# Chương 2

# HÀM SINH



lvluyen@hcmus.edu.vn

bit.do/toantohop

**FB**: http://bit.do/fbtoantohop



Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

— — —— Tháng 9 năm 2017 — — ——

# Chương 2. HÀM SINH

1. Định nghĩa
2. Hệ số hàm sinh
3. Phân hoạch số nguyên dương
4. Hàm sinh mũ
5. Phương pháp tổng
6. Giải hệ thức đệ quy bằng hàm sinh

# 2.1. Định nghĩa

**Định nghĩa.** Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy các số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$\boldsymbol{G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r + \cdots} = \sum_{r\geq 0} a_r x^r$$

được gọi là ***hàm sinh*** của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.



**Ví dụ.** Hàm sinh của dãy 1, 1, 1, 1, 1, 1 là

$$\boldsymbol{G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

**Ví dụ.** Xét tập hợp $X$ với $n$ phần tử, gọi $a_r$ là số tập con có $r$ phần tử của $X$. Khi đó $a_r = \binom{n}{r}$ là tổ hợp chập $r$ của $n$ phần tử. Ta được hàm sinh của dãy số thực $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là



$$G(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách chọn $r$ viên bi từ 3 viên bi màu xanh, 3 viên bi màu trắng, 3 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu vàng.

**Giải.** Để tìm $a_r$, ta đưa bài toán về bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r} \text{ với } 0 \leq e_i \leq 3.$$

Ở đây $e_1, e_2, e_3, e_4$ tương ứng là số viên bi màu xanh, trắng, đỏ và vàng.

Để tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được tất cả các hạng tử có dạng $\boldsymbol{x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}}$, trong đó $0 \leq e_i \leq 3$.

Như vậy ta cần 4 nhân tử và mỗi nhân tử là $\boldsymbol{x^0 + x^1 + x^2 + x^3}$ hay $\boldsymbol{1 + x + x^2 + x^3}$. Như vậy ta được hàm sinh cần tìm là

$$\left(\boldsymbol{1 + x + x^2 + x^3}\right)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + \\ + 31x^8 + 40x^7 + 20x^9 + 10x^{10} + 4x^{11} + x^{12}.$$

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách chọn $r$ quả từ 5 quả táo, 5 quả cam, 3 quả chanh, 3 quả ổi.

**Giải.** Tương tự như ví dụ trên, $a_r$ chính là số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r}$$

với $0 \leq e_1, e_2 \leq 5$ và $0 \leq e_3, e_4 \leq 3$.



Để tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$, trong đó $0 \leq e_1, e_2 \leq 5$ và $0 \leq e_3, e_4 \leq 3$. Do đó

- Đối với $e_1$ và $e_2$, nhân tử là $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$.
- Đối với $e_3$ và $e_4$, nhân tử là $(1 + x + x^2 + x^3)$.



Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$\boldsymbol{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2(1 + x + x^2 + x^3)^2}.$$

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách chia $r$ đồng xu vào 5 hộp, với điều kiện: Số đồng xu ở hộp 1, 2 là chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.

**Giải.** Ta có $a_r$ là số số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r}$$

với $e_1, e_2$ chẵn, $0 \leq e_1, e_2 \leq 10$ và $3 \leq e_3, e_4, e_5 \leq 5$.

Để tìm hàm sinh ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}x^{e_5}$ với $e_1, \ldots, e_5$ thỏa điều kiện trên. Do đó:

- Đối với $e_1$ và $e_2$, nhân tử là $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$.
- Đối với $e_3, e_4$ và $e_5$, nhân tử là $(x^3 + x^4 + x^5)$.

Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$\boldsymbol{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^2 (x^3 + x^4 + x^5)^3}.$$

# 2.2. Hệ số hàm sinh

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng các kỹ thuật đại số để tính toán các hệ số trong hàm sinh. Phương pháp chủ yếu là đưa một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức. Để làm điều đó chúng ta cần sử dụng những công thức sau:

(1) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

(2) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

(3) $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

(4) $(1-x^m)^n =$

$$1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}x^{km} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$$

(5) $\frac{1}{(1-x)^n} =$

$$1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{r+n-1}{r}x^r + \cdots$$

(6) Nếu $h(x) = f(x)g(x)$, với $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ và

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$, thì

$$h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \\ + (a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0)x^r + \cdots$$

Như vậy hệ số của $x^r$ trong $h(x)$ là

$$\boldsymbol{a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0}$$



**Ví dụ.** Tìm hệ số của $x^{16}$ trong $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5$?



**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5 &= [x^2(1 + x + x^2 + \cdots)]^5 \\ &= x^{10}(1 + x + x^2 + \cdots)^5 \\ &= x^{10}\frac{1}{(1-x)^5}\end{aligned}$$

Để tìm hệ số của $x^{16}$ trong $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5$, ta đi tìm hệ số của $x^6$ trong $\frac{1}{(1-x)^5}$. Theo công thức (5) ta được hệ số của $x^6$ trong $\frac{1}{(1-x)^5}$ là $\binom{6+5-1}{6} = 210$.

**Ví dụ.** Tìm số cách lấy 15 đồng xu từ 20 người sao cho: trong 19 người đầu tiên ta có thể lấy ở mỗi người 0 đồng hoặc 1 đồng, và người thứ 20 ta có thể lấy 0 đồng, hoặc 1 đồng, hoặc 5 đồng?

**Giải.** Bài toán trên tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 15}$$

với điều kiện $x_i = 0$ hoặc 1 với $i = 1, 2, \ldots, 19$ và $x_{20} = 0$ hoặc 1, hoặc 5. Gọi $a_r$ là số cách lấy $r$ đồng xu từ 20 người thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$\boldsymbol{(1+x)^{19}(1+x+x^5)} \qquad (*)$$

Như vậy bài toán trên tương đương với việc tìm hệ số của $x^{15}$ trong

$$\boldsymbol{(1+x)^{19}(1+x+x^5)}.$$

Theo công thức (3) ta có

$$(1+x)^{19} = 1 + \binom{19}{1}x + \binom{19}{2}x^2 + \cdots + \binom{19}{19}x^{19}$$

Đặt $f(x) = (1+x)^{19}$ và $g(x) = 1 + x + x^5$. Gọi $a_r$ là hệ số của $x^r$ trong $f(x)$, và $b_r$ là hệ số của $x^r$ trong $g(x)$. Ta thấy $a_r = \binom{19}{r}$, và

$b_0 = b_1 = b_5 = 1$, các $b_i$ khác bằng 0.

Hệ số của $x^{15}$ trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi công thức (6) là,

$$\boldsymbol{a_0b_{15} + a_1b_{14} + \cdots + a_{15}b_0}.$$

Thu gọn ta được

$$a_{10}b_5 + a_{14}b_1 + a_{15}b_0 = \binom{19}{10} \times 1 + \binom{19}{14} \times 1 + \binom{19}{15} \times 1 = 107882.$$

**Ví dụ.** Có bao nhiêu cách chia 25 viên bi giống nhau vào 7 hộp với điều kiện hộp thứ nhất có không quá 10 viên, các hộp còn lại thì tùy ý.

**Giải.** Gọi $a_r$ là số cách chia $r$ viên bi vào 7 hộp với điều kiện như bài toán. Khi đó hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là:

$$\mathbf{(1+x+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+x^3+\ldots)^6}$$

$$=\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^6$$

$$=(1-x^{11})\frac{1}{(1-x)^7}$$



Theo công thức (5) ta có

$$\frac{1}{(1-x)^7}=1+\binom{1+7-1}{1}x+\cdots+\binom{r+7-1}{r}x^r+\cdots$$

Đặt $f(x) = 1 - x^{11}$ và $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^7}$. Gọi $a_r$ là hệ số của $x^r$ trong $f(x)$, và $b_r$ là hệ số của $x^r$ trong $g(x)$. Ta thấy $a_0 = 1, a_{11} = -1, a_i = 0$ với $i \neq 0, 11$ và $b_r = \binom{r+7-1}{r}$.

Hệ số của $x^{25}$ trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi công thức (6) là,

$$\boldsymbol{a_0 b_{25} + a_1 b_{24} + \cdots + a_{25} b_0}.$$



Thu gọn ta được

$$a_0 b_{25} + a_{11} b_{14} = 1 \times \binom{25+7-1}{25} + (-1) \times \binom{14+7-1}{14} = 697521.$$



**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách chọn 25 chiếc nón từ 6 loại nón, với điều kiện mỗi loại nón phải được chọn từ 2 đến 7 chiếc.

**Đáp án.** 3906

**Ví dụ.** Cho $n$ là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Giải.** Ta có $\binom{2n}{n}$ là hệ số của $x^n$ trong $\mathbf{(1+x)^{2n}} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Đặt $f(x) = (1+x)^n$, $g(x) = (1+x)^n$ và $a_r$, $b_r$ lần lượt là hệ số của $x^r$ trong $f(x)$ và $g(x)$. Ta có $a_r = b_r = \binom{n}{r}$. Áp dụng công thức (6), ta có hệ số $x^n$ trong $f(x)g(x) = (1+x)^n(1+x)^n$ là

$$\begin{aligned}
&a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0\\
&= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}\\
&= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.
\end{aligned}$$

# 2.3. Phân hoạch số nguyên dương

**Định nghĩa.** Cho số nguyên dương $n$. Khi đó dãy $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ được gọi là một ***phân hoạch*** của $n$ nếu $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$.

**Ví dụ.** Số nguyên dương 5 có 7 phân hoạch là $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(1,4)$, $(2,3)$, và $(5)$, trong đó $(5)$ được gọi là một ***phân hoạch tầm thường***.

**Ví dụ.**(tự làm) Liệt kê tất cả các phân hoạch của 6.



Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng một hàm sinh cho $\{a_r\}_{r \geq 0}$, với $a_r$ là số các phân hoạch của số nguyên dương $r$.

Ta nhận thấy một phân hoạch của $r$ được mô tả bằng số lượng các số 1, 2, 3, ...sao cho khi lấy tổng lại với nhau ta được $r$.

Gọi $e_k$ là số các số nguyên $k$ xuất hiện trong một phân hoạch của $r$, ta có

$$\boldsymbol{1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r}.$$

Như vậy số phân hoạch của $r$ là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình trên. Ta sẽ xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau, ta được các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{2e_2}x^{3e_3}\dots x^{ke_k}\dots$

- Đối với $e_1$ nhân tử là $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$
- Đối với $2e_2$ nhân tử là $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots)$

  ..............................
- Đối với $ke_k$ nhân tử là $(1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{kn} + \cdots)$

  ..............................



Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \times (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots) \times \\ \cdots \times (1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{kn} + \cdots) \times \cdots$$

Ta có
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots.$$

Do đó $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)\dots}$

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách biểu diễn $r$ như tổng của các số nguyên dương khác nhau.



**Giải.** Tương tự như trên ta cũng gọi $e_k$ là số các số nguyên dương $k$ xuất hiện trong phân hoạch của $r$, ta có

$$\boldsymbol{1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r}.$$

Vì yêu cầu của bài toán là các $e_i$ chỉ nhận giá trị là 0 hoặc 1 nên hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là



$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^k)\dots$$

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách chọn các đồng xu 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng để được tổng là $r$ đồng.

**Ví dụ.** Dùng hàm sinh để chỉ ra rằng mọi số nguyên dương được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2.

**Giải.** Gọi $a_r$ là số cách biểu diễn số nguyên dương $r$ thành tổng các lũy thừa khác nhau của 2. Như vậy $a_r$ chính là nghiệm của phương trình

$$e_0 + 2e_1 + 4e_2 + 8e_3 + \cdots + 2^k e_k + \cdots = r$$

với $e_i = 0$ hoặc 1.

Khi đó hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r>0}$ là

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots$$

Để chỉ ra rằng mọi số nguyên dương $r$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2, ta chỉ cần chỉ ra hệ số $x^r$ trong $g(x)$ bằng 1. Nghĩa là

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Điều nay tương đương với $(1-x)g(x) = 1$.

Ta có

$$
\begin{aligned}
(1-x)g(x) &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2k})\dots \\
&= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2k})\dots \\
&= (1-x^4)(1+x^4)\dots(1+x^{2k})\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= 1.
\end{aligned}
$$



Điều này có được bằng cách thay thế $(1-x^i)(1+x^i) = 1-x^{2i}$ và do hệ số của $x^{2m}$ nào đó phải bằng 0, do đó $(1-x)g(x) = 1$.

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số các phân hoạch của $r$ mà chỉ chứa toàn số lẻ.

## 2.4. Hàm sinh mũ

Trong phần này chúng ta nói về hàm sinh mũ và sử dụng chúng để giải quyết các bài toán đếm liên quan đến sắp xếp có thứ tự.

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi ký tự có 4 ký tự được tạo thành từ các chữ cái $a, b, c$ và chứa ít nhất hai chữ cái $a$?

**Giải.** Đầu tiên ta chọn bộ 4 ký tự thỏa điều kiện bài toán, ta có các bộ sau:

$$\{a, a, a, a\}, \{a, a, a, b\}, \{a, a, a, c\}, \{a, a, b, b\}, \{a, a, b, c\}, \{a, a, c, c\}.$$

Sau đó tiến hành hoán vị các ký tự trong từng bộ, ta được chuỗi ký tự cần tìm. Do đó số chuỗi cần tìm là

$$\frac{4!}{4!0!0!} + \frac{4!}{3!1!0!} + \frac{4!}{3!0!1!} + \frac{4!}{2!2!0!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!0!2!} = 33$$

**Phân tích.** Gọi $e_1, e_2, e_3$ lần lượt là số chữ cái $a, b, c$ xuất hiện trong chuỗi ký tự.

Thoạt nhìn bài toán này như là bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 = 4} \quad \text{với } e_1 \geq 2 \text{ và } e_2, e_3 \geq 0,$$

và chúng ta có thể dùng hàm sinh thông thường để giải. Nhưng sự khác biệt ở đây là ứng với mỗi nghiệm nguyên của phương trình trên ta được số lượng các chữ cái của mỗi loại, và ứng với ***số lượng các chữ cái*** đó ta sắp xếp để cho ra ***nhiều chuỗi khác nhau***. Nghĩa là ứng với ***một nghiệm nguyên*** của phương trình trên ta có $\dfrac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$ chuỗi. Theo ngôn ngữ hàm sinh, hệ số của $x^4$ sẽ được tính thông qua các hệ số của các hạng tử có dạng

$$\frac{(e_1+e_2+e_3)!}{e_1!e_2!e_3!}x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3} = (e_1+e_2+e_3)!\frac{x^{e_1}}{e_1!}\frac{x^{e_2}}{e_2!}\frac{x^{e_3}}{e_3!}$$

với tổng lũy thừa bằng 4. Để giải quyết trường hợp này người ta sử dụng ***hàm sinh mũ***.

**Định nghĩa.** Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy các số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$E(x) = a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots = \sum_{r\geq 0} a_r\frac{x^r}{r!}$$

được gọi là ***hàm sinh mũ*** của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là chỉnh hợp chập $r$ của $n$ phần tử.

**Giải.** Ta có hệ số $a_r$ là $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, do đó hàm sinh mũ là

$$E(x) = 1 + x + \frac{n!}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{n!}{(n-3)!}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!}\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Vì $\binom{r}{n} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ nên ta có thể xem hàm sinh mũ này là hàm sinh thông thường sau

$$1 + x + \binom{2}{n} x + \binom{3}{n} x^3 + \cdots + \binom{r}{n} x^r + \cdots$$

**Ví dụ.** Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với $a_r$ là số cách sắp xếp có thứ tự $r$ vật được chọn từ 4 loại vật khác nhau, sao cho mỗi loại vật xuất hiện ít nhất là 2 và không quá 5?



**Giải.** Gọi $e_i$ là số vật loại $i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ xuất hiện trong cách sắp xếp có thứ tự $r$ vật. Ta có

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r \text{ với } 2 \leq e_i \leq 5.$$

Nhân tử đa thức ứng với mỗi $e_i$ là $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$. Từ đó suy ra hàm sinh cần tìm là



$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4.$$

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ với $a_r$ là số cách xếp $r$ người vào trong 3 căn phòng khác nhau sao cho

a) mỗi phòng có ít nhất một người?

b) số người trong mỗi phòng là số chẵn

**Đáp án.**

a)

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3.$$

b)

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3.$$

# Một số công thức cơ bản của hàm sinh mũ

Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots \qquad (1)$$

Thay $x$ bởi $nx$ ta được

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{n^rx^r}{r!} + \cdots \qquad (2)$$

Từ (1) ta cũng suy ra được

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x - 1 - x$$

Ngoài ra, ta cũng có hai khai triển hữu ích thường gặp:

- $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

# Một số ứng dụng

**Ví dụ.** Tìm số cách sắp xếp có thứ tự $r$ đối tượng được chọn từ $n$ loại đối tượng khác nhau?

**Giải.** Gọi $a_r$ là số cách sắp xếp như đề bài. Ta có hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx}.$$

Theo công thức khai triển (2) ta được hệ số của $\dfrac{x^r}{r!}$ trong hàm sinh trên là $n^r$. Như vậy $\boldsymbol{a_r = n^r}$.

**Ví dụ.** Tìm số cách xếp 25 người vào trong 3 căn phòng khác nhau sao cho mỗi phòng có ít nhất một người?

**Giải.** Gọi $a_r$ là số cách xếp $r$ người vào trong 3 căn phòng khác nhau sao cho mỗi phòng có ít nhất một người. Khi đó hàm sinh mũ của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 = (e^x - 1)^3.$$

Để tìm hệ số của $x^r/r!$ ta khai triển biểu thức $(e^x - 1)^3$, ta có

$$\boldsymbol{(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1}.$$

Áp dụng công thức $e^u = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^r}{r!}$, ta được

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1.$$

Suy ra hệ số của $\frac{x^{25}}{25!}$ là $\mathbf{3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3 = 847187946150}$.

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu chuỗi số có độ dài bằng $r$ chỉ chứa các chữ số $0, 1, 2, 3$ trong đó số chữ số 0 là chẵn và số chữ số 1 là lẻ.

**Đáp án.** $4^{r-1}$.

# 2.5. Phương pháp tổng

Trong phần này chúng ta chỉ ra cách xây dựng hàm sinh $h(x)$ mà hệ số của $x^r$ là một hàm $p(r)$ theo biến $r$. Sau đó ta sử dụng hàm sinh $h(x)$ trong việc tính tổng $p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$ với $n$ số nguyên dương.

Những tính chất sau đây được sử dụng để xây dựng hàm sinh mới từ các hàm sinh đã có. Giả sử

$$\boldsymbol{A(x) = \sum_{r\geq 0} a_r x^r,\ B(x) = \sum_{r\geq 0} b_r x^r,\ C(x) = \sum_{r\geq 0} c_r x^r}.$$

Khi đó ta có một số tính chất sau:

(1) Nếu $b_r = da_r$, thì $B(x) = dA(x)$ với mọi hằng số $d$.

(2) Nếu $c_r = a_r + b_r$, thì $C(x) = A(x) + B(x)$.

(3) Nếu $c_r = \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$, thì $C(x) = A(x)B(x)$.

(4) Nếu $b_r = a_{r-k}$, và $b_i = 0$ với $i < k$, thì $B(x) = x^k A(x)$.

**Bài toán.** Cho $g(x)$ là hàm sinh có hệ số $a_r$, hãy xây dựng một hàm sinh $g^*(x)$ có hệ số là $ra_r$.

**Giải.** Hàm $g^*(x)$ có được bằng cách lấy đạo hàm $g(x)$ và sau đó nhân với $x$, nghĩa là $g^*(x) = x\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$. Cụ thể, nếu

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_rx^r + \cdots,$$

ta lấy đạo hàm của $g(x)$ ta được

$$\frac{d}{dx}g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ra_rx^{r-1} + \cdots.$$

Nhân hai vế cho $x$ ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + ra_rx^r + \cdots$$

Đây chính là hàm sinh có hệ số $ra_r$.

**Ví dụ.** Xây dựng một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = 2r^2$.

**Giải.** Từ công thức $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ta tiến hành các bước như bài toán trên, ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right] = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots.$$

Ngoài ra $x\left[\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-x}\right] = x\left[\dfrac{1}{(1-x)^2}\right] = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Như vậy

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots.$$

Ta lặp lại quá trình trên với $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots$$

Cuối cùng nhân 2 vào hai vế của phương trình trên ta được

$$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = (2\cdot 1^2)x + (2\cdot 2^2)x^2 + \cdots + (2\cdot r^2)x^r + \cdots.$$

**Ví dụ.** Xây dựng một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = (r+1)r(r-1)$.

**Giải.**

**Cách 1.** Ta có $(r+1)r(r-1) = r^3 - r$. Do đó ta có thể làm tương tự như ví dụ trên, ta sẽ tìm một hàm sinh có hệ số $r^3$ và một hàm sinh có hệ số $r$ và sau đó lấy hiệu của chúng.

**Cách 2.** Dựa vào công thức

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1} x + \cdots + \binom{r+n-1}{r} x^r + \cdots$$

Ta có

$$3!\frac{1}{(1-x)^4} = 3!\left[1 + \binom{1+4-1}{1} x + \binom{2+4-1}{r} x^2 + \cdots\right]$$

Hệ số $a_r$ của khai triển trên là

$$a_r = 3!\binom{r+4-1}{r} = 3!\frac{(r+3)!}{r!3!} = (r+3)(r+2)(r+1).$$

Do đó

$$\frac{3!}{(1-x)^4} = (3\cdot 2\cdot 1) + (4\cdot 3\cdot 2)x + \cdots + (r+3)(r+2)(r+1)x^r + \cdots$$

Nhân hai vế cho $x^2$ ta được

$$\frac{3!x^2}{(1-x)^4} = (3\cdot 2\cdot 1)x^2 + (4\cdot 3\cdot 2)x^3 + \cdots + (r+1)r(r-1)x^r + \cdots$$



Vậy hàm sinh cần tìm là $h(x) = \dfrac{6x^2}{(1-x)^4}$.

**Tổng quát.** Hàm sinh $(n-1)!\dfrac{1}{(1-x)^n}$ có hệ số $a_r$ là



$$a_r = (n-1)!\binom{r+n-1}{r} = [r+(n-1)]\times[r+(n-2)]\times\cdots\times[r+1]$$

**Ví dụ.**(tự làm) Xây dựng một hàm sinh với hệ số $a_r = 2r^2(r-1)$.

**Định lý.** *Nếu $h(x)$ là hàm sinh với $a_r$ là hệ số của $x^r$, thì* $h^*(x) = \dfrac{h(x)}{1-x}$ *là hàm sinh với hệ số của $x^r$ là* $\sum_{i=0}^{r} a_i$, *nghĩa là*

$$h^*(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{r} a_i\right) x^r + \cdots.$$

**Chứng minh.** Định lý này được suy ra từ công thức

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

và tính chất (3). ∎

**Ví dụ.** Tính tổng $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot n^2$.

**Giải.** Từ ví dụ trước, ta đã xây dựng được một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = 2r^2$ là

$$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Theo định lý trên, tổng cần tìm $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là hệ số của $x^n$ trong

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{(1-x)} = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^4} + \frac{2x^2}{(1-x)^4}.$$

Ta có

- Hệ số của $x^n$ trong $\dfrac{2x}{(1-x)^4}$ là hệ số của $x^{n-1}$ trong $\dfrac{2}{(1-x)^4}$
- Hệ số của $x^n$ trong $\dfrac{2x^2}{(1-x)^4}$ là hệ số của $x^{n-2}$ trong $\dfrac{2}{(1-x)^4}$.

Do đó tổng cần tìm bằng

$$2\binom{(n-1)+4-1}{(n-1)} + 2\binom{(n-2)+4-1}{(n-2)} = 2\binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}.$$

**Ví dụ.** Tính tổng $3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + \cdots + (n+1)n(n-1)$.

**Giải.** Từ ví dụ trước, ta đã xây dựng được một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = (r+1)r(r-1)$ là

$$h(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

Ta có tổng cần tìm $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là hệ số của $x^n$ trong

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{(1-x)} = \frac{6x^2}{(1-x)^5}.$$

Hệ số của $x^n$ trong $h^*(x)$ bằng với hệ số của $x^{n-2}$ trong $\dfrac{6}{(1-x)^5}$, và bằng

$$6\binom{(n-2)+5-1}{n-2} = 6\binom{n+2}{4}.$$

Như vậy

$$3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + \cdots + (n+1)n(n-1) = 6\binom{n+2}{4}$$

# 2.6. Giải hệ thức đệ quy bằng hàm sinh

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày một ứng dụng quan trọng của hàm sinh trong việc giải các bài toán đệ quy. Để tìm công thức tường minh $a_n$ của một hệ thức đệ quy, ta gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ và tiến hành các bước sau:

- Bước 1. Chuyển hệ thức đệ quy thành một phương trình của $G(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy cho $x^n$, hay $x^{n+1}$, hay $x^{n+k}$ với một $k$ nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm $n$.
- Bước 2. Giải phương trình để tìm $G(x)$.
- Bước 3. Tìm hệ số của $x^n$ trong $G(x)$, hệ số đó chính bằng $a_n$, và ta được một công thức tường minh cho $a_n$.

**Ví dụ.** Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_{n+1} = 3a_n$ với $a_0 = 2$.

**Giải.** Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với $x^{n+1}$ và lấy tổng trên tất cả các số nguyên $n \geq 0$, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 3a_n x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = 3x \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$



Vì $a_0 = 2$ và $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ nên ta có

$$G(x) - 2 = 3xG(x) \Leftrightarrow G(x) = \frac{2}{1-3x}.$$



Áp dụng công thức $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n\geq 0} u^n$, ta được

$$G(x) = 2\sum_{n\geq 0}(3x)^n = \sum_{n\geq 0}(2\cdot 3^n)x^n.$$

Vậy $\boldsymbol{a_n = 2\cdot 3^n}$.

**Ví dụ.** Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ với $a_0 = 1$.

**Giải.** Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với $x^n$ và lấy tổng trên tất cả các số nguyên $n \geq 1$, ta được

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 8a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 10^{n-1}x^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = 8x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + x \sum_{n\geq 0} 10^n x^n$$

Vì $a_0 = 1, G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ và $\sum_{n\geq 0} 10^n x^n = \dfrac{1}{1-10x}$ nên ta có

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}.$$

Ta giải ra được

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}.$$

Biến đổi $G(x)$ thành tổng các phân thức đơn giản, ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}(8x)^n + \sum_{n\geq 0}(10x)^n\right] \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)x^n \end{aligned}$$

Vậy $a_n = \frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)$.

**Ví dụ.** (tự làm) Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n = a_{n-1} + n$ với $a_0 = 1$.

Ngoài ra, ở một số bài toán giải hệ thức đệ quy, ta có thể dùng hàm sinh mũ để tìm công thức tường minh $a_n$. Ta gọi $E(x)$ là hàm sinh mũ của dãy $\{a_n\}$ và tiến hành các bước sau:

- Bước 1. Chuyển hệ thức đệ quy thành một phương trình của $E(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của phương trình đệ quy cho $x^n/n!$, hay $x^{n+1}/(n+1)!$, hay $x^{n+k}/(n+k)!$ với một $k$ nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm $n$.
- Bước 2. Giải phương trình để tìm $E(x)$.
- Bước 3. Tìm hệ số của $x^n/n!$ trong $E(x)$, hệ số đó chính bằng $a_n$, và ta được một công thức tường minh cho $a_n$.

**Ví dụ.** Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$ với $a_0 = 1$.

**Giải.** Gọi $E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n\geq 0} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = x \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - x \left[ \sum_{n\geq 0} n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \right] \qquad (*)$$



Vì

$$\sum_{n\geq 0} n \frac{x^n}{n!} = 0 + \sum_{n\geq 1} n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

nên từ $(*)$ ta có



$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = x \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - x \left[ x \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \right].$$

Vì $E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, $a_0 = 1$ và $e^x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ nên

$$
\begin{aligned}
& E(x) - 1 = xE(x) - x(xe^x - e^x) \\
\Leftrightarrow \quad & (1-x)E(x) = (1-x)xe^x + 1
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \frac{1}{1-x} + xe^x = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} (n+1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} n\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Như vậy hệ số của $\dfrac{x^n}{n!}$ trong $E(x)$ là $n! + n$. Do đó $\boldsymbol{a_n = n! + n}$.

**Ví dụ.** Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $f_{n+1} = 2(n+1)f_n + (n+1)!$ với $f_0 = 0$.

**Giải.** Gọi $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n \dfrac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Nhân cả hai vế của hệ thức trên với $x^{n+1}/(n+1)!$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$ ta được

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 2x\sum_{n\geq 0} f_n\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} x^{n+1}$$

Do $f_0 = 0$ nên vế trái bằng $F(x)$, hạng tử thứ nhất của vế phải bằng $2xF(x)$, và hạng tử thứ hai của vế phải bằng $x/(1-x)$. Do đó, ta có được

$$F(x) = 2xF(x) + \frac{x}{1-x}.$$

Suy ra,

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$



Phân tích $F(x)$ thành tổng các phân thức đơn giản ta được

$$F(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Áp dụng công thức $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n\geq 0} u^n$, ta được

$$F(x) = -\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} (2x)^n = -\sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} 2^n n!\frac{x^n}{n!}.$$

Do đó hệ số của $x^n/n!$ trong $F(x)$ là

$$\boldsymbol{f_n = -n! + 2^n n! = (2^n - 1)n!}.$$