN* độc lập tuân theo quy luật phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$. Đặt:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

thì χ^2 tuân theo quy luật Chi bình phương với n bậc tự do, ký hiệu $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

Hàm mật độ xác suất của *ĐLNN* χ^2 xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} C.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$$

với : $C = \dfrac{1}{\Gamma(n/2).2^{n/2}}$; $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\alpha > 0$.

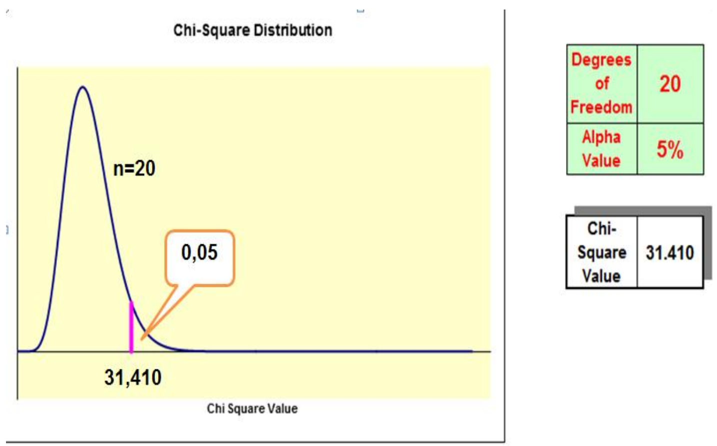
Tính chất : $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

$E(\chi^2)= n$, $var(\chi^2)= 2n$

Lưu ý : Đồ thị không có phần âm

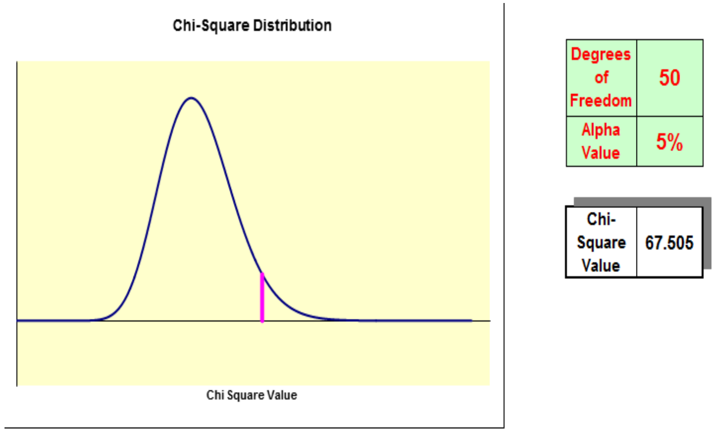
71

ĐỒ THỊ CỦA PP CHI BÌNH PHƯƠNG VỚI 20 BẬC TỰ DO



72

ĐỒ THỊ CỦA PP CHI BÌNH PHƯƠNG VỚI 50 BẬC TỰ DO (GẦN GIỐNG ĐỒ THỊ CỦA PHÂN PHỐI CHUẨN)



73

PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG VỚI EXCEL

	A	B
1	=CHIDIST(31.4105,20)	=1-CHIDIST(31.4105,20)
2	0.05000	0.95000
3	P(X>31,4105)	P(X<31,4105)
4	X ~ χ2(20)	
5	PHÂN PHỐI KHÔNG CÓ GIÁ TRỊ ÂM	

74

VII)PHÂN PHỐI *T-STUDENT*

Giả sử hai *ĐLNN* độc lập *X* có phân phối chuẩn tắc *N*(0,1) và *Y* có phân phối theo quy luật Chi bình phương với *n* bậc tự do $\chi^2(n)$. Khi đó :

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

có phân phối *t-student* với *n* bậc tự do *(Degrees of freedom)*, ký hiệu $t \sim t(n)$. Hàm mật độ xác suất của *t-student* xác định bởi biểu thức:

$$f(x) = C.(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{Với} \quad C = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}.\Gamma(n/2)}$$

Tính chất: $t \sim t(n)$

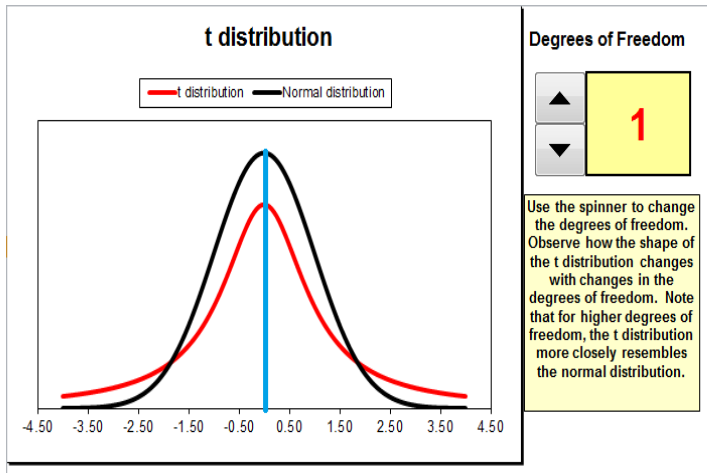
-$E(t)$= 0, $var(t)$= $\frac{n}{n-2}$

-Đồ thị phân phối xác suất của *t* đối xứng qua trục tung. Khi bậc tự do *n* tăng lên thì phân phối *t-student* xấp xỉ với phân phối chuẩn tắc *N*(0,1).

Lưu ý : Ta không xét bài tập cho quy luật Student.

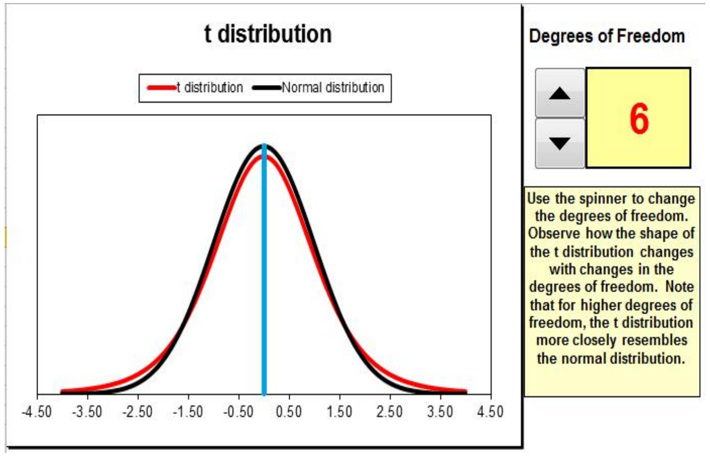
75

ĐỒ THỊ CỦA PP STUDENT T VỚI BẬC TỰ DO 1



76

ĐỒ THỊ CỦA PP STUDENT T VỚI BẬC TỰ DO 6
(BẬC TỰ DO CÀNG CAO THÌ PP T CÀNG TIỆM CẬN PP CHUẨN TẮC)



77

PHÂN PHỐI T VỚI EXCEL

	A	B	C	D
1	1.96	=TDIST(1.96,20,1)	=TDIST(1.96,20,2)	=1-TDIST(1.96,20,1)
2	1.96	0.03204	0.06408	0.96796
3		P(X>1.96)	P(|X|>1.96)	P(X<1.96)= 1-P(X>1.96)
4			X~T(20)	
5				
6	-1.96	=1-TDIST(1.96,20,1)	PHÂN PHỐI	=TDIST(1.96,20,1)
7	-1.96	0.96796	ĐỐI XỨNG	0.03204
8		P(X>-1.96)	QUA TRỤC TUNG	P(X<-1.96)
9			X~T(20)	

78

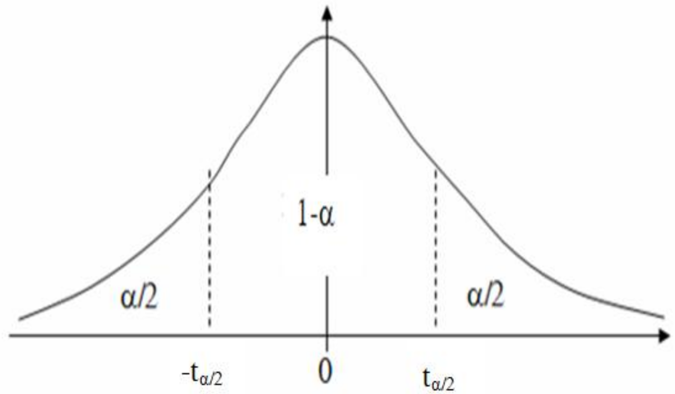
IX) CÁC MỨC PHÂN VỊ CỦA Quy Luật PP

- Phân vị mức α, $\alpha/2$ của phân phối chuẩn tắc
- Phân vị mức α, $\alpha/2$ của phân phối Student

- *Giả sử X là 1 phân phối liên tục nào đó.*
- $u_{\alpha/2}$ *gọi là phân vị mức* $\boldsymbol{\alpha/2}$ *của X nếu*
  $P(X > u_{\alpha/2}) = \boldsymbol{\alpha/2}$
- u_{α} *gọi là phân vị mức* $\boldsymbol{\alpha}$ *của X nếu*
  $P(X > u_{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$

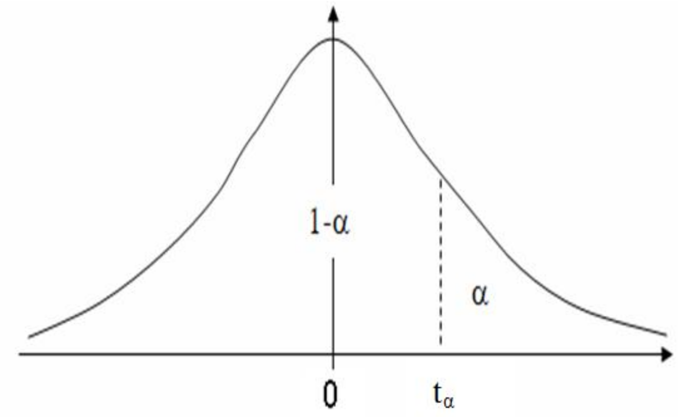
79

PHÂN VỊ MỨC $\alpha/2$ CỦA PP CHUẨN TẮC
Dùng Casio fx-570 VN Plus để tính phân vị



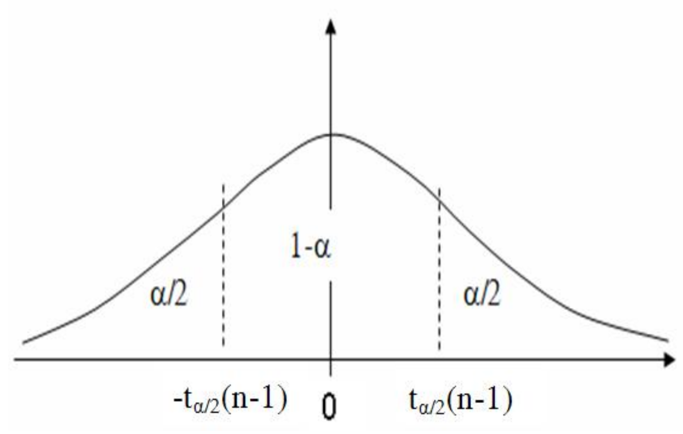
80

PHÂN VỊ MỨC α CỦA PP CHUẨN TẮC



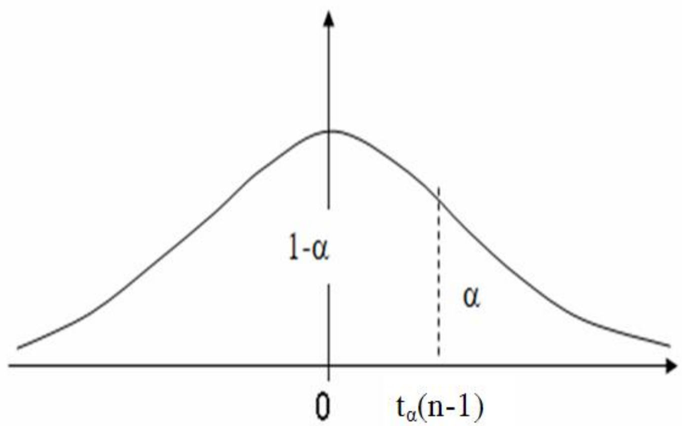
81

PHÂN VỊ MỨC α/2 CỦA PP STUDENT T có (n-1) bậc tự do



82

PHÂN VỊ MỨC α CỦA PP STUDENT T có (n-1) bậc tự do



83

TÍNH PHÂN VỊ VỚI EXCEL

	A	B	C
1	α	Phân vị mức α/2 (tα/2)	Phân vị mức α (tα)
2	**0.05**	**=NORMSINV(1-A1/2)**	**=NORMSINV(1-A1)**
3	0.05	1.9600	1.6449
4	0.01	2.5758	2.3263
5	0.10	1.6449	1.2816
6			
7		PHÂN PHỐI CHUẨN TẮC	
8			
9			
10	α	Phân vị mức α/2 (tα/2(20))	Phân vị mức α (tα(20))
11	**0.05**	**=TINV(A8,20)**	**=TINV(2*A8,20)**
12	0.05	2.0860	1.7247
13	0.01	2.8453	2.5280
14	0.10	1.7247	1.3253
15			
16		PHÂN PHỐI STUDENT CÓ BẬC TỰ DO 20	

84

LƯU Ý VỀ KÝ HIỆU CÁC PHÂN VỊ TRONG CÁC TÀI LIỆU

Sách Bài tập XSTK và Bài giảng của Tui	Sách ôn luyện thi Cao học của Khoa	Phân phối
$z_{\alpha/2}$ hoặc $t_{\alpha/2}$	$z_{\alpha/2}$	Chuẩn tắc
z_{α} hoặc t_{α}	z_{α}	Chuẩn tắc
$t_{\alpha/2}(n)$	$t_{\alpha/2}$	Student có bậc tự do n
$t_{\alpha}(n)$	t_{α}	Student có bậc tự do n
$\chi^2_{\alpha/2}(n)$ và $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$	$\chi^2_{\alpha/2}$ và $\chi^2_{1-\alpha/2}$	Chi bình phương có bậc tự do n
$\chi^2_{\alpha}(n)$ và $\chi^2_{1-\alpha}(n)$	χ^2_{α} và $\chi^2_{1-\alpha}$	Chi bình phương có bậc tự do n
Hãy để cuộc sống luôn muôn màu muôn vẻ, đừng bóp chết nó bằng 1 khuôn phép nào đó!		

85

Trong sách ôn luyện thi Cao học, các giá trị phân vị được lấy 3 chữ số thập phân

Z~N(0,1). Ta có $P(Z> z_{\alpha/2})= \alpha/2$ và $P(Z< z_{\alpha/2})= 1-\alpha/2$ và $P(|Z|< z_{\alpha/2})= 1-\alpha= 2\phi(z_{\alpha/2})$

Z~N(0,1). Ta có $P(Z> z_{\alpha})= \alpha$ và $P(Z< z_{\alpha})= 1-\alpha$ và $P(|Z|< z_{\alpha})= 1-2\alpha= 2\phi(z_{\alpha})$

α	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$z_{\alpha/2}$	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695	1.645
z_{α}	2.326	2.054	1.881	1.751	1.645	1.555	1.476	1.405	1.341	1.282

T~T(20). Ta có $P(T> t_{\alpha/2})= \alpha/2$ và $P(T< t_{\alpha/2})= 1-\alpha/2$ và $P(|T|< t_{\alpha/2})= 1-\alpha$

T~T(20). Ta có $P(T> t_{\alpha})= \alpha$ và $P(T< t_{\alpha})= 1-\alpha$ và $P(|T|< t_{\alpha})= 1-2\alpha$

α	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$t_{\alpha/2}$	2.845	2.528	2.336	2.197	2.086	1.994	1.914	1.844	1.782	1.725
t_{α}	2.528	2.197	1.994	1.844	1.725	1.624	1.537	1.459	1.389	1.325

86

- **X) BÀI TẬP TỔNG HỢP**
- Trong thực hành, người ta ít khi xét các quy luật pp một cách « lẻ loi một mình », người ta thường « hợp hôn » 2 hoặc 3 quy luật với nhau trong 1 bài toán. Điều này đòi hỏi người làm phải biết :
  - Phân biệt các quy luật pp
  - Khi nào thì áp dụng các quy luật pp nào được
  - và áp dụng như thế nào
- Cuộc « hợp hôn » này có hoàn hảo hay không là do ta có « khéo tay hay làm » không!
- Hãy *làm bài tập nhiều* thì bạn sẽ có một «*linh cảm tốt*» !!!

87

- **VD1:**
- Một sọt cam có 1000 trái trong đó có 400 trái hư. Lấy ngẫu nhiên ra 3 trái.
- 1) Tính xác suất lấy được 2 trái hư ?
- 2) Tính xác suất lấy được ít nhất 1 trái hư ?

88

Giải VD1:

Gọi X là số trái hư trong 3 trái lấy ra.

X ~ H(1000, 400, 3)

Ta thấy n = 3 << N = 1000 nên ta xấp xỉ :

X ~ B(3; 0,4)

với p = 400/1000 = 0,4

1) P(X = 2)= $C_3^2\ 0.4^2\ 0.6^1$ = 0,2880

2) P(X >= 1) = 1-P(X=0)= 1-0,2160

= 0,7840

89

- **VD2:**
- Xác suất để một Ấn công lành nghề sắp lầm một mẫu tự khi làm sách là 0,002. Tính xác suất để trong 2000 mẫu tự thì Ấn công sắp lầm:
- 1) Đúng 1 mẫu tự
- 2) Ít hơn 5 mẫu tự
- 3) Không lầm mẫu tự nào.

90

Giải VD2:

Gọi X là số mẫu tự mà ấn công sắp lầm trong 2000 mẫu tự.

X~ B(2000; 0,002)

n = 2000 khá lớn và p = 0,002 khá bé

Áp dụng công thức gần đúng theo Poisson

Ta có : X ≈ P(4) với $\lambda = np = 2000 \times 0{,}002 = 4$

1) P(X = 1) = $\frac{e^{-4}.4^1}{1!}$ =0,0733

2) $P(0 \le X \le 4)$ = P(X=0)+...+(X=4)= 0,6288

3) P(X = 0)= 0,0183

91

- **VD3:**
- Ở một tổng đài điện thoại, các cuộc điện thoại gọi đến xuất hiện ngẫu nhiên, độc lập với nhau và cường độ trung bình 2 cuộc gọi trong 1 phút .

Tìm xác suất để:

- 1) Có đúng 5 cuộc điện thoại trong 2 phút
- 2) Không có cuộc nào trong khoảng thời gian 30 giây

92

Giải VD3:

- 1) X= số cuộc điện thoại xuất hiện trong khoảng thời gian 2 phút . X ~ P(4)
  $P(X=5) = e^{-4}\, 4^5/5! = 0{,}1560$

- 2) X = số cuộc điện thoại xuất hiện trong khoảng thời gian 30 giây . X ~ P(1)
  $P(X=0) = e^{-1} = 0{,}3679$

93

- VD4:
- Một trạm rửa xe tự động có cường độ xe đến rửa trung bình là 2 xe/phút.
- 1) Tính xác suất trong 5 phút có 9 xe đến rửa?
- 2) Tính xác suất để trong vòng a phút có ít nhất 1 xe đến rửa? Xác định a để xác suất này >= 0,95?

94

- Giải:
- 1) X= số xe đến rửa trong thời gian 5 phút.
- X~P(10)
- $P(X=9) = e^{-10}.10^9 / 9! = 0{,}1251$

- 2) Y= số xe đến rửa trong thời gian a phút
- Y~P(2a)
- $P(Y>=1) = 1-P(Y=0) = 1- e^{-2a}$
- $P(Y>=1) >= 0{,}95 \rightarrow 1-e^{-2a} >= 0{,}95$
- $\rightarrow e^{-2a} <= 0{,}05 \rightarrow a >= -\ln(0{,}05) / 2 = 1{,}4979$

95

- **VD5:**
- Sản phẩm sau khi hoàn tất được đóng thành kiện, mỗi kiện gồm 10 sản phẩm với tỷ lệ thứ phẩm là 20%. Trước khi mua hàng, khách hàng muốn kiểm tra bằng cách từ mỗi kiện chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm.
- 1) Tìm luật ppxs của số sp tốt trong 3 sp lấy ra? (*xác định xem 1 hộp có bao nhiêu sp tốt, bao nhiêu sp xấu*)
- 2) Nếu cả 3 sp được lấy ra đều là sp tốt thì khách hàng sẽ đồng ý mua kiện hàng đó.

Tính xác suất để khi kiểm tra 100 kiện thì có ít nhất 60 kiện được mua.

96

Giải VD5:

1) X = số sp tốt trong 3 sản phẩm lấy ra. X ~ H(10, 8, 3)
p = P(mua kiện hàng) = P(X=3) = 0,4667

2) Y = số kiện được mua trong 100 kiện
Y ~ B (100 ; 0,4667) ≈ N(np, npq) = N(46,67 ; 24,8891)

$$P(60 \le Y \le 100) = \phi\left(\frac{100-46{,}67}{\sqrt{24{,}8891}}\right) - \phi\left(\frac{60-46{,}67}{\sqrt{24{,}8891}}\right)$$

$$= \phi(10{,}69) - \phi(2{,}67)$$

= 0,5–0,4962 =0,0038 *(tra bảng F)*

97

VD6:

Trọng lượng của 1 loại trái cây có quy luật phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 250g, độ lệch chuẩn về trọng lượng là 5g.

1) Một người lấy ngẫu nhiên 1 trái từ trong sọt trái cây ra. Tính xác suất người này lấy được trái loại 1 (Quy ước: trái loại 1 là trái có trọng lượng > 260 g)

2) Từ sọt lấy ngẫu nhiên ra 1 trái. Nếu lấy được trái loại 1 thì người này sẽ mua sọt đó. Người này kiểm tra 100 sọt, tính xác suất mua được 6 sọt.

98

Giải:

1) X= trọng lượng của loại trái cây này (g)

$X \sim N(250g, (5g)^2)$

P (X > 260)= 0,5-ϕ([260-250]/5)
= 0,5–ϕ(2) = 0,0228

2) Y= số sọt được mua.
Y ~B (100 ; 0,0228) ≈ P (2,28)

$$P(Y=6) = \frac{e^{-2{,}28}\, 2{,}28^{6}}{6!} = 0{,}020$$

Nhận xét câu 2 VD5 và câu 2 VD6, xem có dạng giống nhau không?

99

MỜI GHÉ THĂM TRANG WEB:

- https://sites.google.com/a/ueh.edu.vn/phamtricao/
- https://sites.google.com/site/phamtricao/

100