Chương 1

TỔ HỢP CƠ BẢN

lvluyen@hcmus.edu.vn

bit.do/toantohop

FB: **http://bit.do/fbtoantohop**

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

– – –– Tháng 9 năm 2017 – – ––

Chương 1. TỔ HỢP CƠ BẢN

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
2. Tổ hợp
3. Tổ hợp lặp

1.1. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. Nguyên lý cộng
2. Nguyên lý nhân
3. Nguyên lý Dirichlet

1.1.1. Nguyên lý cộng

Giả sử ta phải thực hiện một công việc bằng cách chọn một trong k sự lựa chọn các phương pháp khác nhau $T_1, T_2, ..., T_k$. Để thực hiện T_i $(1 \leq i \leq k)$ ta có n_i cách. Vậy số cách thực hiện công việc trên là

$$\boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

Ví dụ. Một sinh viên chọn một đề tài từ một trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong các danh sách lần lượt là 23, 15, 19. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn đề tài?

Đáp án. $23 + 15 + 19 = 57$ cách.

Nhận xét. Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hữu hạn đôi một rời nhau, khi đó

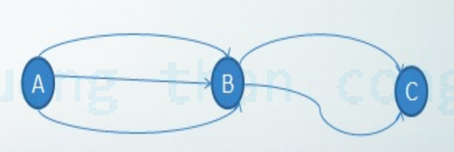
$$\boldsymbol{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|}.$$

1.1.2. Nguyên lý nhân

Giả sử một thủ tục bao gồm k công việc kế tiếp nhau $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Nếu công việc T_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, và sau khi chọn cách thực hiện cho T_1 ta có n_2 cách thực hiện T_2, v.v... cho đến cuối cùng, sau khi chọn cách thực hiện các công việc $T_1, T_2, ..., T_{k-1}$ ta có n_k cách thực hiện T_k. Vậy số cách thực hiện thủ tục này là

$$\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$$

Ví dụ.



Hỏi có nhiêu cách đi từ A đến C?

Đáp án. $3 \times 2 = 6$ cách.

Nhận xét. Quy tắc nhân có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hữu hạn, khi đó

$$|\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k}| = |\boldsymbol{A_1}| \times |\boldsymbol{A_2}| \times \ldots \times |\boldsymbol{A_k}|.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8?

Giải. Mỗi bit có 2 cách chọn: 0 hoặc 1. Để tạo ra một chuỗi bit có độ dài 8 ta lần lượt chọn giá trị cho 8 bit. Theo nguyên lý nhân ta có số chuỗi bit có độ dài 8 là $2^8 = 256$.

Ví dụ. Cho tập A gồm 6 phần tử và tập B gồm 10 phần tử. Hỏi

a) Có bao nhiêu ánh xạ từ A vào B?

b) Có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?

Giải. a) Với mỗi phần tử x của A ta có 10 cách chọn ảnh (vì B có 10 phần tử). Để tạo ra một ánh xạ từ A vào B ta lần lượt chọn ảnh của 6 phần tử của A. Theo nguyên lý nhân, ta có 10^6 ánh xạ từ A vào B.

b) Giải sử $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. Ta chia bài toán thành 6 bước:

Bước 1. Chọn ảnh của x_1 có 10 cách.
Bước 2. Chọn ảnh của x_2 có $10 - 1 = 9$ cách.
....
Bước 6. Chọn ảnh của x_6 có $10 - 5 = 5$ cách.

Vậy số đơn ánh từ A vào B là: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$.

Ví dụ. Mật khẩu máy tính dài từ 6 đến 8 ký tự. Mỗi ký tự có thể là chữ số hoặc chữ hoa. Mỗi mật khẩu phải có ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

Giải. Gọi L_6, L_7, L_8 là tổng số mật khẩu có chiều dài tương ứng là $6, 7, 8$. Ta có

$$L_6 = (10 + 26)^6 - 26^6,\ L_7 = (10 + 26)^7 - 26^7,\ L_8 = (10 + 26)^8 - 26^8$$

Dùng nguyên lý cộng ta có tổng số mật khẩu là

$$P = L_6 + L_7 + L_8 = 36^6 + 36^7 + 36^8 - (26^6 + 26^7 + 26^8) = 2684483063360.$$

1.1.3. Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu)

Ví dụ.

- Trong 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.
- Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con trở lên.

Định nghĩa. ***Giá trị trần*** của x, ký hiệu là $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng x.

Ví dụ. $\lceil 2.1 \rceil = 3$; $\lceil 1.9 \rceil = 2$; $\lceil 4 \rceil = 4$; $\lceil -1.1 \rceil = -1$; $\lceil -2.9 \rceil = -2$;

Nguyên lý Dirichlet

Nếu có n vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ đồ vật.

Chứng minh. Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số vật nhỏ hơn hoặc bằng

$$k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\frac{n}{k}\right) = n.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có n vật cần đặt. ∎

Ví dụ. Trong 100 người thì có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ cùng tháng sinh.

Ví dụ. Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất 6 sinh viên có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc A, B, C, D và E?

Giải. Gọi số sinh viên của lớp là N. Theo nguyên lý Dirichlet ta có $\lceil \frac{N}{5} \rceil \geq 6$. Khi đó

$$N > 25.$$

Do đó ta chọn $N = 26$. Vậy lớp phải có ít nhất 26 sinh viên.

Ví dụ. Chứng minh rằng trong 10 số tự nhiên bất kỳ ta có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 9.

Giải. Khi chia 10 số bất kỳ cho 9 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 9 số dư: $0, 1, 2, \ldots, 7, 8$. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Khi đó hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 9. ■

Ví dụ.(tự làm) Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và A là tập con của X có 6 phần tử. Khi đó trong A sẽ chứa hai phần tử có tổng bằng 10.

Hướng dẫn. Ta lập 5 hộp như sau:

$$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}.$$

Do A có 6 phần tử nên khi sắp xếp các phần tử này vào 5 hộp ta sẽ có một hộp chứa 2 phần tử. Rõ ràng tổng 2 phần tử này bằng 10. ■

Ví dụ. Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người tham dự họp là như nhau.

Giải. Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả).

Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n-1$ nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau. ■

2.2. Tổ hợp

1. Hoán vị
2. Chỉnh hợp
3. **Tổ hợp**

2.2.1. Hoán vị

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một ***hoán vị của n*** phần tử.

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó A có các hoán vị sau:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

Mệnh đề. *Số các hoán vị của n phần tử, ký hiệu* $\boldsymbol{P_n}$, *là*

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1}$$

Quy ước $0! = 1$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X?

Ví dụ. Cần sắp xếp 5 sinh viên A, B, C, D, E thành một dãy hàng dọc

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai sinh viên A và B luôn đứng ở đầu hàng?

Giải. a) Để xếp 5 sinh viên theo một dãy hàng dọc ta chỉ cần xếp 5 sinh viên đó theo thứ tự. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách.

b) Do 2 bạn A, B đứng đầu hàng nên có 2! cách xếp 2 bạn A và B. Vì còn 3 sinh viên nên ta có 3! cách xếp vào 3 vị trí còn lại. Vậy theo nguyên lý nhân ta có: $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$ cách.

Ví dụ. Từ 6 chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Giải. Để có một số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau ta sắp xếp 6 chữ số đã cho theo thứ tự. Do đó ta có $P_6 = 6! = 720$ số.

Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số có 6 chữ số khác nhau.

- Nếu x là số lẻ thì $f \in \{1, 3, 5\}$ nên f có 3 cách chọn. Năm chữ số $abcde$ là hoán vị của 5 chữ số còn lại (vì đã loại đi số f), nên có 5! cách chọn. Vậy theo nguyên lý nhân ta có $3 \times 5! = 360$ số lẻ.
- Tương tự như lý luận trên, ta có 5! số chia hết cho 5. Như vậy số không chia hết cho 5 là $6! - 5! = 600$.

Ví dụ.(tự làm) Cần sắp xếp 3 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam thành một hàng dọc.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 sinh viên nữ luôn đứng liền nhau?

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam?

Đáp án. a) $5! \times 6 \times 3! = 4320$ cách b) $3 \times 5 \times 6! = 10800$ cách

Ví dụ.(tự làm) Có 3 luật sư, 4 bác sĩ và 5 kỹ sư xếp thành một hàng dọc sao cho các đồng nghiệp phải đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp? Nếu yêu cầu thêm các luật sư không đứng ở đầu hàng thì có tất cả bao nhiêu cách xếp?

Đáp án. $3! \times 3! \times 4! \times 5!$ $\quad$ $2 \times 2! \times 3! \times 4! \times 5!$

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bác sĩ, 4 kỹ sư, 3 luật sư vào một bàn dài có 12 chỗ ngồi (được đánh số từ 1 đến 12) trong các trường hợp sau:

a) không có điều kiện gì thêm?

b) các đồng nghiệp ngồi cạnh nhau?

c) các bác sĩ ngồi cạnh nhau ở một đầu bàn, còn các kỹ sư, luật sư ngồi xen kẻ ở đầu bàn còn lại?

Đáp án. a) $12!$ $\quad$ b) $3! \times 5! \times 4! \times 3!$ $\quad$ c) $2 \times 5! \times 4! \times 3!$

2.2.2. Chỉnh hợp

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử của tập hợp A được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n*** phần tử.

Ví dụ. Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb$$

Mệnh đề. *Số các chỉnh hợp chập k của n, ký hiệu $\boldsymbol{A_n^k}$, là*

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Đáp án. A_6^3 số.

Ví dụ.(tự làm) Một lớp có 15 sinh viên nam và 20 sinh viên nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam.

c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ.

Đáp án. $a)\, A_{35}^3$

$b)\, 15 \times A_{34}^2$

$c)\, A_{35}^3 - A_{15}^3$

2.2.3. Tổ hợp

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n*** phần tử.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

Định nghĩa. Số tổ hợp chập k của n phần tử, được kí hiệu $\binom{n}{k}$ hay C_n^k, là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ. Một lớp có 30 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn?

Đáp án. C_{30}^{10} cách.

Ví dụ.(tự làm) Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Không phân biệt nam nữ?

b) Có 4 nam và 2 nữ?

c) Có ít nhất là 4 sinh viên nam?

Đáp án. a) C_{40}^{6} b) $C_{25}^{4} \times C_{15}^{2}$

c) $C_{25}^{4} \times C_{15}^{2} + C_{25}^{5} \times C_{15}^{1} + C_{25}^{6} \times C_{15}^{0}$

Ví dụ.(tự làm) Cho $S = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$.

a) Có bao nhiêu tập hợp con?

b) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có đúng 5 phần tử?

c) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có không quá 4 phần tử?

Đáp án. a) 2^{10} b) C_{10}^{5} c) $C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3} + C_{10}^{4}$

3.3. Tổ hợp lặp

1. Hoán vị lặp
2. Chỉnh hợp lặp
3. Tổ hợp lặp
4. Khai triển lũy thừa của đa thức

3.3.1. Hoán vị lặp

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ AAABB?

Đáp án. 10

Ví dụ. Có thể nhận được bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Chuỗi SUCCESS chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để tạo ra một chuỗi ký tự từ các ký tự này, ta thấy

- Có C_7^3 cách chọn 3 vị trí cho 3 chữ S, còn lại 4 vị trí trống.
- Có C_4^2 cách chọn 2 vị trí cho 2 chữ C, còn lại 2 vị trí trống.
- Có C_2^1 cách chọn vị trí cho chữ U. Và cuối cùng có C_1^1 cách chọn vị trí chữ E.

Theo nguyên lý nhân, số chuỗi ký tự khác nhau là:

$$C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_1^1 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{1!}{1! \times 0!}$$
$$= \frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420.$$

Định nghĩa. Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i $(1 < i \leq k)$ giống hệt nhau, nghĩa là

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là ***một hoán vị lặp*** của n.

Định lý. *Số hoán vị lặp của n trong trường hợp trên là*

$$\frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{n_1}! \times \mathbf{n_2}! \times \cdots \times \mathbf{n_k}!}$$

Chứng minh. Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy

- Có $C_n^{n_1}$ cách chọn vị trí cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ vị trí trống.
- Sau đó có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách chọn vị trí cho n_2 phần tử loại 2, còn lại $n - n_1 - n_2$ vị trí trống.
- Tiếp tục chọn vị trí các phần tử loại 3, loại 4,..., loại $k - 1$.
- Cuối cùng có $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách chọn vị trí cho n_k phần tử loại k.

Theo nguyên lý nhân tất số các hoán vị là:

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times \cdots \times C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ ATAHATAT?

Giải. Trong từ ATAHATAT có 4 chữ A, 3 chữ T và 1 chữ H. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} = 280$$

Ví dụ.(tự làm) Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

Hướng dẫn. Số tự nhiên đó có 10 chữ số, trong đó có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3. Do đó ta sẽ lập được

$$\frac{10!}{5! \times 2! \times 3!} = 2520 \text{ số}$$

3.3.2. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ. Từ bảng chữ cái tiếng Anh, có thể lặp được bao nhiêu chuỗi chữ cái có độ dài 5?

Đáp án. 26^5

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. ***Chỉnh hợp lặp*** chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử có thể lặp lại.

Định lý. *Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là n^k.*

Chứng minh. Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Mỗi chỉnh hợp lặp chập k của n là bộ thứ tự gồm k phần tử $x_1\, x_2 \ldots x_k$. Ta có, mỗi x_i có n cách chọn. Áp dụng nguyên lý nhân, ta có số chỉnh hợp lặp chập k của n là $\boldsymbol{n^k}$. ■

3.3.3. Tổ hợp lặp

Ví dụ. Có 3 loại nón A, B và C, An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Đáp án. An có 6 cách chọn là AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Định nghĩa. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là ***tổ hợp lặp*** chập k của n. Số tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là $\boldsymbol{K_n^k}$

Định lý. *Số các tổ hợp lặp chập k của n là* $\boldsymbol{K_n^k = C_{n+k-1}^k}$.

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng "|" và k ngôi sao "$*$". Ta dùng $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn.

Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao khi một phần tử loại i xuất hiện trong tổ hợp. Chẳng hạn, một tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử được biểu thị bởi

$$* \; * \mid * \mid \mid * \; * \; *$$

Khi đó tổ hợp chứa đúng 2 phần tử loại một, 1 phần tử loại hai, không có phần tử loại ba và 3 phần tử loại bốn.

Mỗi dãy $n-1$ thanh và k ngôi sao ứng với chuỗi có độ dài $n+k-1$. Do đó số các tạo dãy $n-1$ thanh đứng và k ngôi sao chính là số tổ hợp chập k từ tập $n+k-1$ phần tử. ■

Hệ quả. *Số nghiệm nguyên không âm* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ *của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

là $K_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Giải. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình là: $K_3^{10} = C_{12}^{10}$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \geq 4; x_2 > 2; x_3 > 5; x_4 \geq -2$

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành

$$x_1 \geq 4; x_2 \geq 3; x_3 \geq 6; x_4 \geq -2.$$

Đặt

$$y_1 = x_1 - 4;\ y_2 = x_2 - 3;\ y_3 = x_3 - 6;\ y_4 = x_4 + 2.$$

Khi đó $y_i \geq 0$ với mọi $1 \leq i \leq 4$. Phương trình $(*)$ trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \qquad (**)$$

Ta có số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số nghiệm của phương trình $(**)$. Do đó số nghiệm của phương trình $(*)$ là $K_4^9 = C_{12}^9$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4. \quad (*)$

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành

$$0 \leq x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0.$$

Xét các điều kiện sau:

- $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (**)$
- $x_1 > 3;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (***)$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa các điều kiện $(*), (**), (***)$. Ta có $\boldsymbol{p = q - r}$.

Trước hết ta tìm q. Đặt

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5; y_4 = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{16}^{13}$. Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự ta có $r = K_4^9 = C_{12}^9$. Như vậy

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^{9} = 560 - 220 = 340.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(*)$ là 340.

Hệ quả. *Số cách chia k vật giống nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n.*

Ví dụ.(tự làm) Tìm số cách chia 15 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ.

Đáp án. $K_4^{15} = C_{18}^{15}$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11.$$

Giải. Đặt $x_4 = 11 - (x_1 + x_2 + x_3)$. Khi đó $x_4 \geq 0$ và bất phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

với x_1, x_2, x_3, x_4 là các số nguyên không âm. Do đó số nghiệm của bất phương trình là: $K_4^{11} = C_{14}^{11} = 364$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$x + y + z \leq 20,$$

biết $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z \leq 15$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 6, y \geq 2, z \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 16$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 5, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3$.

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu cách chia 18 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều có bi và đứa lớn nhất được ít nhất 6 viên bi.

3.3.4. Khai triển lũy thừa của đa thức

Định lý. *Cho x, y là biến và n là số tự nhiên. Khi đó*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.\end{aligned}$$

Chứng minh. Ta có

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y).$$

Các số hạng trong khai triển của $(x+y)^n$ sẽ có dạng $x^{n-k}y^k$ với $k = 0, 1, \ldots, n$. Để nhận được số hạng $x^{n-k}y^k$ ta chọn x từ $n-k$ tổng $(x+y)$ và có C_n^{n-k} cách chọn như vậy, khi đó y được chọn từ k tổng còn lại (chỉ có một cách duy nhất). Đó đó hệ số của $x^{n-k}y^k$ là C_n^{n-k} ■

Hệ quả. *Lần lượt cho $x = y = 1$ và $x = 1, y = -1$ vào khai triển trên ta có*

(i) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Ví dụ. Khai triển $(x+y)^4$

Giải.
$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} y^k \\ &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4. \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Khai triển $(2x - 3y)^5$

Ví dụ. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}$?

Giải. Dựa vào Định lý, ta có

$$\Big[2x+(-3y)\Big]^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k}(2x)^{25-k}(-3y)^{k}.$$

Do đó hệ số của $x^{12}y^{13}$ có được khi $k=13$. Suy ra hệ số cần tìm là:

$$C_{25}^{13}\,2^{12}(-3)^{13} = -33959763545702400.$$

Định lý. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các biến và n là số nguyên dương. Khi đó*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

Chứng minh. Tương tự như chứng minh công thức hoán vị lặp.

Ví dụ. Tìm hệ số của x^3y^5z trong khai triển $(x+2y-3z+t)^9$

Giải. Áp dụng Định lý trên, ta có số hạng chứa x^3y^5z là

$$\frac{9!}{3!\,5!\,1!\,0!}x^3(2y)^5(-3z)^1t^0 = -48384\,x^3y^5z.$$

Vậy hệ số của x^3y^5z là -48384.

Ví dụ.(tự làm) Cho khai triển của $(-x+y^2-2z+t)^{10}$

a) Tìm hệ số của x^5y^8t.

b) Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong phép khai triển trên?

Hướng dẫn. b) Mỗi số hạng có dạng $Mx^a(y^2)^bz^ct^d$. Suy ra các số hạng khác nhau của khai triển là số nghiệm của phương trình

$$a+b+c+d=10,$$

với a,b,c,d là các số nguyên không âm.

Đáp án. $K_4^{10} = C_{13}^{10}$.