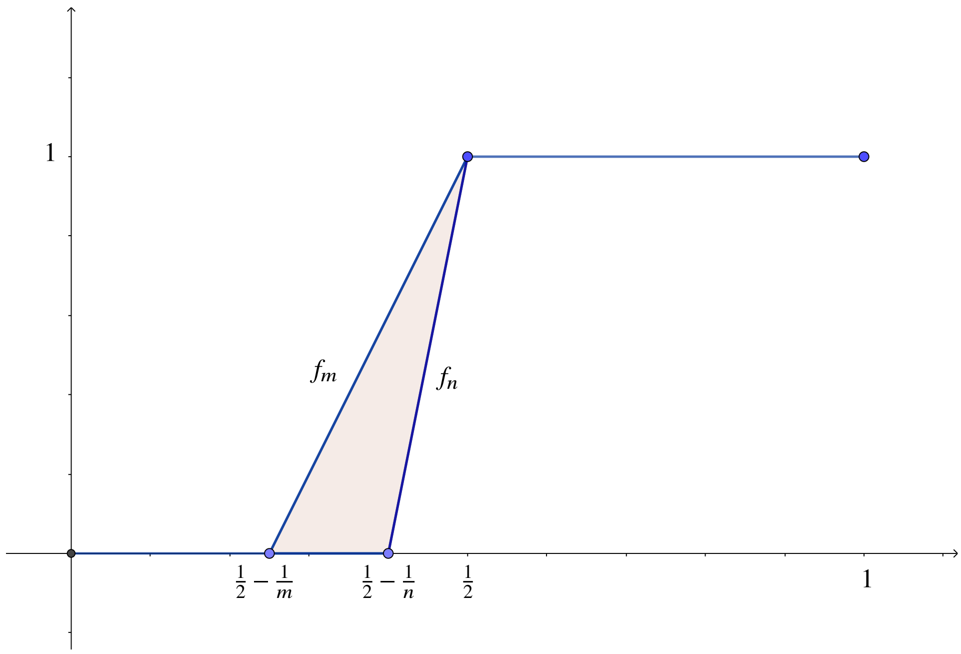
Bài giảng Giải tích hàm

Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ

Bản ngày 20 tháng 04 năm 2020



Đây là tóm tắt một số nội dung lí thuyết và danh sách bài tập dùng cho môn MTH10403 Giải tích hàm tại Khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.

Giải tích hàm là một trong những môn ở đó sinh viên có những hiểu biết đầu tiên, cơ bản về các không gian vô hạn chiều. Các kiến thức này là cần thiết cho nhiều chuyên ngành toán cả lí thuyết lẫn ứng dụng. Đây là nơi mà khả năng tiếp thu và sử dụng các lí luận toán học trừu tượng và chính xác bước đầu được rèn luyện và kiểm tra. Phần đông sinh viên có thể học môn này từ học kì thứ tư.

Tóm tắt nội dung học phần: không gian mêtríc (nhắc lại), không gian định chuẩn, ánh xạ tuyến tính liên tục cùng các định lý cơ bản về chúng, không gian Hilbert.

Một số chứng minh trong phần bài giảng chỉ chứa các ý chính, và một số mệnh đề không có chứng minh, đây là những chổ dành cho người học bổ sung chi tiết.

Dấu ✓ ở một bài tập là để lưu ý người đọc đây là một bài tập đặc biệt có ích hoặc quan trọng, nên làm. Những phần có đánh dấu * là tương đối khó hơn, không bắt buộc.

Biên soạn: Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ (người biên tập hiện nay, email: hqvu@hcmus.edu.vn). Địa chỉ: Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.

Tài liệu này đang được tiếp tục sửa chữa và bổ sung. Các góp ý vui lòng gởi về cho người biên tập.

Tài liệu này cùng mã nguồn có ở https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.

Mục lục

Giới thiệu

Vào các thế kỉ 18, 19, sự phát triển vượt bậc ở châu Âu trong thời đại Khai sáng và Cách mạng công nghiệp thúc đẩy những khảo cứu học thuật và thực dụng. Trong đó có các khảo cứu của Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier và nhiều người khác về các hiện tượng vật lí, như sự truyền sóng và sự truyền nhiệt.

Xét một thanh kim loại mà một đầu chịu tác động của một nguồn nhiệt. Gọi x là vị trí của một điểm trên thanh và u là nhiệt độ ở vị trí x vào thời điểm t, thì những phân tích vật lí dẫn tới kết luận u phải thỏa điều kiện có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t).$$

Đây là một phương trình mà đối tượng là hàm số. Nghiên cứu những phương trình này đưa đến việc không những các tính chất của hàm, mà các tính chất của các tập hợp hàm dần dần chiếm vị trí trung tâm. Chẳng hạn để biết phương trình có nghiệm hay không có thể đưa về khảo sát tính chất của những ánh xạ trên các tập hợp hàm, hay để xấp xỉ nghiệm cần đưa ra cách đo độ khác biệt giữa các hàm.

Một điều đáng chú ý là các tập hợp hàm thường có cấu trúc của không gian tuyến tính vô hạn chiều. Ví dụ trong tập hợp các đa thức hay trong tập hợp các hàm liên tục có những tập con gồm vô hạn phần tử độc lập tuyến tính.

Vào đầu thế kỉ 20, môn Giải tích hàm định hình và phát triển nhanh chóng, vừa do sự phát triển nội tại của toán học, vừa do nhu cầu của khoa học và kĩ thuật. Ngày nay Giải tích hàm đã trở thành một phần cơ bản của toán học mà ai học toán cũng cần biết.

Chương 1 Không gian mêtríc

Không gian mêtríc là phát triển tương tự của không gian Euclid, là tập hợp trên đó có khoảng cách.

Ở chương này chúng ta ôn tập một số tính chất của không gian mêtríc có liên quan tới môn giải tích hàm. Phần lớn những nội dung này đã có trong môn Giải tích 2, người học nên xem lại giáo trình [15]. Tuy nhiên bây giờ chúng ta nhấn mạnh việc hiểu ý nghĩa và mối quan hệ giữa các phần kiến thức chứ không nhấn mạnh việc kiểm tra tính đúng đắn logic hình thức trong chứng minh của mỗi mệnh đề.

1.1 Mêtríc

Mêtríc [1] nghĩa là khoảng cách. Một không gian mêtríc là một tập hợp có khoảng cách.

1.1.1 Định nghĩa. Cho X là một tập không rỗng. Một ánh xạ

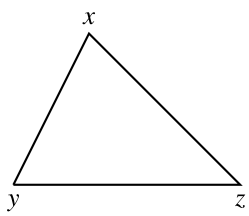
$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

được gọi là một ***mêtríc*** (***khoảng cách***) trên X nếu các tính chất sau thỏa với mọi $x,y,z \in X$:

(a) $d(x,y) \geq 0$, và $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$,

(c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.



Hình 1.1.2: Bất đẳng thức tam giác.

Cặp (X,d) được gọi là một ***không gian mêtríc*** hay một ***không gian có khoảng cách***. Mỗi phần tử của tập X khi đó còn được gọi là một ***điểm***.

Không gian mêtríc (X,d) hay được viết vắn tắt là X khi mêtríc d được ngầm hiểu hoặc không cần được xác định cụ thể.

[1] Trong tiếng Anh từ metric có nghĩa là cách đo, có họ hàng với từ metre (mét)

1.1.3 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Với $n \in \mathbb{Z}^+$, tập hợp $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ với ***mêtric Euclid***

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

được gọi là ***không gian Euclid thực n-chiều***. Đặc biệt khi $n = 1$ không gian mêtríc Euclid $\mathbb{R}$ có mêtríc thông thường cho bởi giá trị tuyệt đối của hiệu hai số thực, $d(x, y) = |x - y|$, chính là khoảng cách giữa hai số thực.

1.2 Đóng, mở, hội tụ, liên tục

1.2.1 Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X, d), $a \in X$ và số thực $r > 0$. Các tập

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

$$B'(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$$

lần lượt được gọi là ***quả cầu mở***, ***quả cầu đóng***, ***mặt cầu*** tâm a bán kính r.

1.2.2 Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X, d). Tập $A \subset X$ là một ***tập mở*** trong X nếu mỗi điểm thuộc A có một quả cầu của X tâm tại điểm đó chứa trong A. Bằng kí hiệu:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

Nếu $X \setminus A$ là một tập mở, ta nói A là một ***tập đóng*** trong X.

1.2.3 Ví dụ. Mọi quả cầu mở đều là một tập mở, mọi quả cầu đóng cũng như mặt cầu đều là tập đóng. Ngoài ra, trong không gian mêtríc X, các tập $\emptyset$ và X là các tập vừa đóng vừa mở trong X.

1.2.4 Ghi chú. Khi nói tới "mở", "đóng" ta phải hiểu rõ là đang nói tới không gian mêtríc nào, vì cùng một tập hợp có thể là tập con của những không gian mêtríc khác nhau và nhận những mêtríc khác nhau, do đó tính mở, đóng cũng khác. Khi đã hiểu rõ thì có thể nói tắt không cần nhắc tới không gian mêtríc chứa.

1.2.5 Mệnh đề. *Cho một không gian mêtríc (X, d) và $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập con của X. Ta có*

(a) Nếu A_i là các tập mở thì $\bigcup_{i \in I} A_i$ là một tập mở.

(b) Nếu A_i là các tập đóng thì $\bigcap_{i \in I} A_i$ là một tập đóng.

(c) Nếu A_i là các tập mở và I là tập hữu hạn thì là $\bigcap_{i \in I} A_i$ một tập mở.

(d) Nếu A_i là các tập đóng và I là tập hữu hạn thì $\bigcup_{i \in I} A_i$ là một tập đóng.

Cho không gian mêtríc (X, d) và A là một tập con của X. Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm dính*** của A nếu mọi quả cầu tâm x có chứa ít nhất một phần tử của A, nghĩa là

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Tập tất cả các điểm dính của A được gọi là ***bao đóng*** của A, ký hiệu là $\bar{A}$ hay $\mathrm{cl}(A)$ (closure).

Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm trong*** của A nếu tồn tại một quả cầu của X tâm x chứa trong A, nghĩa là

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là ***phần trong*** của A, ký hiệu là $\mathring{A}$ hay $\operatorname{int}(A)$ (interior).

Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm biên*** của A nếu mọi quả cầu của X tâm x có chứa ít nhất một phần tử của A, và có chứa ít nhất một phần tử không thuộc A, nghĩa là

$$\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset, B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Tập tất cả các điểm biên của A được gọi là ***phần*** biên của A, ký hiệu là ∂A.

1.2.6 Mệnh đề. *Cho là A một tập con của một không gian mêtríc thì*

(a) $\bar{A}$ là một tập đóng và là tập đóng nhỏ nhất chứa A,

(b) A là một tập đóng nếu và chỉ nếu $A = \bar{A}$,

(c) $\mathring{A}$ là một tập mở và là tập mở lớn nhất chứa trong A,

(d) A là một tập mở nếu và chỉ nếu $A = \mathring{A}$.

1.2.7 Định nghĩa. Cho $(x_n)_{n\geq 1}$ là một dãy các phần tử của một không gian mêtríc (X,d). Ta nói $(x_n)_{n\geq 1}$ là ***dãy hội tụ*** (trong X) nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0 \implies d(x_n,x) < \epsilon.$$

Điều này có nghĩa là phần tử của dãy gần x tùy ý miễn chỉ số đủ lớn. Khi đó, phần tử x, nếu có, là duy nhất và được gọi là ***giới hạn*** của dãy $(x_n)_{n\geq 1}$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ta còn viết $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

Ta có thể đặc trưng các khái niệm mở, đóng, điểm dính bằng dãy như sau:

1.2.8 Mệnh đề. *Cho là một tập con A trong không gian mêtríc X và $x \in X$. Ta có:*

(a) x là một điểm dính của A nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong A hội tụ về x.

(b) A là một tập đóng trong X nếu và chỉ nếu mọi dãy trong A mà hội tụ trong X thì giới hạn của nó phải nằm trong A.

1.2.9 Định nghĩa. Cho ánh xạ f từ không gian mêtríc (X,d_X) vào không gian mêtríc (Y,d_Y) và $x_0 \in X$. Ta nói f là ***liên tục*** tại x_0 nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x,x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Điều này có nghĩa là $f(x)$ gần $f(x_0)$ tùy ý miễn x đủ gần x_0. Ta nói f liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Ta cũng có đặc trưng của sự liên tục thông qua dãy:

1.2.10 Định lý. *Cho ánh xạ f từ không gian mêtríc (X,d_X) vào không gian mêtríc (Y,d_Y). Điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x là với mọi dãy (x_n) trong X, nếu $x_n \to x$ trong X thì $f(x_n) \to f(x)$ trong Y.*

1.2.11 Định lý. *Ánh xạ f từ không gian mêtríc (X,d_X) vào không gian mêtríc (Y,d_Y) là liên tục trên X nếu và chỉ nếu ảnh ngược qua f của tập mở trong Y là tập mở trong X. Mệnh đề vẫn đúng nếu thay tập mở bằng tập đóng.*

1.3 Không gian mêtríc con

Cho không gian mêtríc (X,d) và Y là một tập con của X. Ánh xạ $d_Y \equiv d|_{Y\times Y}$, tức $d_Y(x,y) = d(x,y)$ với mọi $x,y \in Y$, là một mêtríc trên Y mà ta gọi là thu hẹp hay hạn chế của mêtríc của X xuống Y. Không gian mêtríc (Y,d_Y) được gọi là một ***không gian mêtríc con*** của không gian mêtríc X.

1.3.1 Ghi chú. Như đã nhắc ở 1.2.4, chú ý rằng với Y là một không gian con của X và A là một tập con của Y ta cần phân biệt việc A đóng hay mở trong X với việc A đóng hay mở trong Y. Tương tự, với một dãy trong Y, ta cần phân biệt việc dãy hội tụ trong X với việc dãy hội tụ trong Y.

1.3.2 Ví dụ. Trên $\mathbb{R}$ với mêtríc Euclid, tập $[0,2)$ tạo thành một không gian mêtríc con. Tập $[0,1)$ là mở trong không gian $[0,2)$ nhưng không mở trong không gian $\mathbb{R}$. Dãy $x_n = 2-\frac{1}{n}$ trong $[0,2)$ không hội tụ trong $[0,2)$ nhưng hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Một quả cầu của Y là thu hẹp của một quả cầu của X:

$$B_Y(x,r) = \{y \in Y \mid d(y,x) < r\} = B_X(x,r) \cap Y.$$

Từ đó ta có sự liên hệ giữa tính đóng và mở trong một không gian với tính đóng và mở trong một không gian con của nó:

1.3.3 Mệnh đề. *Cho Y là một không gian con của một không gian mêtríc X và A là một tập con của Y. Ta có:*

(a) A là mở trong Y nếu và chỉ nếu tồn tại tập V mở trong X sao cho $A = V \cap Y$.

(b) A là đóng trong Y nếu và chỉ nếu tồn tại tập F đóng trong X sao cho $A = F \cap Y$.

1.3.4 Mệnh đề. *Thu hẹp của một ánh xạ liên tục xuống một không gian mêtríc con là một ánh xạ liên tục.*

1.4 Không gian đầy đủ và không gian compắc

1.4.1 Định nghĩa. Dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ trong X là ***dãy Cauchy*** nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall m,n \in \mathbb{Z}^+, (m,n \geq n_0 \implies d(x_m,x_n) < \epsilon).$$

Điều này nghĩa là phần tử của dãy gần nhau tùy ý miễn chỉ số đủ lớn.

1.4.2 Mệnh đề. *Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.*

1.4.3 Định nghĩa. Ta nói không gian mêtríc (X,d) là ***đầy đủ*** khi mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ trong X.

1.4.4 Ví dụ. Trong $\mathbb{R}$ thì dãy $\frac{1}{n}$ hội tụ về 0 nên là dãy Cauchy. Nhưng nếu xét trong $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thì dãy này không hội tụ.

Tương tự, dãy các số hữu tỉ $(1+\frac{1}{n})^n$ hội tụ về số vô tỉ e trong $\mathbb{R}$. Như vậy dãy này là dãy Cauchy nhưng không hội tụ trong $\mathbb{Q}$, do đó $\mathbb{Q}$ là không đầy đủ.

1.4.5 Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực với mêtríc Euclid là đầy đủ. Điều này là hệ quả của ***tính tồn tại chặn trên nhỏ nhất,*** còn gọi là tính liên tục, của tập hợp số thực: mọi tập con không rỗng bị chặn trên của $\mathbb{R}$ đều có chặn trên nhỏ nhất. Ngược lại sự đầy đủ của $\mathbb{R}$ dẫn tới tính tồn tại chặn trên nhỏ nhất (sup).

Từ tính đầy đủ của $\mathbb{R}$ ta suy ra được:

1.4.6 Mệnh đề. *Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là đầy đủ.*

1.4.7 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{C}^n$). Về mặt tập hợp thì $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Mỗi phần tử $(a,b) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức và được viết là $a + bi$ với i được gọi là đơn vị ảo. Phép cộng trên $\mathbb{C}$ được định nghĩa là $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, tức là $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, trùng với phép cộng của không gian Euclid $\mathbb{R}^2$. Trên $\mathbb{C}$ còn có một độ lớn, còn được gọi là môđun, cho bởi $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Khoảng cách giữa hai số phức $x_1 = a_1 + b_1 i$ và $x_2 = a_2 + b_2 i$ được cho bởi

$$|x_1 - x_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2},$$

chính bằng khoảng cách giữa (a_1, b_1) và (a_2, b_2) trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^2$. Vì vậy nếu chỉ quan tâm tới khía cạnh không gian mêtríc thì $\mathbb{C}$ trùng với $\mathbb{R}^2$.

Với $n \in \mathbb{Z}^+$ thì tập hợp $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{C}, x_2 \in \mathbb{C}, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}$ với mêtric

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

được gọi là ***không gian Euclid phức n-chiều***. Nếu ta đồng nhất tập hợp $\mathbb{C}^n$ với tập hợp $\mathbb{R}^{2n}$ thì mêtríc Euclid của $\mathbb{C}^n$ cũng chính là mêtríc Euclid của $\mathbb{R}^{2n}$. Vậy nếu chỉ quan tâm tới khía cạnh không gian mêtríc thì $\mathbb{C}^n$ trùng với $\mathbb{R}^{2n}$.

Vì về mặt mêtríc thì $\mathbb{C}^n$ trùng với $\mathbb{R}^{2n}$ nên ta có ngay:

1.4.8 Mệnh đề. *Không gian Euclid $\mathbb{C}^n$ là đầy đủ.*

1.4.9 Định nghĩa. Ta nói không gian mêtríc (X,d) là ***compắc*** [2] khi mọi dãy trong X đều có một dãy con hội tụ trong X.

Tập $A \subset X$ được gọi là ***bị chặn*** nếu A được chứa trong một quả cầu nào đó của X, tức là

$$\exists a \in X, \exists r > 0, A \subset B(a,r).$$

Cho một không gian mêtríc X và cho Y là một tập con của X. Khi đó Y trở thành một không gian mêtríc con của X. Ta nói Y là tập đầy đủ khi không gian mêtríc Y là một không gian đầy đủ, và Y là tập compắc khi không gian mêtríc Y là một không gian compắc.

1.4.10 Mệnh đề (compắc thì đóng và bị chặn). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là compắc thì Y đóng (trong X) và bị chặn.*

1.4.11 Mệnh đề (compắc thì đầy đủ). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là compắc thì Y là đầy đủ.*

1.4.12 Mệnh đề (đóng trong compắc thì compắc). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đóng trong X và X là compắc thì Y là compắc.*

1.4.13 Mệnh đề. *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đầy đủ thì Y là đóng (trong X).*

1.4.14 Mệnh đề (đóng trong đầy đủ thì đầy đủ). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đóng trong X và X là đầy đủ thì Y là đầy đủ.*

1.4.15 Định lý (định lý Bolzano–Weierstrass). *Mọi khoảng đóng $[a,b]$ đều là tập compắc trong đường thẳng Euclid.*

---

[2] Trong tiếng Anh từ compact có nghĩa là chặt, gọn...

Đây là một đặc trưng quan trọng của tập hợp các số thực, suy ra được từ tính đầy đủ nhưng thực ra tương đương với tính đầy đủ của tập hợp các số thực. Người học nên xem lại giáo trình Giải tích 1 ([4]).

Từ định lý Bolzano–Weierstrass ta suy ra đặc trưng quan trọng sau của tập compắc trong không gian Euclid:

1.4.16 Định lý (compắc trong không gian Euclid = đóng + bị chặn). *Một tập con của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ hay $\mathbb{C}^n$ là compắc nếu và chỉ nếu nó là đóng và bị chặn.*

1.4.17 Định lý (ảnh liên tục của không gian compắc là compắc). *Cho f là một ánh xạ liên tục giữa hai không gian mêtríc X và Y. Nếu X là compắc thì $f(X)$ cũng là compắc.*

1.4.18 Hệ quả. *Nếu f là một ánh xạ liên tục từ một không gian mêtríc compắc X vào không gian Euclid $\mathbb{R}$ thì f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên X, nghĩa là tồn tại $a, b \in X$ sao cho $f(a) = \max f(X)$ và $f(b) = \min f(X)$.*

1.4.19 Định lý (liên tục trên không gian compắc thì liên tục đều). *Cho f là một ánh xạ liên tục giữa hai không gian mêtríc X và Y. Nếu X là compắc thì f* ***là liên tục đều*** *trên X, nghĩa là*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall y \in X, d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

1.5 Bài tập

1.5.1. ✓ Các mệnh đề được nêu trên đều là các bài tập.

1.5.2. Chứng minh giới hạn của một dãy nếu có thì là duy nhất.

1.5.3. ✓ Chứng minh một dãy Cauchy thì phải bị chặn (nghĩa là tập giá trị của dãy là một tập bị chặn).

1.5.4. ✓ Chứng minh một dãy Cauchy có dãy con hội tụ thì phải hội tụ.

1.5.5. Cho $(x_n)_{n\geq 1}$ là một dãy trong một không gian mêtríc X và x trong X. Chứng minh hai điều sau đây tương đương:

(a) Có một dãy con $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ của (x_n) hội tụ về x trong X.

(b) Tập $\{n \geq 1 \mid x_n \in B(x,r)\}$ là một tập vô hạn với mọi số thực $r > 0$.

1.5.6. Cho không gian mêtríc (E, d_E), f là một ánh xạ từ E vào không gian mêtríc (F, d_F). Giả sử với mọi số thực dương η có một ánh xạ liên tục g_η từ E vào F sao cho

$$d_F(f(x), g_\eta(x)) < \eta, \ \forall x \in E.$$

Chứng minh f liên tục trên E.

1.5.7. Cho E là một không gian mêtríc compắc và f là một song ánh liên tục từ E vào một không gian mêtríc F. Chứng minh $f^{-1} : F \to E$ là một ánh xạ liên tục.

1.5.8. Cho E là một không gian mêtríc, $x \in E$, và $M \subset E$. Khoảng cách từ điểm x tới tập M được định nghĩa là

$$d(x, M) = \inf\{d(x,y) \mid y \in M\}.$$

Chứng tỏ $d(x, M) = 0$ khi và chỉ khi x là một điểm dính của M.

1.5.9 (định lý ánh xạ co). Cho (E, d) là một không gian mêtríc đầy đủ, $\alpha \in (0,1)$, và f là một ánh xạ từ E vào E. Giả sử $\forall x, y \in E$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y).$$

Ta nói f là một ***ánh xạ co*** với hằng số co α trên E. Khi đó:

(a) f liên tục trên E.

(b) Với $a \in E$ bất kì, dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_{n+1} &= f(x_n),\ n \geq 1, \end{aligned}$$

là một dãy Cauchy trong E.

(c) Dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ trên hội tụ về $x \in E$ thỏa $f(x) = x$. Điểm x sao cho $f(x) = x$ là duy nhất và được gọi là ***điểm bất động*** của f.

Tóm tắt, ta có thể phát biểu rằng: ánh xạ co trên không gian đầy đủ thì có điểm bất động. Đây còn được gọi là định lý điểm bất động Banach.

1.5.10 (đầy đủ hóa). * Dưới đây là kết quả rằng mọi không gian mêtríc đều có một đầy đủ hóa. Hình mẫu điều này là sự đầy đủ hóa của $\mathbb{Q}$ để được $\mathbb{R}$.

Cho X là một không gian mêtríc. Nhắc lại một tập con A của X được gọi là ***dày đặc*** hay ***trù mật*** trong X nếu $\overline{A} = X$.

(a) Xét Y là tập hợp tất cả các dãy Cauchy trong X. Trên Y xét quan hệ $(x_n) \sim (y_n)$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Đây là một quan hệ tương đương trên Y. Gọi $\overline{X}$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương của Y dưới quan hệ này.

(b) Trên $\overline{X}$ đặt $d([(x_n)],[(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Đây là một định nghĩa tốt [3] và là một mêtríc trên $\overline{X}$.

(c) Với mêtríc trên thì $\overline{X}$ là một không gian mêtríc đầy đủ.

(d) Ánh xạ $x \mapsto (x, x, \ldots, x, \ldots)$ từ X vào $\overline{X}$ là một đơn ánh và ảnh của nó dày đặc trong $\overline{X}$.

Không gian mêtríc $\overline{X}$ trên được gọi là ***không gian đầy đủ hóa*** của X.

[3] Thuật ngữ "định nghĩa tốt" (tiếng Anh là well-defined) trong ở đây ý nói rằng định nghĩa cần dùng tới một phần tử đại diện của lớp tương đương, nhưng không phụ thuộc cách chọn phần tử đại diện đó, nên định nghĩa áp dụng cho lớp tương đương chứ không chỉ cho phần tử. Đây chỉ là một cách nói tắt truyền thống trong toán học. Nói chung một đối tượng toán học được "định nghĩa tốt" nghĩa là nó được xác định. Không có thuật ngữ "định nghĩa không tốt"!

Chương 2 Không gian định chuẩn

Không gian định chuẩn là phát triển tương tự của không gian Euclid, là không gian vectơ có chiều dài vectơ.

2.1 Không gian vectơ

Không gian vectơ là khái niệm tổng quát hóa tập hợp các vectơ trong hình học 3 chiều và các phép toán trên chúng. Nhắc lại, một ***không gian vectơ***, còn gọi là một không gian tuyến tính, trên trường đại số $\mathbb{F}$ là một tập hợp không rỗng[1] X với ánh xạ

$$\begin{aligned} +: X \times X &\to X \\ (x,y) &\mapsto x+y, \end{aligned}$$

(phép toán + này nói chung không liên quan tới phép toán cộng trên trường số thực, cũng được chỉ bằng cùng kí hiệu), và ánh xạ

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{F} \times X &\to X \\ (\alpha,x) &\mapsto \alpha \cdot x, \end{aligned}$$

(phép toán $\cdot$ này nói chung không liên quan tới phép toán nhân trên trường số thực), thỏa các tính chất:

(a) $(X,+)$ là một nhóm đại số giao hoán. Tức là X có một phần tử thường được chỉ bằng kí hiệu 0 (cùng kí hiệu với số thực 0), thỏa $\forall x \in X, 0+x = x+0 = x$; với mỗi $x \in X$ có một phần tử của X, thường được chỉ bởi kí hiệu $-x$, sao cho $x+(-x) = 0$; phép toán $+$ có tính kết hợp $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x+y)+z = x+(y+z)$, và tính giao hoán $\forall x \in X, \forall y \in X, x+y = y+x$.

(b) $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$; $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in X, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

(c) Phép toán + và $\cdot$ có tính phân phối với nhau: $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in X, \forall y \in X, \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Một phần tử của một không gian vectơ còn được gọi là một ***vectơ***. Kí hiệu $\cdot$ thường được lược bỏ, ta thường viết αx thay vì $\alpha \cdot x$.

Tập $Y \subset X$ được gọi là một ***không gian vectơ con*** của X khi chính Y, với các phép toán thu hẹp từ X, cũng là một không gian vectơ. Nói khác đi, Y là một không gian vectơ con của X khi và chỉ khi với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in Y, \forall y \in Y, \alpha x + \beta y \in Y$, tức là Y kín với các phép toán của không gian vectơ X.

Cho $S \subset X$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử thuộc S, tức $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+\}$, là một không gian vectơ con của X, được gọi là không gian vectơ con sinh bởi S.

[1] Một số tài liệu không loại trừ tập rỗng. Ta dùng yêu cầu này để tránh những phiền toái do tập rỗng gây ra, như trong khái niệm chiều.

Các phần tử của S được gọi là ***độc lập tuyến tính*** nếu không có phần tử khác 0 nào là tổ hợp tuyến tính của hữu hạn các phần tử khác. Nói cách khác $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ với $\alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+$ thì phải có $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}, \alpha_i = 0$.

Nếu S sinh ra X và các phần tử của S là độc lập tuyến tính thì S cùng với một thứ tự toàn phần trên S được gọi là một ***cơ sở vectơ***, hay ***cơ sở tuyến tính***, của X.

Ta nói một không gian vectơ là hữu hạn chiều nếu nó có một cơ sở vectơ là một tập hợp hữu hạn. Nếu không thì ta nói đó là một ***không gian vectơ vô hạn chiều***.

Vì tập hợp chỉ có một phần tử $\{0\}$ cũng có cấu trúc hiển nhiên của một không gian vectơ nên ta cũng định nghĩa cho tiện là đây là một không gian vectơ có số chiều bằng 0.

2.1.1 Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$ có một cấu trúc không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$ là

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,\dots,x_n) + (y_1,y_2,\dots,y_n) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n), \\ \alpha(x_1,x_2,\dots,x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Không gian vectơ này có một cơ sở vectơ là tập hợp có thứ tự $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ với $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ với số thực 1 nằm ở tọa độ thứ i. Đây được gọi là cấu trúc không gian vectơ chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$, khi nói tới $\mathbb{R}^n$ mà không nói gì thêm thì ta ngầm sử dụng cấu trúc chuẩn tắc này.

2.1.2 Ví dụ. Tương tự, $\mathbb{C}^n$ là một không gian vectơ n-chiều trên trường $\mathbb{C}$ với cấu trúc y hệt $\mathbb{R}^n$. Sự khác biệt giữa $\mathbb{C}^n$ với $\mathbb{R}^{2n}$ xuất hiện khi chúng ta quan tâm tới cấu trúc không gian vectơ. Khác với $\mathbb{R}^2$, trên $\mathbb{C}$ có một phép nhân được định nghĩa bởi

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Một hệ quả của phép nhân này là $i^2 = i \cdot i = -1$. Với $z = a+bi$ thì $\bar{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số z. Với các phép toán $+$ và $\cdot$ này $\mathbb{C}$ là một trường đại số.

Viết chung lại, nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ thì $\mathbb{F}^n$ là một không gian vectơ n-chiều trên trường $\mathbb{F}$.

2.2 Không gian định chuẩn

Một ***không gian định chuẩn*** là một không gian vectơ $(X, +, \cdot)$ trên trường $\mathbb{F}$, với $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, với một hàm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

được gọi là một ***chuẩn*** trên X, thỏa $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:

(a) $\|x\| \ge 0$,

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, ở đây kí hiệu $|\alpha|$ chỉ giá trị tuyệt đối nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ và môđun nếu $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

(d) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Như thường lệ ta có thể lược bớt kí hiệu khi chúng được hiểu ngầm và có thể viết tắt "cho một không gian định chuẩn X" khi các cấu trúc đã được biết hoặc không cần được xác định.

2.2.1 Ví dụ. Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ đặt

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Đây được gọi là ***chuẩn Euclid***.

2.2.2 Mệnh đề. *Cho không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$. Đặt $d(x,y) = \|x-y\|$ thì đó là một mêtríc trên X.*

Vậy ***chuẩn sinh ra mêtríc***, nói cách khác chiều dài vectơ sinh ra khoảng cách giữa các điểm. Do đó, mặc nhiên một không gian định chuẩn cũng là một không gian mêtríc và vì vậy nó thừa hưởng mọi khái niệm cũng như tính chất của một không gian mêtríc.

Đặc biệt, khi không gian mêtríc này đầy đủ, ta nói không gian định chuẩn tương ứng là một ***không gian Banach***.

2.2.3 Ví dụ (các chuẩn khác nhau trên không gian Euclid). Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ thì

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

là một chuẩn trên $\mathbb{F}^n$ do ***bất đẳng thức Minkowski***:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}. \tag{2.2.4}$$

Với $p = 2$ đây là chuẩn Euclid. Ngoài ra dưới đây cũng là các chuẩn thường gặp

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Cho X là một không gian định chuẩn, với hàm chuẩn $\|\cdot\|$, và Y là một không gian vectơ con của X. Ánh xạ chuẩn thu hẹp trên Y trở thành một hàm chuẩn trên Y. Không gian định chuẩn Y với hàm chuẩn vừa nêu được gọi là một ***không gian định chuẩn con*** của X.

2.3 Không gian định chuẩn hữu hạn chiều

2.3.1 Định nghĩa. Hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trên cùng một không gian vectơ X được gọi là tương đương nếu có hai số thực $\alpha, \beta > 0$ sao cho

$$\forall x \in X, \alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1.$$

Vì ta suy ra ngay

$$\forall x \in X, \frac{1}{\beta} \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x\|_2.$$

nên rằng tính tương đương của chuẩn là đối xứng.

2.3.2 Mệnh đề. *Nếu hai chuẩn là tương đương thì sự hội tụ của dãy; sự mở, đóng, compắc của tập con; sự liên tục của ánh xạ; sự đầy đủ của không gian là như nhau.*

Chứng minh. Giả sử dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x theo chuẩn $\|\cdot\|_1$. Điều này đồng nghĩa với dãy số thực $(\|x_n - x\|_1)_n$ hội tụ về số thực 0. Từ tính chất $\|x_n - x\|_2 \le \beta\|x_n - x\|_1$ ta suy ra dãy $(\|x_n - x\|_2)_n$ cũng hội tụ về 0, do đó dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x theo chuẩn $\|\cdot\|_2$. Vậy khi hai chuẩn là tương đương thì một dãy hội tụ theo chuẩn thứ nhất thì phải hội tụ theo chuẩn thứ hai về cùng giới hạn.

Do các khái niệm đóng, mở, compắc, liên tục đều có thể được định nghĩa chỉ bằng sự hội tụ của dãy, nên người đọc có thể kiểm tra chi tiết ngay là một tập là đóng, mở, compắc theo chuẩn thứ nhất thì cũng tương ứng đóng, mở, compắc theo chuẩn thứ hai, và nếu một ánh xạ liên tục theo chuẩn thứ nhất thì cũng liên tục theo chuẩn thứ hai.

Tính chất $\|x_m - x_n\|_2 \le \beta\|x_m - x_n\|_1$ cũng dẫn tới một dãy là dãy Cauchy theo chuẩn thứ nhất thì phải là dãy Cauchy theo chuẩn thứ hai. Do đó nếu không gian vectơ là đầy đủ theo chuẩn thứ nhất thì cũng đầy đủ theo chuẩn thứ hai. □

Về chiều ngược lại, xem ở 2.8.7.

2.3.3 Định lý. *Các chuẩn trên không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ đều tương đương.*

Chứng minh. Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn bất kì trên $\mathbb{F}^n$ và $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclid. Ta có theo bất đẳng thức Cauchy–Buniakowski:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Vậy có $\beta > 0$ sao cho $\forall x, \|x\| \le \beta\|x\|_2$. Điều này cũng dẫn tới hàm $\|\cdot\|$ là liên tục trên không gian Euclid. Hạn chế của hàm này lên mặt cầu đơn vị Euclid S^n, một tập compắc, có giá trị nhỏ nhất $\alpha > 0$. Với mọi $x \ne 0$ thì $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^n$, nên $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \ge \alpha$, tức là $\|x\| \ge \alpha\|x\|_2$. Vậy một chuẩn bất kì trên $\mathbb{F}^n$ là tương đương với chuẩn Euclid. □

2.3.4 Mệnh đề. *Các chuẩn trên cùng một không gian vectơ hữu hạn chiều đều tương đương.*

Chứng minh. Cho $(X,\|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn n-chiều trên trường $\mathbb{F}$. Lấy một cơ sở tuyến tính $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ cho X. Đặt ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{F}^n \\ x = \sum_{i=1}^n x_i v_i &\mapsto y = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Đây là ánh xạ tuyến tính mang cơ sở $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ thành cơ sở $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, do đó là một song ánh tuyến tính, tức là một đẳng cấu tuyến tính. Nếu $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ trong cơ sở $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ thì $y = f(x) = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ trong cơ sở $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.

Đặt $\|y\|_{\mathbb{F}^n} = \left\|f^{-1}(y) = x\right\|_X$ thì có thể kiểm tra được rằng $\|\cdot\|_{\mathbb{F}^n}$ là một chuẩn trên $\mathbb{F}^n$.

Nếu ta có hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trên X thì theo cách xây dựng này ta có tương ứng hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trên $\mathbb{F}^n$. Từ 2.3.3, hai chuẩn trên $\mathbb{F}^n$ này là tương đương, nên có hai số thực dương α, β sao cho với mọi $y \in \mathbb{F}^n$:

$$\alpha\|y\|_1 \le \|y\|_2 \le \beta\|y\|_1,$$

do đó với mọi $x \in X$:

$$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1.$$

□

2.3.6 Mệnh đề. *Một không gian định chuẩn hữu hạn chiều bất kì là một không gian Banach.*

Chứng minh. Ánh xạ f ở 2.3.5 và ánh xạ ngược f^{-1} mang dãy Cauchy thành dãy Cauchy, dãy hội tụ thành dãy hội tụ. Mặt khác $\mathbb{F}^n$ với chuẩn bất kì là không gian Banach. □

2.3.7 Hệ quả. *Không gian định chuẩn con hữu hạn chiều là tập con đóng.*

Không gian định chuẩn compắc địa phương

Một không gian định chuẩn được gọi là ***compắc địa phương*** nếu quả cầu đóng đơn vị là compắc. Ý nghĩa của thuật ngữ này được giải thích trong mệnh đề sau:

2.3.8 Mệnh đề. *Trong một không gian định chuẩn những điều sau là tương đương:*

(a) *quả cầu đóng đơn vị là compắc,*

(b) *mọi quả cầu đóng là compắc,*

(c) *mọi tập con đóng và bị chặn là compắc,*

(d) *mọi dãy bị chặn có một dãy con hội tụ,*

(e) *mọi lân cận của một điểm bất kì chứa một lân cận compắc.*

Nói ngắn gọn, không gian compắc địa phương là không gian định chuẩn mà ở đó tính compắc tương đương với tính đóng và bị chặn.

Để chứng minh kết quả trên ta giới thiệu một khái niệm mới. Một song ánh giữa hai không gian mêtríc $T: X \to Y$ được gọi là một ***phép đẳng cấu tôpô*** hay một ***phép đồng phôi*** từ X lên Y nếu cả T và T^{-1} đều là các ánh xạ liên tục, và khi đó ta nói X là ***đẳng cấu tôpô*** hay ***đồng phôi*** với Y. Một ví dụ đáng chú ý là trong một không gian định chuẩn các quả cầu đều đồng phôi với nhau, cụ thể, quả cầu $B(0,1)$ đồng phôi với quả cầu $B(a,r)$ bất kì qua hợp của một phép co dãn (vị tự) $x \mapsto rx$ và một phép tịnh tiến $x \mapsto x+a$, xem thêm ở 2.8.4.

Chứng minh. Ta kiểm $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (a)$. Giả sử quả cầu đóng đơn vị $B'(0,1)$ là compắc. Vì quả cầu đóng bất kì $B'(a,r)$ là ảnh của một phép đồng phôi từ $B'(0,1)$, và ảnh liên tục của một tập compắc là compắc, nên $B'(a,r)$ cũng là compắc. Một tập con bị chặn thì chứa trong một quả cầu đóng compắc, cho nên nếu tập con đó cũng đóng nữa thì nó phải compắc. Một dãy bị chặn sẽ được chứa trong một quả cầu đóng bị chặn, do đó chứa trong một tập compắc, do đó có dãy con hội tụ.

Ta kiểm $(a) \iff (e)$. Giả sử điểm x có một lân cận U. Ta phải có một quả cầu $B(x,r) \subset U$. Khi đó $x \in B(x,\frac{r}{2}) \subset \overline{B(x,\frac{r}{2})} = B'(x,\frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset U$. Nếu quả cầu đóng đơn vị là compắc thì $B'(x,\frac{r}{2})$ là compắc. Như vậy $(a) \implies (e)$.

Ngược lại nếu tồn tại $x \in V \subset A \subset U$ trong đó V mở và A compắc thì phải có một quả cầu $B(x,r) \subset V$ và khi đó $B'(x,r) \subset A$ là compắc, và do đó $B'(0,1)$ là compắc. □

2.3.9 Mệnh đề. *Không gian định chuẩn hữu hạn chiều là compắc địa phương.*

Chứng minh. Vì không gian Euclid $\mathbb{F}^n$ là compắc địa phương nên không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ là compắc địa phương với chuẩn bất kì. Ánh xạ f ở (2.3.5) mang quả cầu $B'(0,1)$ trong không gian X thành quả cầu $B'(0,1)$ trong $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$, là tập compắc. Vì f là một phép đồng phôi nên bảo toàn tính compắc, do đó $B'(0,1)$ compắc trong X. □

Ngược lại:

2.3.10 Mệnh đề. *Không gian định chuẩn compắc địa phương thì phải là hữu hạn chiều.*

Chứng minh. Giả sử quả cầu đơn vị đóng $B'(0,1)$ là compắc trong không gian mêtríc X. Tồn tại họ hữu hạn $(a_i \in B'(0,1))_{1 \le i \le m}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^m B(a_i, 1/2) \supset B'(0,1)$, vì nếu không sẽ tồn tại dãy $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ mà khoảng cách giữa các phần tử lớn hơn $1/2$ do đó không có dãy con hội tụ.

Đặt $M = \langle \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \rangle$, ta chứng minh $B'(0,1) \subset M$. Với $x \in B'(0,1)$ bất kì, tồn tại a_i sao cho $\|a_i - x\| < 1/2$, tức $x \in M + \frac{1}{2}B'(0,1)$. Suy ra $B'(0,1) \subset M + \frac{1}{2}B'(0,1) \subset M + \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}B'(0,1)\right) \subset M + \frac{1}{4}B'(0,1)$. Bằng qui nạp ta được $B'(0,1) \subset M + \frac{1}{2^n}B'(0,1)$, $\forall n \ge 1$.

Lấy $x \in B'(0,1)$ thì có dãy $x_n \in M$ và $y_n \in B'(0, \frac{1}{2^n})$ sao cho $x = x_n + y_n$. Lấy giới hạn thì được $x_n \to x$. Vì M hữu hạn chiều nên đóng, do đó $x \in M$. Vậy $B'(0,1) \subset M$. Vì mỗi phần tử của X là một bội của một phần tử của $B'(0,1)$, và M là một không gian vectơ, nên ta suy ra $X \subset M$, do đó $X = M$. Vậy X là hữu hạn chiều. □

Một hệ quả đáng chú ý là:

2.3.11 Hệ quả. *Trên không gian định chuẩn thì compắc = đóng + bị chặn khi và chỉ khi không gian là hữu hạn chiều.*

2.4 Không gian ℓ^p

Phát triển từ $\mathbb{F}^n$, gọi $\mathbb{F}^\infty$ là tập hợp tất cả các dãy phần tử thuộc $\mathbb{F}$ (là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $\mathbb{F}^\infty$ và α trong $\mathbb{F}$, ta đặt

$$x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+},$$

$$\alpha x = (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}.$$

Với các phép toán này thì $\mathbb{F}^\infty$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{F}$, và là một không gian vectơ vô hạn chiều.

Gọi ℓ^∞ là tập con của $\mathbb{F}^\infty$ gồm tất cả các dãy bị chặn, tức là tập hợp tất cả các phần tử $x = (x_n)_{n\geq 1}$ sao cho $\sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$. Đặt

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

2.4.1 Mệnh đề. *ℓ^∞ với các cấu trúc trên là một không gian định chuẩn.*

Cho $p \in [1,\infty)$. Gọi ℓ^p là tập con của $\mathbb{F}^\infty$ gồm tất cả các phần tử $x = (x_n)_{n\geq 1}$ sao cho $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Đặt

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

2.4.2 Mệnh đề. *ℓ^p, $p \in [1,\infty)$, với các cấu trúc trên là một không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Ở đây bất đẳng thức tam giác cho chuẩn có từ bất đẳng thức Minkowski ở dạng tổng của chuỗi,

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p\right)^{1/p}. \qquad (2.4.3)$$

thu được bằng cách qua giới hạn bất đẳng thức Minkowski ở dạng tổng hữu hạn ở Phương trình (2.2.4). □

2.4.4 Định lý. *Không gian ℓ^p, $p \in [1,\infty]$, là không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự với chứng minh không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach ở 1.4.6.

Trường hợp $p = \infty$: Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^∞ với $x_n = \left(x_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}^+}$. Cho $\epsilon > 0$ có N sao cho $m > N, n > N$ thì $\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}^+} |x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon$. Điều này dẫn tới với mỗi $k \geq 1$ thì

$$|x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon, \quad (*)$$

do đó dãy $\left(x_{n,k}\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{F}$, do đó hội tụ về một $y_k \in \mathbb{F}$.

Ở $(*)$, cho n tiến ra vô cùng ta được $|x_{m,k} - y_k| \leq \epsilon$. Suy ra $\|x_m - y\|_\infty \leq \epsilon$ với $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$. Điều này dẫn tới hai điều: $(x_m - y) \in \ell^\infty$ do đó $y \in \ell^\infty$, và $(x_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về y trong ℓ^∞.

Trường hợp $p < \infty$ là tương tự, thay sup bởi $\sum$: Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^p với $x_n = \left(x_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}^+}$. Cho $\epsilon > 0$ có N sao cho $m > N, n > N$ thì

$$\|x_m - x_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - x_{n,k}|^p < \epsilon^p. \quad (**)$$

Điều này dẫn tới với mỗi $k \geq 1$ thì $|x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon$, do đó dãy $\left(x_{n,k}\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{F}$, do đó hội tụ về một $y_k \in \mathbb{F}$.

Từ $(**)$, với mọi $T \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{k=1}^{T} |x_{m,k} - x_{n,k}|^p < \epsilon^p.$$

Cho n tiến ra vô cùng ta được $\sum_{k=1}^{T} |x_{m,k} - y_k|^p \leq \epsilon^p$. Suy ra chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - y_k|^p$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - y_k|^p \leq \epsilon^p$, tức là $\|x_m - y\|_p \leq \epsilon$ với $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$. Điều này dẫn tới hai điều: $(x_m - y) \in \ell^p$ do đó $y \in \ell^p$, và $(x_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về y trong ℓ^p. $\square$

2.5 Không gian các hàm liên tục

Cho S là một tập hợp và X là một không gian định chuẩn trên trường $\mathbb{F}$. Xét tập hợp $M(S,X)$ gồm tất cả các ánh xạ từ S vào X. Trên tập hơp này ta định nghĩa phép cộng ánh xạ và phép nhân vô hướng với ánh xạ theo cách thường gặp: Nếu f và g thuộc E và $\alpha \in \mathbb{F}$ thì $f + g$ và αf được cho bởi, với $x \in X$:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Khi đó $M(S,X)$ với các cấu trúc trên là một không gian vectơ. Ở đây phần tử 0 của không gian vectơ chính là ánh xạ mà giá trị luôn bằng phần tử 0 của X, tức là ánh xạ 0.

2.5.1 Ví dụ. Không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ chính là $M(S,X)$ với $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $X = \mathbb{F}$. Không gian vectơ $\mathbb{F}^\infty$ chính là $M(S,X)$ với $S = \mathbb{Z}^+$ và $X = \mathbb{F}$.

Cũng giống như với các không gian ℓ^p, để có chuẩn ta phải xét một không gian con của $M(S,X)$. Ở đây ta xét tương tự của ℓ^∞, các tương tự của ℓ^p được xét ở phần không gian L^p. Gọi $B(S,X)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ ***bị chặn*** từ S vào X. Với $f \in B(S,X)$ đặt

$$\|f\| = \sup_{s\in S} \|f(s)\| = \sup\{\|f(s)\| \mid s \in S\}.$$

Đây là một số đo kích thước của tập giá trị của ánh xạ, thường được gọi là chuẩn sup. Đây là chặn trên nhỏ nhất của độ lớn của ảnh của ánh xạ.

2.5.2 Ví dụ. $B(\mathbb{Z}^+, \mathbb{F})$ chính là ℓ^∞.

2.5.3 Mệnh đề. *$B(S,X)$ là một không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Ta kiểm các yêu cầu của chuẩn. Cho $f \in B(S,X)$. Giả sử $\|f\| = 0$. Ta có $\forall s \in S, f(s) = 0$. Vậy f là hàm 0, là phần tử 0 của $B(S,X)$.

Nếu $\alpha \in \mathbb{F}$ thì

$$\|\alpha f\| = \sup_{s\in S} \|\alpha f(s)\| = \sup_{s\in S} |\alpha| \|f(s)\| = |\alpha| \sup_{s\in S} \|f(s)\| = |\alpha| \|f\|.$$

Nếu $g \in B(S,X)$ thì

$$\|f+g\| = \sup_{s\in S}\|f(s)+g(s)\| \le \sup_{s\in S}(\|f(s)\|+\|g(s)\|) \le (\sup_{s\in S}\|f(s)\|)+(\sup_{s\in S}\|g(s)\|) = \|f\|+\|g\|.$$

□

2.5.4 Mệnh đề. *Nếu X là không gian Banach thì $B(S,X)$ là không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự chứng minh cho $\mathbb{R}^n$ và ℓ^∞. Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $B(S,X)$. Cho $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $m \ge N, n \ge N$ thì với mọi $x \in S$ ta có $\|f_m(x) - f_n(x)\| \le \epsilon$. Với mỗi x, dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong X, do đó hội tụ về một giới hạn duy nhất ta đặt là $f(x)$. Cố định n và cho $m \to \infty$ ta được với mọi $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$ thì với mọi $x \in S$ ta có $\|f_n(x) - f(x)\| \le \epsilon$. Cố định n ta suy ra $(f_n - f) \in B(S,X)$ do đó $f \in B(S,X)$, và $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ trong $B(S,X)$ về f. □

Nếu X là một không gian mêtríc và Y là một không gian định chuẩn thì ta gọi $C(X,Y)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ liên tục từ X vào Y.

Nếu X là compắc thì một hàm liên tục trên X sẽ bị chặn, do đó $C(X,Y) \subset B(X,Y)$. Hơn nữa một hàm liên tục trên một không gian compắc có giá trị lớn nhất, do đó thực ra $\sup_X \|f(x)\| = \max_X \|f(x)\|$, giá trị lớn nhất của chiều dài các ảnh của ánh xạ.

2.5.5 Định lý. *Nếu X là compắc thì $C(X,Y)$ với chuẩn* sup *là một không gian định chuẩn con đóng của $B(X,Y)$. Do đó nếu X là compắc và Y là không gian Banach thì $C(X,Y)$ là không gian Banach.*

Chứng minh. Giả sử dãy $(f_n)_n$ trong $C(X,Y)$ hội tụ về f trong $B(X,Y)$, ta chứng minh $f \in C(X,Y)$. Ta chỉ cần chứng minh f là liên tục. Cho $x_0 \in X$. Viết

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x_0)\| &= \|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)\|\\ &\le \|f-f_n\|+\|f_n(x)-f_n(x_0)\|+\|f-f_n\|.\end{aligned}$$

Cho $\epsilon > 0$, chọn n đủ lớn ta sẽ được $\|f - f_n\| < \epsilon$. Với n đó thì f_n liên tục tại x_0, do đó lấy x đủ gần x_0 ta sẽ có $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon$, do đó $\|f(x) - f(x_0)\| < 3\epsilon$, do đó f liên tục tại x_0. □

2.5.6 Ví dụ. Không gian vectơ $C([0,1],\mathbb{R})$, gồm tất cả các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$, với chuẩn sup, là một không gian định chuẩn đầy đủ, tức không gian Banach.

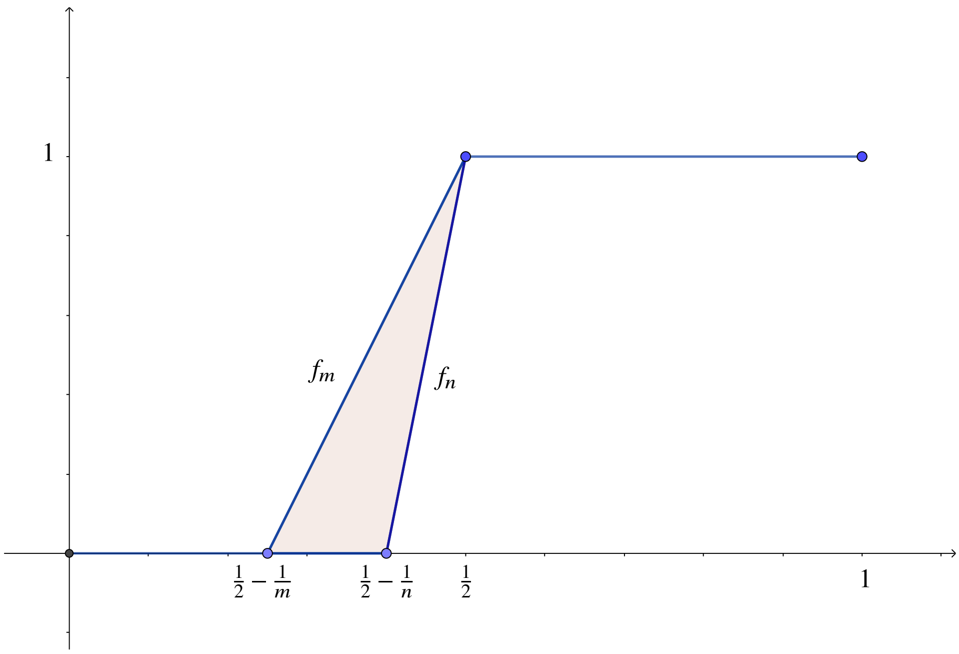
Dưới đây là một thí dụ phổ biến cho một không gian định chuẩn không đầy đủ:

2.5.7 Mệnh đề. *Tập hợp tất cả các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\| = \int_0^1 |f|$ là một không gian định chuẩn không đầy đủ.*

Chứng minh. Dễ kiểm tra đây là một chuẩn, đặc biệt tích phân $\int_0^1 |f| = 0$ nếu và chỉ nếu $f = 0$ vì f là hàm liên tục.

Với $n \ge 3$, đặt f_n là hàm tuyến tính từng khúc liên tục bằng 0 trên $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, bằng 1 trên $[\frac{1}{2}, 1]$, xem hình 2.5.8. Ta sẽ chứng tỏ dãy $(f_n)_{n\ge1}$ là một dãy Cauchy nhưng không thể hội tụ, điều có thể thấy trực quan từ hình vẽ.

Trong Hình 2.5.8, $\|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\, dx$ chính là diện tích giữa đồ thị của f_m và f_n, bằng $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, nhỏ tùy ý khi m và n đủ lớn. Vậy dãy $(f_n)_{n\ge1}$ là một dãy Cauchy.



Hình 2.5.8:

Giả sử $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ và f là liên tục. Khi đó

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n - f| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-f| \le \int_0^1 |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dẫn tới $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-f| = 0$. Vì f là liên tục điều này dẫn tới $1-f=0$, hay $f=1$ trên $[\frac{1}{2},1]$. Với mọi $\epsilon > 0$, với n đủ lớn, ta có $\frac{1}{2n} < \epsilon$, vì thế

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |f_n - f| = \int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |0-f| \le \int_0^1 |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Điều này dẫn tới $\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |f| = 0$, do đó $f=0$ trên $[0,\frac{1}{2}-\epsilon)$. Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Nhưng hàm này lại không liên tục, mâu thuẫn. Vậy dãy $(f_n)_{n\ge 1}$ không hội tụ. $\square$

2.6 Không gian L^p

Phần này nhắc lại một số nội dung của lí thuyết độ đo và tích phân, người học có thể tra cứu trong các giáo trình của môn này như [6, 13].

2.6.1 Tóm tắt về độ đo và tích phân

Một không gian đo được là một tập hợp Ω với một σ-đại số M các tập con của Ω (kín dưới phép hội đếm được và phép lấy phần bù). Các phần tử của M được gọi là các ***tập đo được*** trong không gian (Ω, M) này. Một ***độ đo*** trên không gian đo được (Ω, M) là một hàm $\mu : M \to [0,\infty]$, thỏa một số yêu cầu, như cộng tính đếm được. Bộ (Ω, M, μ) được gọi là một ***không gian đo***.

2.6.1 Ví dụ. Với M tập hợp tất cả các tập con của Ω thì ***độ đo đếm*** μ trên Ω, được cho bởi $\mu(A) = |A|$, số phần tử của A khi A hữu hạn và $\mu(A) = \infty$ khi A vô hạn.

2.6.2 Ví dụ (không gian đo Lebesgue). Trên tập $\mathbb{R}^n$ có một σ-đại số M đặc biệt chứa tất cả các tập mở, tập đóng. Các phần tử của của M được gọi là các tập đo được Lebesgue. Có một độ đo μ trên M, duy nhất theo một nghĩa nhất định, được gọi là ***độ đo Lebesgue***, có tính chất độ đo của một hình hộp $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ bằng $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, và cộng tính đếm được. Nếu một tập có thể tích Riemann thì nó đo được Lebesgue, và thể tích Riemann của tập đó bằng với độ đo Lebesgue của nó.

Bây giờ ta tóm tắt về tích phân tổng quát. Cho (Ω, M, μ) là một không gian đo. Một hàm $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một ***hàm đo được*** nếu ảnh ngược của mỗi tập mở (dưới mêtric Euclid của $\mathbb{R}$) là một tập đo được. Hệ quả là mỗi tập mức $f^{-1}(c)$ là đo được.

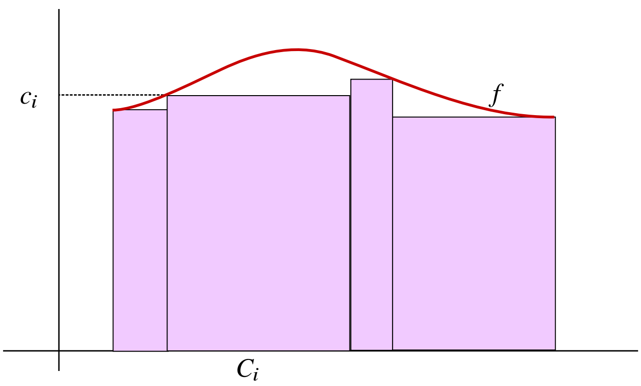
Cho f là một hàm đo được không âm. Nếu trong tích phân Riemann ta xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên từng hình hộp con thì giờ ta cũng làm tương tự nhưng thay vì chỉ dùng hình hộp ta dùng tập tập đo được. Cụ thể ta xấp xỉ dưới bằng cách dùng những hàm thuộc tập S những hàm không âm đo được có hữu hạn giá trị, được gọi là hàm bậc thang, có dạng

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{C_i}$$

với $C_i = s^{-1}(c_i)$. Giá trị của xấp xỉ này là $\int_\Omega s = \sum_{i=1}^k c_i \mu(C_i)$. Ta định nghĩa ***tích phân*** của f là

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega s \mid s \in S, s \le f \right\}.$$

Đại ý là xây dựng tích phân bằng cách xấp xỉ dưới thông qua hàm bậc thang. Chú ý rằng giá trị của tích phân có thể là ∞.



Hình 2.6.3: Xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên tập đo được.

Cho f là hàm đo được tùy ý. Đặt $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ và $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ thì đây là những hàm đo được, và $f = f^+ - f^-$. Ta định nghĩa

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Các khái niệm trên có thể được mở rộng cho hàm có giá trị phức. Nếu $f : \Omega \to \mathbb{C}$ thì ta viết $f = g + ih$ với g và h là hàm giá trị thực, f là đo được khi và chỉ khi g và h đo được, và ta định nghĩa $\int_\Omega f = \int_\Omega g + i \int_\Omega h$.

Tích phân tổng quát có những tính chất như tích phân Riemann, như tính tuyến tính.

2.6.4 Ví dụ. Nếu không gian đo là không gian đo Lebesgue thì tích phân được gọi là ***tích phân Lebesgue***. Một hàm khả tích Riemann thì khả tích Lebesgue và khi đó tích phân Riemann có cùng giá trị với tích phân Lebesgue.

2.6.5 Ví dụ. Với μ là độ đo đếm trên Ω, nếu $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm không âm thì từ định nghĩa của tích phân có thể thấy

$$\int_E \varphi\, d\mu = \sup\left\{\sum_{e\in F}\varphi(e) \mid F \subset E, |F| < \infty\right\}.$$

Đặc biệt, nếu $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$ là tập hữu hạn có n phần tử thì $\int_\Omega \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^n \varphi(i)$, chính là tổng của hữu hạn số thực. Nếu $\Omega = \mathbb{Z}^+$ thì có thể thấy $\int_\Omega \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \varphi(i)$, chính là tổng của chuỗi số thực. Tích phân thực sự là tổng quát hóa của tổng.

Tích phân tổng quát có những tính chất quan trọng liên quan tới việc qua giới hạn mà tích phân Riemann không có.

2.6.6 Định lý (định lý hội tụ bị chặn). *Cho $(f_m)_m$ là một dãy hàm số đo được hội tụ từng điểm về một hàm f. Nếu dãy hàm $(f_m)_m$ bị chặn từng điểm bởi một hàm khả tích, cụ thể là có g khả tích sao cho $\forall x, \forall m, |f_m(x)| \le g(x)$, thì f khả tích và dãy các tích phân của f_m hội tụ về tích phân của f.*

Chi tiết của lý thuyết độ đo và tích phân tổng quát tương đối phức tạp và đồ sộ so với trình độ chung của người học ở các năm đầu đại học, tuy nhiên phần lớn trong môn học này chúng ta chỉ cần dùng một số tính chất căn bản của tích phân.

2.6.2 Không gian L^p

Cho (Ω,μ) là một không gian đo. Với $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, và $p \in [1,\infty)$, xét tập

$$L^p(\Omega,\mu) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{F} \mid \int_\Omega |f|^p\, d\mu < \infty\right\}.$$

Nếu $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $p \in [1,\infty)$, đặt

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Một tính chất là đúng ***hầu khắp*** (hầu như khắp nơi) nếu tính chất đó đúng trên một tập con mà phần bù có độ đo không, nói cách khác tập hợp những phần tử ở đó tính chất không đúng chứa trong một tập có độ đo không.

Đặt

$$L^\infty(\Omega,\mu) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ đo được} \mid \exists C > 0, |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\right\}.$$

Nếu $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ đặt

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\right\}.$$

2.6.7 Ví dụ. Nếu $\Omega = [0,1]$, μ là độ đo Lebesgue, và f là liên tục, thì $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$, chính là chuẩn sup của hàm liên tục mà ta đã khảo sát. Xem 2.8.25.

Ta có hai bất đẳng thức cơ bản sau ([11, tr. 63], [14, tr. 86]):

2.6.8 Mệnh đề (bất đẳng thức Hölder). *Cho $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $g \in L^q(\Omega,\mu)$, với $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ta có $fg \in L^1(\Omega,\mu)$ và*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

2.6.9 Ví dụ. Bất đẳng thức Buniakowski quen thuộc cho các số thực là một trường trường hợp riêng của bất đẳng thức Hölder, khi $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$, μ là độ đo đếm, $p = 2$, $q = 2$.

2.6.10 Mệnh đề (bất đẳng thức Minkowski). *Cho $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$, với $1 \le p \le \infty$. Ta có $f + g \in L^p(\Omega,\mu)$ và*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

2.6.11 Ví dụ. Các bất đẳng Minkowski cho các bộ số ở (2.2.4) và (2.4.3) là các trường hợp riêng, khi $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$, hoặc $\Omega = \mathbb{Z}^+$, và μ là độ đo đếm.

Tuy nhiên $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ hầu khắp, do đó ta chưa có một chuẩn. Để đây là một chuẩn cần xét các lớp tương đương dưới quan hệ

$$f \sim g \iff f = g \text{ hầu khắp.}$$

Có thể kiểm được dưới quan hệ tương đương này thì các cấu trúc trên khiến $L^p(\Omega,\mu)$ trở thành một không gian định chuẩn hẳn hoi.

Chú ý rằng mặc dù một phần tử của $L^p(\Omega,\mu)$ là một lớp tương đương các hàm, nhưng để đơn giản trong trình bày người ta thường bỏ qua kí hiệu lớp tương đương, chỉ viết vắn tắt như "cho hàm $f \in L^p(\Omega)$ …", để người đọc tự hiểu rằng f đại diện cho một phần tử của $L^p(\Omega,\mu)$.

2.6.12 Ví dụ ($\ell^p(E)$). Với μ là độ đo đếm trên E thì $L^p(E,\mu)$ thường được kí hiệu là $\ell^p(E)$. Nếu $\varphi : E \to \mathbb{F}$ thì $\varphi \in \ell^p(E)$ khi và chỉ khi

$$\int_E |\varphi|^p \, d\mu = \sup_{F\subset E, |F|<\infty} \sum_{e\in F} |\varphi(e)|^p < \infty.$$

Nếu E là một tập vô hạn đếm được, tức có song ánh với $\mathbb{Z}^+$, thì $\ell^p(E)$ đơn giản là ℓ^p. Thực vậy cho $1 \le p < \infty$, nếu $x \in \ell^p(\mathbb{Z}^+)$ thì có thể thấy

$$\|x\|^p = \sup_{F\subset \mathbb{N}, |F|<\infty} \sum_{n\in F} |x(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p.$$

Tương tự $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ là không gian các dãy số bị chặn.

Nếu E là tập hữu hạn với n phần tử thì $\ell^p(E)$ chính là $\mathbb{F}^n$ với chuẩn $\|\cdot\|_p$.

2.6.13 Định lý. *$L^p(\Omega)$, với $1 \le p \le \infty$, là các không gian Banach.*

Chứng minh định lý này có ở [11, tr. 67], [14, tr. 89].

2.7 Các đề tài khác

Toán tử tích phân

2.7.1 Mệnh đề. *Cho A là một tập con compắc trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và g là một ánh xạ liên tục từ $A \times \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt $E = C(A,\mathbb{R})$ – không gian các ánh xạ liên tục từ A vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in A} |x(t)|$. Cho a là một phần tử trong E. Với $(t,x) \in A \times E$, đặt*

$$f(x)(t) = a(t) + \int_A g(t, x(s))\, ds.$$

Ở đây tích phân cần được hiểu là tích phân Lebesgue (nếu thay A bằng một hình hộp thì có thể dùng tích phân Riemann). Ta có f là một ánh xạ liên tục từ E vào E.

Chứng minh. Trước hết ta cần kiểm f được định nghĩa tốt, cụ thể là kiểm $f(x)(t)$ là một số thực, và $f(x)$ liên tục theo t tức $f(x) \in E$.

Hàm liên tục trên tập compắc trong $\mathbb{R}^n$ thì khả tích Lebesgue (nhưng không nhất thiết khả tích Riemann), do đó $f(x)(t)$ là một số thực.

Để kiểm tra tính liên tục của $f(x)$ có thể dùng sự liên tục đều. Vì x liên tục trên A nên tập $x(A) \subset \mathbb{R}$ là compắc, do đó tập $B = A \times x(A) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ là compắc. Vì g liên tục đều trên B nên cho $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\forall u \in B, \forall u' \in B, \|u - u'\| < \delta$ thì $|g(u) - g(u')| < \epsilon$. Như vậy nếu $\|t - t'\| < \delta$ thì $\|(t, x(s)) - (t', x(s))\| = \|t - t'\| < \delta$, do đó $|g(t, x(s)) - g(t', x(s))| < \epsilon$. Suy ra

$$\begin{aligned}|f(x)(t) - f(x)(t')| &= \left| \int_A (g(t, x(s)) - g(t', x(s))\, ds \right| \le \int_A |g(t, x(s)) - g(t', x(s)|\ ds \\ &\le \epsilon |A|.\end{aligned}$$

(Vì A bị chặn nên độ đo Lebesgue của A là một số thực, không phải là ∞). Vậy $f(x)$ liên tục theo t.

Để kiểm tra tính liên tục của $f(x)$ cũng có thể dùng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue như sau. Giả sử t_n hội tụ về t. Hàm g liên tục trên tập compắc $A \times x(A)$ nên bị chặn, do đó có số thực M sao cho $\forall t \in A, \forall s \in A, |g(t, x(s)| \le M$. Đặt $g_n(s) = g(t_n, x(s))$ thì $\lim_{n\to\infty} g_n(s) = g(t, x(s))$ và $\forall s \in A, |g_n(s)| \le M$. Áp dụng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue cho dãy $(g_n)_n$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n(s)\, ds = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n(s)\, ds = \int_A g(t, x(s))\, ds.$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g(t_n, x(s))\, ds = \int_A g(t, x(s))\, ds.$$

Do đó $f(x)$ liên tục theo t.

Giờ ta chứng tỏ f liên tục tại $x \in E$ bất kì. Lí luận này dùng tính liên tục đều, rất giống ở trên nhưng cần có một điều chỉnh. Vì g liên tục đều trên $B = A \times [-\|x\| - 1, \|x\| + 1]$ nên cho $\epsilon > 0$, có $1 > \delta > 0$ sao cho $\forall u \in B, \forall u' \in B, \|u - u'\| < \delta$ thì $|g(u) - g(u')| < \epsilon$. Như vậy nếu $\|x - x'\| < \delta$ thì $\forall s \in A, \|(x(s) - x'(s)\| < \delta$, do đó $\|(t, x(s)) - (t, x'(s))\| < \delta$, và do $(t, x'(s)) \in B$ nên dẫn tới $|g(t, x(s)) - g(t, x'(s))| < \epsilon$. Suy ra

$$|f(x)(t) - f(x')(t)| \le \int_A |g(t, x(s)) - g(t, x'(s))|\ ds \le \epsilon |A|.$$

Điều này dẫn tới $\|f(x) - f(x')\| \le \epsilon |A|$. Lí luận này chứng tỏ f liên tục tại x. □

Định lý Ascoli

Định lý này cho một tiêu chuẩn cho sự compắc trong không gian trong không gian các hàm liên tục, còn được gọi là định lý Ascoli–Arzela:

2.7.2 Định lý (định lý Ascoli). *Cho $A \subset C(X, \mathbb{R})$ với X là một không gian mêtríc compắc. Khi đó $\bar{A}$ là compắc khi và chỉ khi có cả hai điều sau đây:*

(a) A bị chặn từng điểm: $\forall x \in X$, $\{f(x) \mid f \in A\}$ bị chặn.

(b) A đồng liên tục (equicontinuous) : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x \in X, \forall y \in X, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Chứng minh. * Chứng minh này dùng tính tiền compắc và tính compắc qua phủ mở, có chẳng hạn ở [7, 14]. Chứng minh với cách viết hơi khác có trong [1, tr. 71], [14, tr. 79]. Một không gian mêtríc X là tiền compắc (còn được gọi là hoàn toàn bị chặn - totally bounded), khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$ nó được phủ bởi hữu hạn quả cầu bán kính ϵ, tức là tồn tại $x_i \in X$, $1 \le i \le n$, sao cho $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon) \supset X$. Ta có kết quả: Một không gian mêtríc là compắc khi và chỉ khi nó là tiền compắc và đầy đủ; và một không gian mêtríc là compắc khi và chỉ khi mọi phủ mở có một phủ con hữu hạn.

($\Rightarrow$) Vì A bị chặn nên bị chặn từng điểm.

Ta xét tính đồng liên tục. Vì $\bar{A}$ compắc nên là tiền compắc, dẫn tới $\forall \epsilon > 0$ có $f_i \in C_i(X,\mathbb{R})$, $1 \le i \le n$ sao cho $\bigcup_{i=1}^n B(f_i, \epsilon) \supset A$. Suy ra với mọi $f \in A$ có i sao cho $\|f - f_i\| < \epsilon$. Vì X compắc nên với mỗi i hàm f_i là liên tục đều, do đó $\exists \delta_i > 0, \|x - y\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$. Lấy $\delta = \min\{\delta_i \mid 1 \le i \le n\}$. Khi đó nếu $\|x - y\| < \delta$ thì

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < 3\epsilon.$$

Vậy A là đồng liên tục.

($\Leftarrow$) Vì $\bar{A}$ đóng trong $C(X,\mathbb{R},\|\|_\infty)$ nên $\bar{A}$ là đầy đủ. Do đó chỉ cần chứng minh $\bar{A}$ là tiền compắc.

Cho $\epsilon > 0$. Vì A là đồng liên tục nên $\exists \delta > 0, \forall f \in A, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Họ các quả cầu $B(x,\delta)$ phủ X, do đó có phủ con hữu hạn $\{B(x_i,\delta) \mid 1 \le i \le m\}$. Tập $Y = \bigcup_{i=1}^m \{f(x_i) \mid f \in A\}$ bị chặn do tính bị chặn từng điểm của A, nên tồn tại một họ hữu hạn các khoảng mở $B(a_j, \epsilon)$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$ phủ Y. Cho $f \in A$, với mỗi i, vì $f(x_i) \in Y$ nên tồn tại j sao cho $f(x_i) \in B(a_j, \epsilon)$. Gọi S là tập hợp tất cả các ánh xạ từ tập $\{1,2,\ldots,m\}$ vào tập $\{1,2,\ldots,n\}$ thì họ hữu hạn gồm các tập $\Phi_\sigma = \{f \in A \mid f(x_i) \in B(a_{\sigma(i)}, \epsilon), 1 \le i \le m\}$, $\sigma \in S$ phủ A.

Nếu $f, g \in \Phi_\sigma$ thì với mỗi $x \in X$ có i sao cho $x \in B(x_i, \delta)$, nên

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - a_{\sigma(i)}| + |a_{\sigma(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| < 4\epsilon.$$

Vậy Φ_σ chứa trong một quả cầu tâm thuộc A với bán kính 4ϵ. Họ các quả cầu này phủ A. Vậy A là tiền compắc. Điều này dẫn tới $\bar{A}$ là tiền compắc. □

Định lý Stone–Weierstrass

Tập $A \subset C(K,\mathbb{R})$ được gọi là một đại số con (của $C(K,\mathbb{R})$) khi $f + g, fg, \alpha f \in A$, với mọi $f, g \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, và được gọi là tách các điểm của K khi với mọi $x, y \in K$, nếu $x \ne y$ thì tồn tại $f \in A$ sao cho $f(x) \ne f(y)$.

2.7.3 Định lý (định lý Stone–Weierstrass). *Cho K là một không gian mêtríc compắc và $A \subset C(K,\mathbb{R})$ là một đại số con. Nếu A tách các điểm của K và chứa các hàm hằng thì A dầy đặc trong $C(K,\mathbb{R})$.*

Chứng minh có trong [14].

Do tập A các đa thức theo n biến là một đại số con, chứa các hàm hằng và tách mọi điểm của $\mathbb{R}^n$, ta được

2.7.4 Hệ quả. *Mọi hàm số liên tục xác định trên tập con K compắc trong $\mathbb{R}^n$ đều có thể xấp xỉ đều bằng các đa thức n biến.*

2.8 Bài tập

2.8.1. Trong một không gian định chuẩn chứng minh rằng $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$.

2.8.2. ✓ Cho (x_n) và (y_n) là hai dãy lần lượt hội tụ về x và y trong một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|)$, và cho α thuộc $\mathbb{F}$. Chứng minh:

(a) Dãy (x_n) chỉ có một giới hạn.

(b) Dãy $(x_n + y_n)$ hội tụ về $x + y$.

(c) Dãy (αx_n) hội tụ về αx.

2.8.3. ✓ Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chứng minh rằng ánh xạ $h(x) = \|x\|$ liên tục trên E.

2.8.4. ✓ Với $a \in X$ xét toán tử tịnh tiến $x \mapsto x + a$, và với $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ xét toán tử co dãn (vị tự) $x \mapsto \alpha x$. Chứng minh phép tịnh tiến và phép vị tự là các phép đồng phôi từ một không gian định chuẩn lên chính nó.

2.8.5. Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Đặt $\|(x, y)\| = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$. Đây có là một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$ không?

2.8.6. Cho $\|\cdot\|_1$ là một chuẩn trên không gian vectơ X. Chứng tỏ với mọi số thực dương α thì $\|x\|_2 = \alpha\|x\|_1$ cũng là một chuẩn trên X. Chứng tỏ hai chuẩn này tương đương nhau.

2.8.7. * Chứng minh rằng hai chuẩn trên một không gian vectơ là tương đương khi và chỉ khi một tập là mở trong chuẩn này thì mở trong chuẩn kia.

2.8.8 (mêtric sinh ra chuẩn). Cho không gian vectơ X trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(a) Giả sử X có một chuẩn kí hiệu là $\|\cdot\|$. Chứng tỏ nếu ta đặt $d(x, y) = \|x - y\|$ thì đây là một mêtríc trên X. Vậy chuẩn sinh ra mêtríc. Chứng tỏ mêtríc d này thỏa, với mọi x, y, z thuộc X, với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= d(x, y) \\ d(\alpha x, \alpha y) &= |\alpha| d(x, y). \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

(b) Ngược lại giả sử X có mêtríc d thỏa (2.8.9). Chứng tỏ nếu ta đặt $\|x\| = d(x, 0)$ thì đây là một chuẩn trên X. Vậy mêtríc thỏa (2.8.9) sinh ra chuẩn. Chứng tỏ ta lại có $d(x, y) = \|x - y\|$.

2.8.10. (a) Kiểm ánh xạ f ở 2.3.5 là một phép đồng phôi từ $(X, \|\cdot\|)$ sang $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$.

(b) Chứng tỏ hai không gian định chuẩn ứng với hai chuẩn trên cùng không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ là đồng phôi với nhau qua ánh xạ đồng nhất.

(c) Kết luận các không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên cùng một trường mà có cùng số chiều thì đẳng cấu tôpô với nhau.

2.8.11. Chứng tỏ $\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^\infty$.

2.8.12. ✓ Đặt c_c là tập hợp tất cả các dãy $x = (x_n)$ trong $\mathbb{F}$ sao cho có một số nguyên $N(x)$ để cho $x_n = 0$ với mọi $n \geq N(x)$.

(a) Chứng minh $(c_c, \|\cdot\|_i)$ là các không gian con vô hạn chiều của ℓ^p với $1 \leq p \leq \infty$.

(b) Từ đó suy ra ℓ^p với $1 \leq p \leq \infty$ là không gian vectơ vô hạn chiều.

(c) Chứng minh tập c_c là dày đặc (trù mật) trong ℓ^p với $1 \leq p < \infty$.

(d) Tập c_c có dày đặc trong ℓ^∞ hay không?

2.8.13. Trong ℓ^∞ xét $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, trong đó số 1 nằm ở vị trí thứ n. Chứng tỏ dãy $(e_n)_{n \geq 1}$ không có dãy con hội tụ. Suy ra quả cầu $B'(0, 1)$ không compắc.

Không gian các hàm liên tục

2.8.14 (hội tụ đều thì hội tụ từng điểm). Trên không gian $B(S, X)$, chứng tỏ nếu dãy $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ về f thì với mỗi $x \in S$ dãy $(f_n(x))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $f(x)$.

2.8.15. Tập sau đây có đóng hay mở không trong $C([0, 1], \mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$?

(a) $\{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \min_{t \in [0,1]} x(t) > -2\}$.

(b) $\{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \min_{t \in [0,1]} x(t) \geq -2\}$.

(c) $\{x \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 x < 2\}$.

2.8.16. ✓ Xét $X = C([0,1],\mathbb{R})$, không gian các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Đặt $M = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

(a) Chứng tỏ M là một không gian vectơ con của X.

(b) Cho ví dụ hai phần tử độc lập tuyến tính của M.

(c) Chứng tỏ M là một tập con đóng của X.

(d) Chứng tỏ với chuẩn thừa hưởng từ X thì M là một không gian Banach.

(e) Với chuẩn $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ thì M có là một không gian Banach không?

(f) M là không gian vectơ hữu hạn chiều hay vô hạn chiều?

2.8.17. Xét $X = C([0,1],\mathbb{R})$, không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.

(a) Đặt $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ từng điểm hay không? Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong X hay không?

(b) Đặt $f_n(x) = x^n$. Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ từng điểm hay không? Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong X hay không? Có là dãy Cauchy hay không?

2.8.18. ✓ Xét X là không gian vectơ các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Xét chuẩn $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ và $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

(a) Chứng minh rằng với mọi $f \in X$ thì $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$.

(b) Suy ra mọi dãy hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ thì cũng hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$, mọi dãy Cauchy theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ cũng là dãy Cauchy theo chuẩn $\|\cdot\|_1$.

(c) Giải thích tại sao hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_\infty$ không tương đương với nhau.

2.8.19. Xét X là không gian vectơ các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Xét chuẩn $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, và $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in [0,1]$, đặt $f_n(x) = x^n$.

(a) Vẽ đồ thị của f_n. Đồ thị thay đổi như thế nào khi n thay đổi?

(b) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ hay không?

(c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$ hay không?

(d) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_2$ hay không?

(e) Sự hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$ hay chuẩn $\|\cdot\|_2$ có dẫn tới sự hội tụ từng điểm hay không?

2.8.20. Cho $X = C([0,1],\mathbb{R})$ là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Trên X xét chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

và chuẩn

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, cho

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{nx}}}.$$

(a) Chứng tỏ $f_n \in X$. Vẽ phác họa đồ thị của f_n với $n = 0,1,2$.

(b) Tính $\|f_n\|_\infty$.

(c) Tìm giới hạn từng điểm của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tức là với $x \in [0,1]$, hãy tìm $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Hàm f có thuộc X hay không?

(d) Chứng tỏ nếu dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ về $g \in X$ (hội tụ đều) thì phải hội tụ từng điểm về g, tức là $\forall x \in [0,1]$ thì $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

(e) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không?

(f) Tính $\|f_n\|_2$.

(g) Tính $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

(h) Chứng tỏ dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ về 0.

(i) Chứng minh rằng một dãy bất kỳ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về h trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ thì cũng hội tụ về h trong $(X, \|\cdot\|_2)$.

(j) Giải thích vì sao hai chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ và $\|\cdot\|_2$ không tương đương trên X.

2.8.21. Cho $X = C([0,1],\mathbb{R})$ là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Trên X xét chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

và chuẩn

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, cho

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}}.$$

(a) Vẽ phác họa đồ thị của f_n với $n = 0,1,2$.

(b) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không?

(c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ hay không?

2.8.22. Xét $C([0,1],\mathbb{R})$, không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là tập hợp các hàm từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ khả vi liên tục. Ở đây đạo hàm tại 0 và 1 được hiểu là đạo hàm một phía.

(a) Hãy kiểm $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là một không gian định chuẩn con của $C([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Chứng tỏ nếu một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$ hội tụ về $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ thì với mỗi $x \in [0,1]$ dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $f(x)$.

(c) Với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$f_n(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|^{\frac{n+1}{n}}.$$

Hãy kiểm $f_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

(d) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trên có hội tụ trong $C([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(e) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trên có hội tụ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(f) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có phải là một tập con đóng của $C([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(g) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có phải là một không gian Banach không?

(h) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là không gian vectơ hữu hạn chiều hay vô hạn chiều?

(i) Với chuẩn $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$ thì $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có là một không gian Banach không?

2.8.23. Xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là tập hợp các hàm từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ khả vi liên tục. Ở đây đạo hàm tại 0 và 1 được hiểu là đạo hàm một phía. Với $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ đặt

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(a) Hãy kiểm đây là một chuẩn trên $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Trong phần còn lại của bài toán ta xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn này.

(b) Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong không gian định chuẩn $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Chứng tỏ tồn tại $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ và $y \in C([0,1],\mathbb{R})$ sao cho $x_n \to x$ và $x_n' \to y$ trong $C([0,1],\mathbb{R})$.

(c) Dùng Định lý cơ bản của Vi Tích phân,

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(s)\, ds,$$

hãy chứng tỏ là $y = x'$.

(d) Hãy chứng tỏ là dãy $(x_n)_n$ hội tụ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Vậy $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là một không gian Banach.

Không gian L^p

2.8.24. Cho $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, ta chứng minh

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ hầu khắp.}$$

(a) Đặt $D = \{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\}$. Lấy dãy $C_n \in D$, $n \in \mathbb{Z}^+$, hội tụ về $\inf D$. Đặt $E_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > C_n\}$ và $E = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \inf D\}$. Chứng tỏ $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

(b) Suy ra $\mu(E) = 0$, và suy ra đánh giá trên.

(c) Chứng tỏ $\inf D \in D$, tức là

$$\|f\|_\infty = \min\left\{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\right\},$$

Vậy $\|f\|_\infty$ chính là chặn trên hầu khắp nhỏ nhất của $|f|$.

2.8.25. Ta kiểm 2.6.7. Cho $\Omega = [0,1]$, μ là độ đo Lebesgue, và f là liên tục, ta chứng minh

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

(a) Chứng tỏ $|f(x)| \le C$ xảy ra hầu khắp khi và chỉ khi điều đó xảy ra với mọi x.

(b) Đặt $A = \{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ và D là tập hợp các chặn trên của A. Chứng tỏ $\|f\|_\infty = \min D = \sup A$.

(c) Có thể mở rộng kết quả này cho các không gian đo Ω nào khác?

2.8.26. Giả sử $\mu(\Omega) < \infty$. Chứng tỏ $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

2.8.27. * Giả sử $\mu(\Omega) < \infty$. Cho $1 \le p < q \le \infty$.

(a) Dùng bất đẳng thức Hölder, chứng tỏ

$$\|f\|_p \le \|f\|_q\, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

(b) Chứng tỏ $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Định lý Ascoli

2.8.28. Cho X là một tập compắc trong một không gian định chuẩn $(E,\|\cdot\|)$ và $A = \{f_1,\cdots,f_n\}$ là một tập con hữu hạn của $C(X,\mathbb{R})$. Chứng minh A là đồng liên tục.

2.8.29. Cho M là một tập con bị chặn của không gian $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Xét tập hợp A các nguyên hàm của các phần tử của M có dạng $y(t) = \int_0^t x(s)\, ds$, $x \in M$. Chứng tỏ A có bao đóng compắc trong $C([0,1],\mathbb{R})$.

2.8.30. Cho A là một tập con của tập $C^1([0,1],\mathbb{R})$ trong không gian $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup thỏa $\forall f \in A, \|f'\|_\infty \le M$. Chứng tỏ A có bao đóng compắc trong $C([0,1],\mathbb{R})$.

2.8.31. Cho M là một tập con bị chặn của không gian $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Chứng tỏ tập các hàm $y(t) = \int_0^1 e^{tx(s)}\, ds$, $x \in M$, có bao đóng compắc trong $C([0,1],\mathbb{R})$.

2.8.32. Cho X là một không gian mêtríc compắc, cho A là một tập con bị chặn của không gian $C(X,\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Giả sử A là đồng Lipschitz, nghĩa là $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \forall y \in X, \forall f \in A, |f(x) - f(y)| \le M\|x-y\|$. Chứng tỏ mọi dãy trong A có dãy con hội tụ (về một giới hạn không nhất thiết ở trong A).

Các bài tập khác

2.8.33. * Xét phương trình

$$\begin{cases} y'(t) = \sin^2 y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.8.34}$$

Ở đây y là một hàm số thực trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng tỏ phương trình vi phân trên tương đương với phương trình tích phân sau:

$$y(t) = 1 + \int_0^t \sin^2 y(s)\, ds.$$

(b) Với mỗi hàm số thực liên tục y trên $\mathbb{R}$, đặt $f(y)$ là hàm số thực cho bởi

$$f(y)(t) = 1 + \int_0^t \sin^2 y(s)\, ds.$$

Chứng tỏ f là một ánh xạ được định nghĩa tốt từ tập $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vào chính nó.

(c) Chứng tỏ tồn tại $T > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho trên không gian định chuẩn $X = C([0,T],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|$ thì

$$\forall y \in X, \forall z \in X, \|f(y) - f(z)\| \le \alpha \|y - z\|.$$

(d) Dùng định lý ánh xạ co, chứng tỏ f có điểm bất động trên X.

(e) Suy ra phương trình (2.8.34) có nghiệm trên $[0,T]$.

Đây là một phương pháp cơ bản để chứng tỏ sự tồn tại nghiệm và xây dựng nghiệm của phương trình vi phân.

2.8.35. Kiểm 2.7.4.

Chương 3 Ánh xạ tuyến tính liên tục

3.1 Chuẩn của ánh xạ tuyến tính liên tục

Cho E và F là hai không gian vectơ trên cùng một trường $\mathbb{F}$ là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$. Ánh xạ $T : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính nếu với mọi $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$T(x+y) = T(x) + T(y),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Với ánh xạ tuyến tính người ta có thói quen viết $T(x)$ là Tx. Một hệ quả của tính tuyến tính là luôn có $T0 = 0$.

Ánh xạ tuyến tính là đề tài của môn Đại số tuyến tính. Trong môn Giải tích hàm ta xét sự kết hợp giữa tính tuyến tính và tính liên tục, do sự có mặt của chuẩn. Từ đây ta xét các ánh xạ tuyến tính giữa các không gian định chuẩn.

3.1.1 Mệnh đề. *Ánh xạ tuyến tính liên tục tại một điểm thì liên tục tại mọi điểm.*

Chứng minh. Cho T là tuyến tính liên tục tại x_0. Theo định nghĩa ta có

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon.$$

Điều này có thể được viết lại một cách tương đương là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|(x - x_0) - 0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0) - T0\| < \epsilon.$$

Đặt $y = x - x_0$ thì ta được mệnh đề tương đương

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, \|y - 0\| < \delta \Rightarrow \|Ty - T0\| < \epsilon.$$

Tức là T là liên tục tại 0. Như vậy liên tục tại một điểm nào đó thì liên tục tại 0, còn liên tục tại 0 dẫn tới liên tục tại một điểm bất kì.

Một cách trình bày khác là dùng dãy. Ánh xạ T liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $(x_n \to x_0) \Rightarrow (Tx_n \to Tx_0)$. Điều này tương đương với $(x_n - x_0 \to 0) \Rightarrow (T(x_n - x_0) \to 0)$. Đặt $y_n = x_n - x_0$ thì điều này tương đương với $(y_n \to 0) \Rightarrow (Ty_n \to T0)$, tức là T là liên tục tại 0. □

Giả sử T là tuyến tính liên tục, do đó liên tục tại 0. Theo định nghĩa ta có

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - T0\| < \epsilon.$$

Ta viết lại

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \epsilon.$$

Do đó với $\epsilon > 0$ cho trước và $\delta > 0$ thích hợp thì

$$\forall x \in E, \left\|\frac{x}{\delta}\right\| < 1 \Rightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Đặt $y = x/\delta$ thì ta được
$$\forall y \in E, \|y\| < 1 \Rightarrow \|Ty\| < \frac{\epsilon}{\delta}.$$
Như vậy một ánh xạ tuyến tính liên tục thì bị chặn trên quả cầu đơn vị (mặc dù không bị chặn trên toàn không gian trừ khi đó là ánh xạ 0). Vì vậy một số tài liệu cũng gọi ánh xạ tuyến tính liên tục là ***ánh xạ tuyến tính bị chặn***. Nối tiếp tinh thần của không gian các hàm bị chặn $B(S,X)$ (2.5.3) ta đo một ánh xạ tuyến tính liên tục bằng cách đo độ lớn của tập ảnh của quả cầu đơn vị.

3.1.2 Định nghĩa. Gọi $L(E,F)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F. Với $T \in L(E,F)$ ta đặt
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,1)\}.$$

3.1.3 Ghi chú. Ta có thể chọn một quả cầu có bán kính khác 1, nhưng chỉ được một chuẩn tương đương mà thôi, xem 3.8.4.

3.1.4 Bổ đề. *Với $T \in L(E,F)$ thì $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B'(0,1)\}$.*

Chứng minh. Rõ ràng $\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$.

Giả sử $\|x\| = 1$. Có dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $B(0,1)$ hội tụ về x, chẳng hạn $x_n = \frac{n}{n+1}x$. Suy ra Tx_n hội tụ về Tx, và $\|Tx_n\|$ hội tụ về $\|Tx\|$. Vì $\|Tx_n\| \le \|T\|$ nên qua giới hạn ta được $\|Tx\| \le \|T\|$. Vậy $\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \le \|T\|$. □

Liên quan tới kết quả vừa rồi, chú ý rằng nếu $x \neq 0$ thì
$$Tx = \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tag{3.1.5}$$
với $\frac{x}{\|x\|}$ là một vectơ có chiều dài bằng 1, do đó ***một ánh xạ tuyến tính được xác định bởi giá trị của nó trên mặt cầu đơn vị***.

3.1.6 Mệnh đề. *Với $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,1)\}$ thì đây là một chuẩn trên $L(E,F)$.*

Chứng minh. Ta kiểm tra các yêu cầu của chuẩn. Giả sử $\|T\| = 0$. Điều này do Bổ đề 3.1.4 đồng nghĩa với việc giá trị của T bằng 0 trên mặt cầu đơn vị, do đó theo công thức (3.1.5) thì T bằng 0 tại mọi điểm, tức là $T = 0$.

Các tính chất khác đã được kiểm khi ta xét không gian $B(S,X)$ ở 2.5.3. □

3.1.7 Mệnh đề. *Với $T \in L(E,F)$ thì $\forall x \in E, \|Tx\| \le \|T\| \|x\|$.*

Chứng minh. Cho $x \neq 0$. Ta có $\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$ nên $\left\|T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \le \|T\|$, do đó $\|Tx\| \le \|T\| \|x\|$. □

Một hệ quả đơn giản thường được dùng:

3.1.8 Mệnh đề. *Ánh xạ tuyến tính $T : E \to F$ là liên tục khi và chỉ khi có $M \in \mathbb{R}$ sao cho*
$$\forall x \in E, \|Tx\| \le M \|x\|.$$

3.2 Ánh xạ tuyến tính liên tục trên không gian định chuẩn hữu hạn chiều

3.2.1 Định lý. *Mọi ánh xạ tuyến tính trên không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều liên tục.*

Chứng minh. Giả sử $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều với một cơ sở tuyến tính $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Mỗi phần tử $x \in E$ đều có biểu diễn $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, với $x_i \in \mathbb{F}$. Xét $T : E \to F$ tuyến tính. Ta có

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i T e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|Te_i\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2}.\end{aligned}$$

Đặt $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ thì đây là một chuẩn trên E. Vì E là hữu hạn chiều nên hai chuẩn bất kì trên đó là tương đương, do đó có $\beta > 0$ sao cho $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|$. Từ bất đẳng thức trên ta được

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2}\,\|x\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2 \beta}\,\|x\|.$$

Vậy T liên tục trên $(E, \|\|)$. □

Nhắc lại từ môn Đại số tuyến tính rằng nếu không gian tuyến tính E có cơ sở tuyến tính $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ và không gian tuyến tính F có cơ sở tuyến tính $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ thì mỗi ánh xạ tuyến tính từ E vào F có thể được biểu diễn bởi một ma trận. Cụ thể như sau. Mỗi vectơ được viết như một cột gồm các tọa độ của nó trong cơ sở, chẳng hạn nếu $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ thì ta viết

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Viết

$$[Te_i] = \begin{pmatrix} T_{1,i} \\ T_{2,i} \\ \vdots \\ T_{n,i} \end{pmatrix}$$

thì

$$\begin{aligned}Tx = T\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i T e_i = \sum_{i=1}^m x_i\left(\sum_{j=1}^n T_{j,i} f_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m T_{j,i} x_i\right) f_j \\ = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m T_{i,j} x_j\right) f_i,\end{aligned}$$

Chú ý ở bước cuối ta đã hoán đổi tên của hai chỉ số i và j. Như vậy nếu viết $[T]$ là ma trận $\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ thì

$$[Tx] = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m T_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^m T_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m T_{n,j} x_j \end{pmatrix} = [T] \cdot [x].$$

Như vậy tác động của T được biểu diễn bởi một phép nhân ma trận. Ma trận biểu diễn của T có các cột là tọa độ của ảnh qua T của các vectơ trong cơ sở của E.

3.2.2 Ví dụ. Một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ phải có dạng $x \mapsto ax$ trong đó $a \in \mathbb{R}$. Chú ý hàm $x \mapsto ax + b$, vốn thường được gọi là hàm tuyến tính ở phổ thông và ở môn vi tích phân, không phải là hàm tuyến tính theo nghĩa của đại số tuyến tính bậc đại học, trừ khi $b = 0$.

3.2.3 Ví dụ ($\mathbb{R}^{n*}$). Xét $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, và đặt $\mathbb{R}^{n*} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ - không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Theo phần thảo luận tổng quát ở trên thì mỗi phần tử f của $\mathbb{R}^{n*}$ tương ứng với một phần tử $[f] = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ với $f_i = f(e_i)$. Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì $f(x) = [f] \cdot x = \sum_{i=1}^n f_i x_i$. Ta tìm $\|f\|$. Theo bất đẳng thức Buniakowski thì

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^n f_i x_i\right| \le \|[f]\|_2 \, \|x\|_2 \, .$$

Dấu bằng xảy ra khi lấy $x = [f]$. Vậy $\|f\| = \|[f]\|_2$.

Tiếp tục, ta nhận thấy ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{n*} &\to \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

là một song ánh tuyến tính và có $\|Tf\|_2 = \|f\|$, tức là bảo toàn chuẩn. Ta nói T là một ***phép đẳng cấu metric*** (còn gọi là một ***phép đẳng cự***) từ $\mathbb{R}^{n*}$ lên $\mathbb{R}^n$. Người ta nói ngắn gọn rằng đối ngẫu của không gian định chuẩn $\mathbb{R}^n$là chính nó.

3.3 Tính chuẩn

Giả sử ta có được một đánh giá với mọi x thì $\|Tx\| \le M \|x\|$ và tìm được một $x \neq 0$ để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức này. Khi đó

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = M,$$

nên $\|T\| = M$. Đây là một trường hợp thường gặp trong môn này.

Cách tìm chuẩn trong trường hợp đơn giản:

Bước 1: Tìm một đánh giá $\|Tx\| \le M \|x\|$ thật sát.

Bước 2: Tìm một $x \neq 0$ để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức trên.

Bước 3: Kết luận $\|T\| = M$.

3.3.1 Ví dụ. Giả sử $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tuyến tính. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $Tx = T(x \cdot 1) = xT(1)$. Ta có

$$\|Tx\| = |x| \, \|T(1)\|,$$

do đó $\|T\| = \|T(1)\|$.

3.3.2 Ví dụ. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$T(x, y) = (a, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Với chuẩn $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì

$$|T(x, y)| = |ax + by| \le \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \|(a, b)\|_2 \, \|(x, y)\|_2 \, .$$

Nếu lấy $(x, y) = (a, b)$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy $\|T\| = \|(a, b)\|_2$.

3.3.3 Ví dụ. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T: \ell^1 &\to \ell^1 \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) &\mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots). \end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ T bỏ đi phần tử đầu tiên của mỗi dãy.

Trước hết ta kiểm T được xác định. Thật vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

nên giá trị của T quả thực thuộc ℓ^1. Tính tuyến tính của T cũng rất đơn giản. Xét tính liên tục của T. Ta có

$$\|Tx\| = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|$$

nên T là tuyến tính liên tục và $\|T\| \le 1$. Ở bất đẳng thức trên nếu ta lấy $x = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ thì đẳng thức xảy ra. Vậy $\|T\| = 1$.

Các ví dụ phức tạp hơn có trong các bài tập như 3.8.8, 3.8.9, 3.8.13.

3.4 Không gian $L(E,F)$

3.4.1 Định lý. *Nếu F là một không gian Banach thì $L(E,F)$ là một không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự chứng minh của mệnh đề 2.5.4. Giả sử $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $L(E,F)$. Cho $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho với $m,n \ge N$ thì $\|T_m - T_n\| < \epsilon$. Với mỗi $x \in E$, vì

$$\|T_m x - T_n x\| \le \|T_m - T_n\| \, \|x\| < \epsilon \|x\|, \tag{3.4.2}$$

nên $(T_n x)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong F, do đó hội tụ về một phần tử của F gọi là Tx. Nói cách khác dãy hàm $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ từng điểm về hàm T. Dễ dàng kiểm tra rằng T là tuyến tính.

Lấy giới hạn hai vế của (3.4.2) khi m tiến ra vô cùng ta được với $n \ge N$ thì

$$\|T_n x - Tx\| \le \epsilon \|x\|,$$

suy ra $(T_n - T) \in L(E,F)$, do đó $T \in L(E,F)$, và $\|T_n - T\| \le \epsilon$. Vậy $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về T trong $L(E,F)$. □

Khi $F = \mathbb{F}$ thì $L(E,\mathbb{F})$ còn được kí hiệu là E^* và mỗi phần tử của E^* còn được gọi là một ***phiếm hàm*** tuyến tính liên tục. Bản thân E^* được gọi là ***không gian đối ngẫu*** của E. Vậy E^* là một không gian Banach.

3.5 Một số ánh xạ tuyến tính liên tục đặc biệt

Toán tử tích phân

3.5.1 Mệnh đề. *Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ compắc và $K : A \times A \to \mathbb{R}$ liên tục. Đặt*

$$\begin{aligned} T: C(A,\mathbb{R}) &\to C(A,\mathbb{R}) \\ x &\mapsto Tx : A \to \mathbb{R},\ Tx(t) = \int_A K(s,t)x(s)\,ds, \end{aligned}$$

thì T là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

Ở đây ta đang dùng tích phân Lebesgue (nếu thay A bằng một hình hộp thì có thể dùng tích phân Riemann). Đây là hệ quả lập tức của 2.7.1. Hàm K thường được gọi là ***nhân của toán tử tích phân*** này. Xem một ví dụ ở 3.8.10.

Phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L^p

Cho $p,q \in [1,\infty]$ thỏa
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$
Với $g \in L^q(\Omega)$, xét ánh xạ
$$\begin{aligned} S(g): L^p(\Omega) &\to \mathbb{F} \\ f &\mapsto \int_\Omega f\bar{g}. \end{aligned}$$
Theo bất đẳng thức Hölder:
$$|S(g)(f)| = \left|\int_\Omega f\bar{g}\right| \le \int_\Omega |f\bar{g}| \le \|f\|_p \|g\|_q, \tag{3.5.2}$$
nên $S(g)$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục và $\|S(g)\| \le \|g\|_q$.

Nhằm tính chuẩn của $S(g)$, để xảy ra đẳng thức trong bất đẳng thức Holder ta tìm f sao cho $|f|^p = |g|^q$. Nếu $2 \le q < \infty$ thì có thể lấy $f = |g|^{q-2}g$ và kiểm tra trực tiếp được rằng đẳng thức xảy ra ở (3.5.2), vậy $\|S(g)\| = \|g\|_q$ trong trường hợp này. Thực ra $\|S(g)\| = \|g\|_q$ với mọi $1 < q < \infty$, nhưng chứng minh khó hơn.

Ví dụ 3.2.3 và các bài tập 3.8.8 và 3.8.9 bàn về các trường hợp riêng của kết quả này.

3.6 Định lý Hahn–Banach

Định lý Hahn–Banach là một trong những kết quả quan trọng của Giải tích hàm. Ngắn gọn, nó nói rằng ***một phiếm hàm tuyến tính liên tục luôn có thể mở rộng bảo toàn chuẩn***.

3.6.1 Định lý (định lí Hahn–Banach). *Cho M là một không gian con của không gian định chuẩn E trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục T trên M đều mở rộng được thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\tilde{T}$ trên E sao cho $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Như bài tập 3.8.5 cho thấy, khi mở rộng ánh xạ tuyến tính liên tục thì chuẩn không thể giảm. Vì vậy giữ nguyên được chuẩn là một phần đáng kể của định lý Hahn-Banach.

Chứng minh của định lý Hahn-Banach có giá trị giáo dục cao, cần được nghiên cứu kỹ trong môn học này.

Chứng minh. ***Xét trường hợp*** $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Dàn ý của chứng minh là trước hết chứng tỏ luôn có thể mở rộng thêm 1 chiều trong Bước 1, sau đó dùng "qui nạp siêu hạng" để mở rộng bất kì trong Bước 2.

Bước 1: Giả sử $M \ne E$ và $E = M + N$ với N là một không gian con một chiều của E sinh bởi x_0. Như vậy $E = \{x + tx_0 \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}$. Một mở rộng tuyến tính của T thành $\tilde{T}: E \to \mathbb{F}$ sẽ được xác định bởi giá trị của nó tại x_0, vì $\tilde{T}(x+tx_0) = \tilde{T}x + t\tilde{T}x_0 = Tx + t\tilde{T}x_0$. Ta chứng tỏ tồn tại giá trị $\tilde{T}(x_0)$ để $\tilde{T}$ là liên tục và $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Điều kiện là
$$|\tilde{T}(x+tx_0)| \le \|T\| \, \|x+tx_0\|, \ \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$
Vì $\tilde{T}$ mở rộng T nên $\|\tilde{T}\| \ge \|T\|$, do đó điều kiện trên sẽ đảm bảo $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Thay x bởi tx điều kiện trên tương đương với
$$|\tilde{T}(x+x_0)| \le \|T\| \, \|x+x_0\|, \ \forall x \in M.$$

Đây là một kĩ thuật rất có ích, giúp loại bỏ được biến t. Trên trường số thực điều kiện trên tương đương với

$$-\|T\|\,\|x+x_0\|-Tx \le \tilde{T}(x_0) \le \|T\|\,\|x+x_0\|-Tx,\ \forall x\in M.$$

Sự tồn tại của một số thực cố định $\tilde{T}(x_0)$ như vậy tương đương với tính chất sau, dựa trên sự đầy đủ của tập số thực:

$$\sup\{-\|T\|\,\|x+x_0\|-Tx \mid x\in M\} \le \inf\{\|T\|\,\|x+x_0\|-Tx \mid x\in M\},$$

đồng nghĩa với việc với mọi $x_1\in M, x_2\in M$ thì

$$-\|T\|\,\|x_1+x_0\|-Tx_1 \le \|T\|\,\|x_2+x_0\|-Tx_2,$$

tức là

$$T(x_2-x_1) \le \|T\|\,(\|x_2+x_0\|+\|x_1+x_0\|).$$

Điều này thì có được do bất đẳng thức tam giác:

$$T(x_2-x_1) \le \|T\|\,\|x_2-x_1\| \le \|T\|\,\|(x_2+x_0)-(x_1+x_0)\| \le \|T\|\,(\|x_2+x_0\|+\|x_1+x_0\|).$$

Vậy bước 1 đã xong.

Bước 2: Ta dùng bổ đề Zorn (3.6.2) để chứng tỏ có một mở rộng cực đại của T, và do bước 1 nên mở rộng cực đại đó đạt được khi nó được xác định trên E. Xét tập C tất cả các cặp (A,S) trong đó A là một không gian con của E chứa M, và S là một mở rộng bảo toàn chuẩn của T lên A. Chẳng hạn $(M,T)\in C$. Trên tập hợp C này xét quan hệ thứ tự $(A,S)\le(A',S')$ nếu $A\subset A'$ và $S'|_A=S$. Giả sử F là một tập con của C có thứ tự toàn phần, nghĩa là hai phần tử bất kì trong F so sánh được với nhau. Đặt $B=\bigcup_{(A,S)\in F}A$. Do thứ tự trên F là toàn phần mà ta kiểm được B là một không gian vectơ. Đặt $g: B\to\mathbb{R}$ bởi $g(x)=S(x)$ nếu $(A,S)\in F$ và $x\in A$, thì cũng nhờ F có thứ tự toàn phần mà ánh xạ này được định nghĩa tốt. Khi đó g là tuyến tính, và

$$|g(x)|=|S(x)|\le\|S\|\,\|x\|=\|T\|\,\|x\|$$

nên g là liên tục. Đẳng thức trên cũng chứng tỏ ngay $\|g\|=\|T\|$. Vậy cặp (B,g) là một chặn trên của họ F.

Theo bổ đề Zorn, tập C có một phần tử cực đại (A,S).

Ở bước 1 ta thấy luôn mở rộng được S lên một chiều cao hơn trừ khi A bằng E. Vì S là cực đại, nên bắt buộc $A=E$. Vậy S chính là mở rộng bảo toàn chuẩn $\tilde{T}$ của T lên E.

Xét trường hợp $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Trước hết ta chú ý điều sau về ánh xạ tuyến tính phức. Giả sử $T: E\to\mathbb{C}$ tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$. Viết $T=u+iv$ trong đó u và v là hàm giá trị thực. Khi đó u và v tuyến tính trên trường $\mathbb{R}$, và

$$\begin{aligned}T(ix)&=u(ix)+iv(ix)\\&=iT(x)=-v(x)+iu(x),\end{aligned}$$

do đó $v(x)=-u(ix)$, suy ra $T(x)=u(x)-iu(ix)$. Ngược lại nếu u tuyến tính trên trường $\mathbb{R}$ và $T(x)=u(x)-iu(ix)$ thì T là tuyến tính trên $\mathbb{C}$, vì $T(ix)=iT(x)$.

Xét chuẩn của T. Lấy $\alpha=\overline{Tx}/|Tx|$ thì $|\alpha|=1$ và $\alpha Tx=|Tx|\in\mathbb{R}$. Từ đó

$$|Tx|=\alpha Tx=T(\alpha x)=u(\alpha x)\le\|u\|\,|\alpha|\,\|x\|=\|u\|\,\|x\|.$$

Từ đây suy ra ngay $\|T\|=\|u\|$. Tóm lại phần thực sẽ quyết định ánh xạ tuyến tính liên tục phức.

Như vậy ta chỉ cần áp dụng dạng thực của định lý Hahn–Banach cho phần thực của T thì sẽ được ngay dạng phức. □

Chứng minh trên của định lý Hahn–Banach phụ thuộc vào bổ đề Zorn. Nội dung của bổ đề Zorn như sau. Một thứ tự trên tập S là một tập khác rỗng các cặp (a,b) với $a,b \in S$, mà ta thường viết là $a \le b$ và nói là $a$nhỏ hơn hay bằng b, thỏa tính chất là với mọi $a,b,c \in S$, $a \le a$, nếu $a \le b$ và $b \le a$ thì $a = b$, nếu $a \le b$ và $b \le c$ thì $a \le c$. Quan hệ thứ tự là toàn phần nếu hai phần tử bất kì trong tập đó so sánh được với nhau. Một phần tử ***cực đại*** (hay tối đại, maximal) là một phần tử không nhỏ hơn phần tử nào, hay nói cách khác, không có phần tử nào lớn hơn. Một chặn trên của tập $A \subset S$ là một phần tử của S lớn hơn hay bằng mọi phần tử của A.

3.6.2 Mệnh đề (bổ đề Zorn). *Nếu một tập hợp S có một thứ tự và mọi tập con của S mà trong đó hai phần tử bất kì so sánh được với nhau đều bị chặn trên thì S có một phần tử cực đại.*

Bổ đề Zohn thường được dùng một cách tương tự như phép qui nạp toán học trong trường hợp vô hạn bất kì. Bổ đề Zohn tương đương với tiên đề chọn, tuy có lẽ không hiển nhiên nhưng được thừa nhận làm tiên đề trong môn Giải tích hàm.

3.7 Các đề tài khác

Dạng hình học của định lý Hahn–Banach

Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian định chuẩn X trên trường số thực, không triệt tiêu tại mọi điểm, và α là một số thực, thì tập $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ được gọi là một siêu phẳng. Đây là khái niệm tương ứng với khái niệm đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ và mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$.

Dưới đây là một dạng hình học của định lý Hahn–Banach về việc tách tập lồi bằng siêu phẳng [14, tr. 132].

3.7.1 Định lý. *Cho A,B là hai tập lồi không rỗng rời nhau, A compắc và B đóng, trong không gian định chuẩn X trên trường số thực. Khi đó tồn tại $f \in X^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) < \alpha < f(y)$ với mọi $x \in A$, $y \in B$. Nói cách khác, tồn tại siêu phẳng $f^{-1}(\{\alpha\})$ tách A và B.*

Định lý ánh xạ mở

Một định lý quan trọng về ánh xạ tuyến tính liên tục [14, tr. 139]:

3.7.2 Định lý (định lý ánh xạ mở). *Một toàn ánh tuyến tính liên tục giữa hai không gian Banach thì mang tập mở thành tập mở.*

Dưới đây là một hệ quả đáng chú ý của định lý ánh xạ mở:

3.7.3 Hệ quả. *Nếu một ánh xạ là song ánh tuyến tính liên tục giữa hai không gian Banach thì ánh xạ ngược cũng tuyến tính liên tục.*

Đối ngẫu của L^p

Cho $p,q \in [1,\infty]$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Với $g \in L^q(\Omega)$, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} S(g) : L^p(\Omega) &\to \mathbb{F} \\ f &\mapsto \int_\Omega f\bar{g}. \end{aligned}$$

Ta đã biết ở mục 3.5 rằng $S(g)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và $\|S(g)\| = \|g\|_q$.

Như vậy khi $1 < p < \infty$ thì ánh xạ

$$\begin{aligned} S : L^q(\Omega) &\to (L^p(\Omega))^* \\ g &\mapsto S(g) \end{aligned}$$

là tuyến tính liên tục, hơn nữa còn bảo toàn chuẩn, do đó là một đơn ánh. Việc ánh xạ này là toàn ánh là nội dung của một kết quả sâu của lí thuyết độ đo gọi là định lý biểu diễn Riesz. Như vậy ánh xạ S trên là một phép đẳng cấu metric từ $L^q(\Omega)$ lên $(L^p(\Omega))^*$. Người ta nói ngắn gọn rằng với $1 < p < \infty$ thì ***đối ngẫu của L^p là L^q***. Về đề tài này có thể đọc thêm ở [2, tr. 95], [11, tr. 127]. Trường hợp $p = q = 2$ là đặc biệt, được xét ở phần không gian Hilbert (4.4.1).

3.8 Bài tập

3.8.1. ✓ Giả sử $E \neq \{0\}$. Với $T \in L(E,F)$ thì:

(a) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

(b) $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

(c) $\|T\| = \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, \|Tx\| \leq M\|x\|\}$.

3.8.2. Chứng tỏ nếu $\forall x, \|Tx\| \leq M\|x\|$ thì $\|T\| \leq M$.

3.8.3. Chứng tỏ:

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = M \iff \begin{cases} \forall x, \|Tx\| \leq M\|x\| \\ \exists x_n, \|x_n\| = 1, \|Tx_n\| \to M. \end{cases}$$

3.8.4. Chứng tỏ nếu $T : E \to F$ là tuyến tính liên tục thì

$$\|T\|_1 = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,1)\}$$

và

$$\|T\|_2 = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,r)\}$$

thì $\|T\|_2 = r\|T\|_1$. Do đó trong định nghĩa chuẩn của ánh xạ tuyến tính liên tục, nếu chọn một quả cầu khác quả cầu đơn vị thì chỉ được một chuẩn tương đương mà thôi.

3.8.5. Chứng tỏ nếu F là không gian định chuẩn con của E và T là một ánh xạ tuyến tính liên tục trên E thì thu hẹp $T|_F$ của T xuống F cũng tuyến tính liên tục và $\|T|_F\| \leq \|T\|$.

3.8.6. Xét $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $\|A\|$ trong $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

3.8.7. ✓ Trên trường số thực, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^\infty &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{3^n}. \end{aligned}$$

Chứng tỏ T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ ℓ^∞ vào $\mathbb{R}$. Tính $\|T\|$.

3.8.8. ✓ Trên trường số thực, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n}. \end{aligned}$$

Đây có là một ánh xạ tuyến tính liên tục hay không? Nếu có hãy tính $\|T\|$.

3.8.9. Xét toán tử tích phân

$$\begin{aligned} T : C[0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^1 x(t)\,dt. \end{aligned}$$

Hỏi T có là một ánh xạ tuyến tính liên tục không? Nếu có hãy tính $\|T\|$.

3.8.10. ✓ Với $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ đặt Tx là hàm cho bởi

$$T(x)(t) = \int_0^1 x(s)\sin(st)\,ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

(a) Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ vào chính nó.

(b) Ước lượng $\|T\|$.

(c) Hãy tính chính xác $\|T\|$.

3.8.11. Với $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ đặt Tx là hàm cho bởi

$$T(x)(t) = x(1-t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ vào chính nó. Tính $\|T\|$.

3.8.12. Xét $E = C([0,1],\mathbb{R})$. Đặt

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} Tf : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Như vậy T mang mỗi hàm thành nguyên hàm của nó.

(a) Hãy kiểm T được định nghĩa tốt, tức Tf là hàm liên tục.

(b) Hãy kiểm T là ánh xạ tuyến tính.

(c) Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

(d) Hãy ước lượng $\|T\|$.

(e) Hãy tính chính xác $\|T\|$.

(f) Chứng tỏ T là song ánh lên tập giá trị của nó nhưng ánh xạ ngược không liên tục.

(g) * Chứng tỏ T là một ***toán tử compắc***, nghĩa là mang tập bị chặn vào trong một tập compắc.

3.8.13. Xét $E = C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Với $f \in E$ đặt

$$Tf = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$

(a) Chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E.

(b) Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Hãy vẽ đồ thị của f_n. Chứng tỏ $f_n \in E$. Tính $\|f_n\|$ và Tf_n.

(c) Tính $\|T\|$.

3.8.14. Trên trường số thực, cho $g \in L^2(\Omega)$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) &\to L^1(\Omega) \\ f &\mapsto fg. \end{aligned}$$

Chứng tỏ T là một ánh xạ tuyến tính liên tục và $\|T\| = \|g\|_2$.

3.8.15. ✓ Cho E là một không gian định chuẩn. Cho S,T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào E.

(a) Hãy kiểm $S \circ T$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

(b) Chứng tỏ $\|S \circ T\| \le \|S\|\,\|T\|$.

(c) Viết $S^0 = \mathrm{Id}_E$, và với $n \in \mathbb{Z}^+$ thì đặt $S^n = S^{n-1} \circ S$. Hãy chứng tỏ $\|S^n\| \le \|S\|^n$.

3.8.16. Cho E là một không gian Banach và S trong $L(E,E)$. Giả sử $c = \|S\| < 1$.

(a) Chứng tỏ $\left\|I + S + S^2 + \cdots + S^n\right\| \le \frac{1}{1-c}$ với mọi $n \ge 1$. Ở đây I chỉ ánh xạ đồng nhất.

(b) Chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} S^n$ hội tụ trong $L(E,E)$.

(c) Chứng tỏ ánh xạ $(I - S)$ khả nghịch và $(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$.

3.8.17. ✓ Cho E là một không gian định chuẩn và $T \in L(E,E)$.

(a) Nhắc lại rằng với mọi số thực x ta có

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x.$$

Đặt

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\|T\|^i}{i!}.$$

Chứng tỏ rằng dãy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

(b) Đặt

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{T^i}{i!}.$$

Chứng tỏ rằng dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $L(E,E)$.

(c) Giả sử thêm E là một không gian Banach. Chứng tỏ dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về một giới hạn trong $L(E,E)$. Giới hạn này thường được kí hiệu là e^T, vậy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i}{i!} = e^T.$$

3.8.18. Cho T là một song ánh tuyến tính từ một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|_E)$ vào một không gian định chuẩn $(F, \|\cdot\|_F)$. Đặt $S = T^{-1}$. Chứng minh

(a) S là một ánh xạ tuyến tính từ F vào E.

(b) Nếu S, T liên tục thì $\|S\| \ge \|T\|^{-1}$.

3.8.19. Cho M là một không gian vectơ con dầy đặc trong một không gian định chuẩn E và T trong $L(M,F)$. Chứng minh có duy nhất một S trong $L(E,F)$ sao cho $S(x) = T(x)$ với mọi x thuộc M.

Phiếm hàm tuyến tính liên tục. Định lý Hahn-Banach

3.8.20. Cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính trên X. Giả sử $\Lambda \not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại $x \in X$ sao cho $\Lambda x \neq 0$. Đặt $\ker(\Lambda) = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ là ***nhân*** của Λ.

(a) Với $y \in E$ bất kì, chứng tỏ $y - \frac{\Lambda y}{\Lambda x} x \in \ker(\Lambda)$.

(b) Suy ra $X = \ker(\Lambda) + \langle x \rangle$. Như vậy $\ker(\Lambda)$ chỉ kém X đúng 1 chiều.

3.8.21. Cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính trên X. Giả sử $\Lambda \not\equiv 0$. Chứng tỏ các mệnh đề sau là tương đương:

(a) Λ liên tục.

(b) $\ker(\Lambda) = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ là không gian con đóng của X.

3.8.22. ✓ Cho x và y là hai vectơ khác nhau trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f \in E^*$ sao cho $f(x) \neq f(y)$.

Trong trường hợp trường số thực, giả sử $f(x) < f(y)$, lấy $f(x) < \alpha < f(y)$ thì ta nói tập $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ là một siêu phẳng tách x và y. Vậy ta có thể tách hai điểm khác nhau bằng một siêu phẳng.

3.8.23. Cho x là một vectơ khác không trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f \in E^*$ sao cho $\|f\| = 1$ và $f(x) = \|x\|$.

3.8.24. Cho $x_1, \cdots, x_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f_1, \cdots, f_n$ trong E^* sao cho $f_i(x_j) = \delta_i^j$, ở đây δ_i^j là số Kronecker:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3.8.25. ✓ Cho M là một không gian vectơ con đóng của một không gian định chuẩn X và $x_0 \in X$. Chứng tỏ nếu $x_0 \notin M$ thì tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in M$ nhưng $f(x_0) \neq 0$.

3.8.26. Cho không gian định chuẩn X. Nhắc lại rằng với mọi $\Lambda \in X^*$:

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\Lambda x|.$$

Chứng tỏ với mọi $x \in X$:

$$\|x\| = \sup_{\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1} |\Lambda x|.$$

Tương quan giữa một không gian với không gian đối ngẫu của nó là một đề tài quan trọng của giải tích hàm.

3.8.27. Chứng minh 3.7.3.

3.8.28. Dãy $(x_n)_{n \geq 1}$ trong không gian định chuẩn X được gọi là ***hội tụ yếu*** về x nếu với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X thì dãy số $(f(x_n))_{n \geq 1}$ hội tụ về $f(x)$. Chứng tỏ một dãy hội tụ thì hội tụ yếu về cùng một giới hạn.

Chương 4 Không gian Hilbert

Không gian Hilbert là phát triển tương tự của không gian Euclid, là không gian vectơ có tích vô hướng.

4.1 Không gian tích trong

Cho H là một không gian vectơ trên trường thực $\mathbb{R}$. Một ***tích trong*** (tích vô hướng) trên H là một phiếm hàm song tuyến tính, đối xứng, xác định dương trên H, tức là một ánh xạ

$$\begin{array}{rcccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & H\times H & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

thỏa:

(a) $\langle \alpha x+\beta x', y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x',y\rangle$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,x',y\in H$ (tuyến tính theo biến thứ nhất),

(b) $\langle x, \alpha y+\beta y'\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,y'\rangle$, với mọi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,y,y'\in H$ (tuyến tính theo biến thứ hai),

(c) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, với mọi $x,y\in H$,

(d) $\langle x,x\rangle \geq 0$, với mọi $x\in H$ và $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$.

Tích trong còn được kí hiệu bằng

$$x\cdot y = \langle x,y\rangle .$$

4.1.1 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Trên $\mathbb{R}^n$ có tích trong quen thuộc: nếu $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ và $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ thì

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Chú ý rằng tích trong này sinh ra chuẩn

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

chính là chuẩn Euclid.

Nếu H là một không gian vectơ trên trường số phức $\mathbb{C}$, thì tích trong là một ánh xạ

$$\begin{array}{rcccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & H\times H & \to & \mathbb{C} \\ & & (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

thỏa:

(a) $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta \langle x', y\rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, x', y \in H$ (tuyến tính theo biến thứ nhất),

(b) $\langle x, \alpha y + \beta y'\rangle = \bar{\alpha} \langle x, y\rangle + \bar{\beta} \langle x, y'\rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, y' \in H$ (cộng tính, nhưng ***không*** tuyến tính theo biến thứ hai),

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, với mọi $x, y \in H$,

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$, với mọi $x \in H$ và $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

4.1.2 Ví dụ (không gian $\mathbb{C}^n$). Trên $\mathbb{C}^n$ có tích trong sau: nếu $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ và $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ thì

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Tích trong này sinh ra chuẩn

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$

chính là chuẩn Euclid.

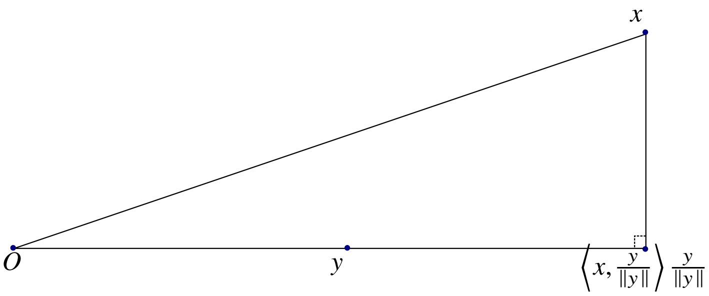
Cho không gian tích trong H, với $x \in H$, ta đặt

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

4.1.3 Định lý (bất đẳng thức Buniakowski–Cauchy–Schwarz – BCS).

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức BCS khi và chỉ khi hai vectơ là phụ thuộc tuyến tính.



Hình 4.1.4: Bất đẳng thức BCS tương đương với $\left|\left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leq \|x\|$. Trong trường hợp mặt phẳng Euclid điều này nói rằng chiều dài hình chiếu vuông góc của x xuống y nhỏ hơn hay bằng chiều dài của x, tức là cạnh góc vuông ngắn hơn cạnh huyền. Điều này là một hệ quả của công thức Pythagore.

Chứng minh. Từ trường hợp mặt phẳng ta có thể dự đoán rằng bất đẳng thức BCS sẽ thu được từ việc vectơ $x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|}$ có chiều dài không âm. Thực vậy xét khai triển

$$\left\langle x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|}, x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \geq 0,$$

hay

$$\left(x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y\right) \cdot \left(x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y\right) \geq 0.$$

Trong trường hợp trường thực, $x\cdot y = y\cdot x$, ta được

$$x\cdot x - 2\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}x\cdot y + \left(\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}\right)^2 y\cdot y \geq 0,$$

tức là

$$\|x\|^2 - \frac{(x\cdot y)^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức BCS. Trong trường hợp trường phức thì $x\cdot y = \overline{y\cdot x}$, ta được

$$x\cdot x - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2}x\cdot y - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2}y\cdot x + \left(\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}\right)^2 y\cdot y \geq 0,$$

tức là

$$\|x\|^2 - \frac{(x\cdot y)(y\cdot x)}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|x\cdot y|^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức BCS. □

4.1.5 Hệ quả (bất đẳng thức tam giác). *Với mọi $x, y \in H$,*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Chứng minh. Trong trường hợp trường thực ta viết nhanh được

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y &= \|x\|^2 + 2x\cdot y + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

Trong trường hợp trường phức thì

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) &= x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x\cdot y + y\cdot x)\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x\cdot y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x\cdot y|\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Nhờ bất đẳng thức tam giác này ta có:

4.1.6 Mệnh đề. *Cho không gian tích trong H, với $x \in H$ đặt $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ thì đây là một chuẩn trên H.*

Như vậy ***tích trong sinh ra chuẩn***. Từ đây trở đi khi nói tới chuẩn trên không gian tích trong thì ta hiểu là chuẩn sinh bởi tích trong như trên.

Trong trường hợp trường thực, bất đẳng thức BCS có nghĩa là cho hai vectơ x, y khác 0 thì

$$-1 \leq \frac{x\cdot y}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1.$$

Như trong trường hợp không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, số thực $\frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}$ có thể đại diện cho "góc" giữa hai vectơ x và y, cụ thể góc đó là số thực $\alpha \in [0,\pi]$ sao cho $\cos\alpha = \frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}$. Đặc biệt ta có thể đưa ra khái niệm "vuông góc", đó là khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tức $x\cdot y = 0$:

4.1.7 Định nghĩa. Cho $x, y \in H$, ta nói x ***vuông góc*** với y, ký hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y\rangle = 0$.

Do $\langle x, y\rangle = 0$ kéo theo $\langle y, x\rangle = 0$ nên quan hệ vuông góc có tính đối xứng.

4.1.8 Mệnh đề (công thức Pythagore). *Nếu $x \perp y$ thì*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Tổng quát hơn, nếu x_i, $1 \le i \le n$ vuông góc đôi một thì

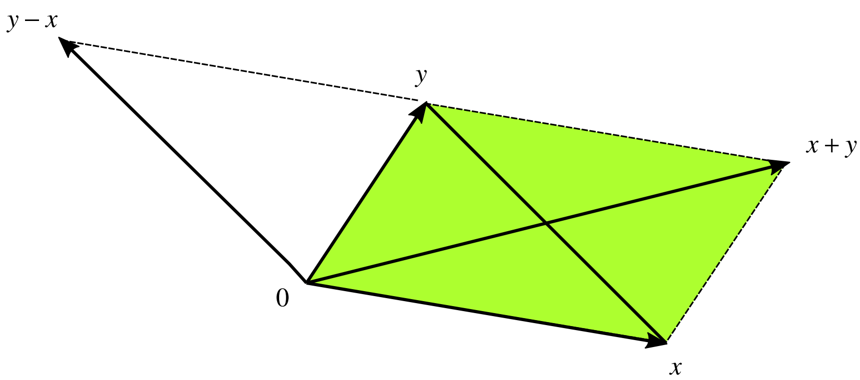
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Chứng minh. Khai triển vế trái ta được ngay công thức. □

4.1.9 Mệnh đề (đẳng thức hình bình hành). *Với chuẩn sinh bởi tích trong thì*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Đây là một đặc trưng của chuẩn sinh bởi tích trong.



Hình 4.1.10: Đẳng thức hình bình hành nói rằng trong một hình bình hành thì tổng bình phương chiều dài hai đường chéo bằng tổng bình phương chiều dài các cạnh.

Chứng minh. Khai triển vế trái ta được ngay công thức. □

4.1.11 Ví dụ. Xét $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Đẳng thức hình bình hành không thỏa với hai vectơ $(1,0)$ và $(0,1)$. Vậy đây không phải là một không gian tích trong, nói cách khác không có tích trong nào có thể sinh ra chuẩn $\|\cdot\|_1$. Vậy ***không phải không gian định chuẩn nào cũng là không gian tích trong***.

4.1.12 Mệnh đề (tích trong liên tục theo từng biến). *Cho không gian tích trong H trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

(a) Ánh xạ $x \mapsto \langle x,y\rangle$ là tuyến tính liên tục, có chuẩn bằng $\|y\|$.

(b) Trên trường số thực thì ánh xạ $y \mapsto \langle x,y\rangle$ là tuyến tính liên tục, có chuẩn bằng $\|x\|$. Trên trường số phức thì ánh xạ này không tuyến tính nhưng vẫn liên tục.

Chứng minh. Do bất đẳng thức BCS, $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$, từ đó suy ra cả hai ánh xạ trên đều liên tục. □

4.2 Không gian Hilbert

4.2.1 Định nghĩa. Một không gian tích trong mà là một không gian định chuẩn đầy đủ với chuẩn sinh bởi tích trong thì được gọi là một ***không gian Hilbert***.

Ngắn gọn hơn nữa, ***không gian Hilbert là không gian tích trong đầy đủ***.

4.2.2 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Trên $\mathbb{R}^n$ với tích trong, với $x = (x_i)_{1\le i\le n}$ và $y = (y_i)_{1\le i\le n}$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

thì tích trong này sinh ra chuẩn Euclid

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Như ta đã biết, không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là đầy đủ. Vậy $\mathbb{R}^n$ với tích trong trên là một không gian Hilbert.

4.2.3 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{C}^n$). Trên $\mathbb{C}^n$ với tích trong, với $x = (x_i)_{1\le i\le n}$ và $y = (y_i)_{1\le i\le n}$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

thì tích trong này sinh ra chuẩn Euclid

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Như ta đã biết, không gian Euclid $\mathbb{C}^n$ là đầy đủ. Vậy $\mathbb{C}^n$ với tích trong trên là một không gian Hilbert.

4.2.4 Ví dụ (không gian ℓ^2). Đây là không gian với tích trong

$$\left\langle (x_n)_n, (y_n)_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

trong trường hợp trường thực, và

$$\left\langle (x_n)_n, (y_n)_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

trong trường hợp trường phức. Tích trong này sinh ra chuẩn

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Ta đã biết ở 2.4.4, với chuẩn này thì ℓ^2 một là không gian Banach. Vậy ℓ^2 là một không gian Hilbert.

4.2.5 Ví dụ (không gian L^2). Trên $L^2(\Omega)$ ta có tích trong sau:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}.$$

Tích trong này sinh ra chuẩn đã biết của $L^2(\Omega)$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2}.$$

Như ta đã biết từ 2.6.13, với chuẩn này thì $L^2(\Omega)$ là đầy đủ. Vậy $L^2(\Omega)$ với tích trong trên là một không gian Hilbert. Đây là một không gian Hilbert rất quan trọng. Chú ý các không gian Euclid, không gian ℓ^2 là các trường hợp riêng của không gian này.

4.3 Phép chiếu vuông góc

4.3.1 Mệnh đề (sự tồn tại của ảnh chiếu vuông góc). *Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Với mọi $x \in H$ có duy nhất $y \in M$ sao cho $(x-y) \perp M$.*

Hình 4.3.2:

Ta gọi y là ***chiếu*** (vuông góc) của x xuống M, kí hiệu $\mathrm{proj}_M x$ hay $P_M x$.[1] Như vậy nếu M là một không gian vectơ con đóng thì

$$y = p_M x \iff \begin{cases} y \in M \\ (x-y) \perp M. \end{cases}$$

Nói cách khác $P_M x$ được định nghĩa bởi tính chất $P_M x \in M$ và $(x - P_M x) \perp M$. Ánh xạ P_M được gọi là ***phép chiếu*** (vuông góc) xuống M.

4.3.3 Ví dụ. Nếu $y \neq 0$ thì chiếu của x xuống y chính là chiếu x xuống không gian tuyến tính sinh bởi y, một không gian định chuẩn một chiều nên đầy đủ, do đó đóng trong H. Dễ thấy từ trường hợp mặt phẳng, xem hình 4.1.4, công thức của phép chiếu này là:

$$P_{\langle y\rangle} x = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|}.$$

Thực vậy ta kiểm tra được ngay là $x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|}$ vuông góc với y.

[1] projection trong tiếng Anh nghĩa là chiếu.

Chứng minh mệnh đề 4.3.1. Đặt $d(x,M) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}$, đây là khoảng cách từ x tới M. Có dãy $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n \in M$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d(x,M)$. Áp dụng đẳng thức hình bình hành cho hai vectơ $x-y_m$ và $x-y_n$, ta có

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - \|2x-(y_m+y_n)\|^2\\ &= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\|x-(y_m+y_n)/2\|^2\\ &\leq 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4d(x,M)^2.\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra $(y_n)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy. Vì M là một không gian con đóng của không gian đầy đủ H nên M là đầy đủ, do đó dãy $(y_n)_{n\geq 1}$ có giới hạn y trong M. Suy ra $\|y-x\| = d(x,M)$.

Bây giờ ta chứng minh $(x-y) \perp M$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi $w \in M$ thì

$$\|x-y\|^2 \leq \|x-y+tw\|^2 = \langle x-y+tw, x-y+tw\rangle. \tag{4.3.4}$$

Trên trường thực điều này dẫn tới $\|w\|^2 t^2 + 2t(x-y)\cdot w \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Khảo sát hàm số bậc hai theo biến t ta thấy điều này buộc $(x-y)\cdot w = 0$. Trên trường phức thì bất đẳng thức (4.3.4) chỉ dẫn tới phần thực $\mathrm{Re}((x-y)\cdot w) = 0$. Ở (4.3.4) thay t bởi it thì được phần ảo $\mathrm{Im}((x-y)\cdot w) = 0$, vậy $(x-y)\cdot w = 0$.

Tính duy nhất của y có ở bài tập 4.7.31. □

Chú ý tính đầy đủ đã được dùng trong chứng minh sự tồn tại của phép chiếu.

Với S là một tập con của không gian tích trong H và x là một vectơ trong H, ta nói x vuông góc với S, kí hiệu $x \perp S$, nếu x vuông góc với mọi vectơ trong S, tức là $\forall y \in S, x \perp y$. Gọi ***tập vuông góc*** (hay tập trực giao) của S, kí hiệu $S^\perp = \{x \in H \mid x \perp S\}$ là tập hợp tất cả các vectơ trong H vuông góc với S.

Một số tính chất của phép chiếu rút ra được từ phần trên được tổng kết lại dưới đây (bài tập 4.7.16).

4.3.5 Mệnh đề. *Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Với mọi $x \in H$ thì*

(a) *Nếu $x \in M$ thì $P_M x = x$.*

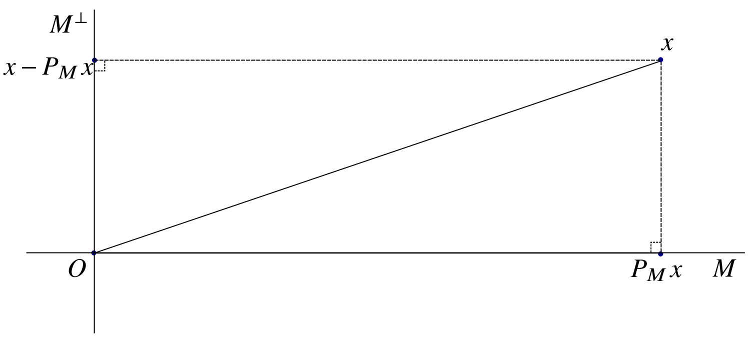
(b) $\|x - P_M x\| = \inf_{y\in M} \|x-y\| = d(x,M)$. *(Hình chiếu của x lên M là điểm trên M gần x nhất.)*

(c) $x = P_M x + P_{M^\perp} x$.

(d) $\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2$, *do đó* $\|P_M x\| \leq \|x\|$.

(e) *P_M là ánh xạ tuyến tính liên tục.*

(f) *$H = M + M^\perp$, và $M \cap M^\perp = \{0\}$. (Không gian được phân tích thành tổng của hai không gian con trực giao.)*



Hình 4.3.6:

Chứng minh. (a) Tính chất có từ định nghĩa của ảnh chiếu.

(b) Tính chất này được chứa trong chứng minh của mệnh đề 4.3.1.

(c) $M^{\perp}$ là một không gian vectơ con đóng (bài tập 4.7.9). Tính chất có từ định nghĩa của ảnh chiếu.

(d) Công thức Pythagore. □

4.4 Phiếm hàm tuyến tính

Theo mệnh đề 4.1.12, ánh xạ $x \mapsto \langle x, y\rangle$ là tuyến tính liên tục có chuẩn bằng $\|y\|$. Như vậy mỗi vectơ cho một phiếm hàm tuyến tính liên tục bằng cách lấy tích trong. Điều ngược lại là nội dung của định lý sau.

4.4.1 Định lý (định lý biểu diễn Riesz). *Cho không gian Hilbert H trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Với phiếm hàm tuyến tính liên tục $f : H \to \mathbb{F}$ bất kì tồn tại duy nhất $y \in H$ sao cho $f(x) = \langle x, y\rangle$ với mọi $x \in H$. Hơn nữa $\|f\| = \|y\|$.*

Nói ngắn gọn, mọi phiếm hàm tuyến tính trên không gian Hilbert đều cho được bởi tích trong và được đại diện bởi một vectơ. Ta đã biết điều này trong môn đại số tuyến tính trong trường hợp ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Tính duy nhất của y rất đơn giản, có ở bài tập 4.7.7.

Nếu $f = 0$ thì ta có ngay $y = 0$.

Giả sử $f \neq 0$. Ta nhận thấy nếu y tồn tại thì $y \perp \ker f$, từ đó ta có cách tìm y dựa trên hai quan sát đơn giản sau. Thứ nhất, lấy phân tích trực giao $H = \ker f + (\ker f)^{\perp}$ ta thấy giá trị của f được xác định bởi giá trị của f trên $(\ker f)^{\perp}$. Thứ hai, khi $f \neq 0$ thì $\ker f$ chỉ kém H một chiều (xem 3.8.20) nên $(\ker f)^{\perp}$ là không gian tuyến tính một chiều. Hai điều này cho thấy giá trị của f được xác định duy nhất bởi giá trị của nó tại một phần tử sinh bất kì của $(\ker f)^{\perp}$. Ta làm chi tiết dưới đây.

Vì $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ là tập đóng, không bằng H, nên không gian trực giao $(\ker f)^{\perp}$ khác $\{0\}$ và ta có phân tích trực giao $H = \ker f + (\ker f)^{\perp}$. Lấy $v \neq 0$ bất kì thuộc $(\ker f)^{\perp}$ thì $v \notin \ker f$, nên $f(v) \neq 0$. Đặt $z = \frac{1}{f(v)}v$ thì $z \in (\ker f)^{\perp}$ và $f(z) = 1$. Với mọi $x \in H$ thì $f(x - f(x)z) = f(x) - f(x)1 = 0$, nên $x - f(x)z \in \ker f$, từ đó ta có phân tích x tương ứng với phân tích trực giao $H = \ker f + (\ker f)^{\perp}$:

$$x = (x - f(x)z) + f(x)z.$$

Đặc biệt nếu $x \in (\ker f)^{\perp}$ thì $x = f(x)z$. Vậy thực sự $(\ker f)^{\perp} = \langle z\rangle$ là một không gian vectơ một chiều (trong đại số tuyến tính ta đã biết $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$ đẳng cấu tuyến tính với $H/\ker f$, do đó ta có thể dự đoán kết quả này).

Vectơ y cần tìm phải là một bội của z, tức $y = \alpha z$ với một $\alpha \in \mathbb{F}$. Ta chỉ cần tìm α. Ta có

$$f(z) = \langle z, y\rangle = \langle z, \alpha z\rangle = \bar{\alpha}\langle z, z\rangle.$$

Suy ra $\alpha = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} = \frac{1}{\|z\|^2}$. Vậy

$$y = \frac{1}{\|z\|^2}z.$$

□

4.4.2 Ví dụ. Mọi phiếm hàm tuyến tính trên không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ đều có dạng $x \mapsto \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ với $a = (a_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$, xem 3.2.3.

4.4.3 Ví dụ. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ (trên trường số thực) đều có dạng $x \mapsto \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ với $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \in \ell^2$. Hơn nữa $\|f\| = \|a\|_{\ell^2}$. (Xem lại bài tập 3.8.8.)

4.4.4 Ví dụ. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $S_g : L^2(\Omega) \to \mathbb{F}$ đều có dạng $f \mapsto \langle f, g \rangle = \int_\Omega f\bar{g}$ với $g \in L^2(\Omega)$. Hơn nữa $\|S_g\| = \|g\|_{L^2(\Omega)}$. Một chiều của kết quả này đã có ở mục 3.5.

Trong định lý biểu diễn Riesz, chú ý rằng $\|f\| = \|y\|$. Như vậy tương ứng

$$\begin{aligned} H &\to H^* \\ y &\mapsto f,\ f(x) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

là một song ánh tuyến tính bảo toàn chuẩn, tức là một đẳng cấu của không gian định chuẩn. Nói ngắn gọn, một không gian Hilbert thì đẳng cấu với không gian đối ngẫu của nó.

4.5 Họ trực chuẩn

Một họ E các phần tử $\neq 0$ của một không gian Hilbert được gọi là một ***họ trực giao*** nếu $\langle u, v \rangle = 0$ với mọi $u, v \in E$, $u \neq v$. Hơn nữa nếu $\|u\| = 1$ với mọi $u \in E$ thì họ E được gọi là một ***họ trực chuẩn***. Nói khác đi, E là trực chuẩn khi với mọi $u, v \in E$ thì

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad u = v, \\ 0 & \text{khi} \quad u \neq v. \end{cases}$$

4.5.1 Ví dụ. ẽKhông gian $\mathbb{R}^n$ có cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Cơ sở này có tính chất đặc biệt, là nếu với mỗi x đặt $x_i = \langle x, e_i \rangle$ thì $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ và $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$.

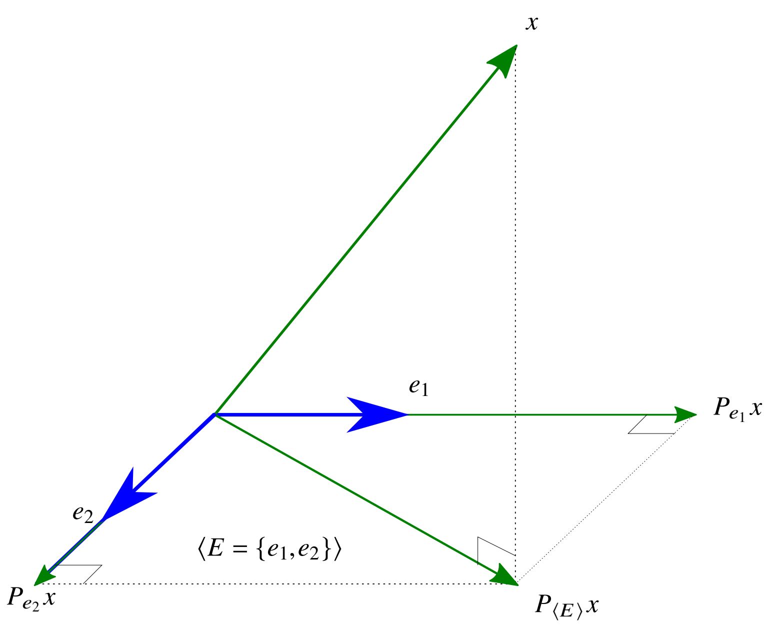
Cho E là một họ trực chuẩn. Ứng với mỗi $x \in H$, với mỗi $e \in E$, ta đặt $x_e = \langle x, e \rangle \in \mathbb{F}$. Các x_e được có vai trò tương tự các tọa độ của x trong trường hợp $\mathbb{R}^n$.

4.5.2 Mệnh đề. *Cho E là một họ trực chuẩn hữu hạn trong một không gian tích trong H. Ta có công thức tường minh cho ánh xạ chiếu như sau. Với $x \in H$ thì*

$$\boxed{P_{\langle E \rangle} x = \sum_{e \in E} P_e x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle\, e.}$$

Một hệ quả là ***bất đẳng thức Bessel***:

$$\sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$



Chứng minh. Ta kiểm được ngay $(x - \sum_{e\in E} \langle x,e\rangle e) \perp e$ với mọi $e \in E$ bằng cách lấy tích trong. Như vậy $\sum_{e\in E} \langle x,e\rangle e = P_{\langle E\rangle}x$. Hơn nữa, từ 4.7.20 và 4.3.5:

$$\sum_{e\in E} |\langle x,e\rangle|^2 = \left\|P_{\langle E\rangle}x\right\|^2 \le \|x\|^2 .$$

□

4.5.3 Mệnh đề **(trực chuẩn hóa Gram-Schmidt).** *Mỗi không gian tích trong hữu hạn chiều đều có một cơ sở tuyến tính trực chuẩn.*

Chứng minh. Ý tưởng của cách xây dựng là phân tích trực giao, xem Hình 4.3.6. Lấy các vectơ $v_1,\ldots,v_n$ là một cơ sở tuyến tính. Đặt

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1,\\
w_2 &= v_2 - P_{\langle v_1\rangle}v_2,\\
w_3 &= v_3 - P_{\langle\{v_1,v_2\}\rangle}v_3,\\
&\vdots\\
w_i &= v_i - P_{\langle\{v_1,v_2,\ldots,v_{i-1}\}\rangle}v_i,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bằng qui nạp ta có không gian vectơ sinh bởi họ $\{w_1,\ldots,w_n\}$ cũng là không gian vectơ sinh bởi họ $\{v_1,\ldots,v_n\}$, và họ $\{w_1,\ldots,w_n\}$ là trực giao các vectơ khác 0. Đặt $w_i' = \frac{w_i}{\|w_i\|}$ ta thu được một cơ sở trực chuẩn $\{w_1',\ldots,w_n'\}$. □

Để có công thức tường minh ta viết :

$$P_{\langle\{v_1,v_2,\ldots,v_{i-1}\}\rangle}v_i = P_{\langle\{w_1',w_2',\ldots,w_{i-1}'\}\rangle}v_i = \left\langle v_i,w_1'\right\rangle w_1' + \left\langle v_i,w_2'\right\rangle w_2' + \cdots + \left\langle v_i,w_{i-1}'\right\rangle w_{i-1}',$$

Vậy thuật toán là:

Thuật toán trực chuẩn hóa Gram-Schmidt:
Với một họ độc lập tuyến tính $(v_1,\ldots,v_n)$, đặt

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1,\\
w_1' &= \frac{w_1}{\|w_1\|},\\
w_2 &= v_2 - \left\langle v_2,w_1'\right\rangle w_1',\\
&\vdots\\
w_i &= v_i - \left\langle v_i,w_1'\right\rangle w_1' - \left\langle v_i,w_2'\right\rangle w_2' - \cdots - \left\langle v_i,w_{i-1}'\right\rangle w_{i-1}',\\
w_i' &= \frac{w_i}{\|w_i\|},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

thì họ $(w_1',\ldots,w_n')$ là trực chuẩn và sinh ra cùng một không gian vectơ với họ $(v_1,\ldots,v_n)$.

Việc tìm một cơ sở trực chuẩn trong trường hợp vô hạn chiều là mục tiêu của phần tiếp theo.

4.5.4 Ví dụ. Trong ℓ^2 xét họ E các vectơ $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Đây là một họ trực chuẩn. Nếu $x \in \ell^2$ thì $x \perp e_i \iff x_i = x \cdot e_i = 0$, do đó $x \perp E \iff x = 0$. Vậy E là một họ trực chuẩn cực đại, nghĩa là không thể làm lớn hơn. Tuy nhiên rõ ràng một không thể viết một phần tử tùy ý của ℓ^2 như một tổ hợp tuyến tính của ***hữu hạn*** các vectơ e_n. Nói cách khác không gian vectơ $\langle E\rangle$ sinh bởi E không thể bằng ℓ^2, mà thực ra $\langle E\rangle = c_c$ như đã thấy ở bài tập 2.8.12. Vì c_c dày đặc trong ℓ^2, từ $\langle E\rangle$ chỉ cần qua giới hạn ta sẽ được ℓ^2. Ta sẽ chứng tỏ đây là tính chất chung của không gian Hilbert.

Khi H là một không gian tích trong khác 0 thì tồn tại $x \in H$ sao cho $\|x\| = 1$ và do đó tồn tại một họ trực chuẩn trong H. Một ***họ trực chuẩn cực đại*** (hay tối đại) của H là một họ trực chuẩn của H mà ta không thể thêm bất cứ phần tử nào của H vào mà vẫn còn nhận được một họ trực chuẩn, nói cách khác dưới dưới quan hệ chứa trong của tập hợp thì đó là một phần tử cực đại.

Dùng bổ đề Zorn ta được:

4.5.5 Mệnh đề. *Trong một không gian tích trong khác 0 bất kì tồn tại một họ trực chuẩn cực đại.*

Chứng minh. Nếu H là một không gian tích trong khác 0 thì có một phần tử $x \neq 0$. Khi đó $\{\frac{x}{\|x\|}\}$ là một họ trực chuẩn trong H. Gọi G là tập hợp tất cả các họ trực chuẩn trong H. Trên G xét quan hệ thứ tự là quan hệ chứa trong của tập hợp. Giả sử $K \subset G$ và trên K quan hệ thứ tự là toàn phần. Đặt $E = \bigcup_{F\in K} F$. Như vậy E là hội của tất cả các họ trực chuẩn mà là phần tử của K. Ta kiểm $E \in G$ và E là một chặn trên của K. Mỗi phần tử $e \in E$ là một phần tử của một họ trực chuẩn, nên e là vectơ đơn vị. Nếu $e_1, e_2 \in E$ và $e_1 \neq e_2$ thì tồn tại $F_1, F_2 \in K$ sao cho $e_1 \in F_1$, $e_2 \in F_2$. Ta có $F_1 \subset F_2$ hoặc $F_2 \subset F_1$, do quan hệ thứ tự trên K là toàn phần. Chẳng hạn nếu $F_1 \subset F_2$ thì ta có $e_1, e_2 \in F_2$, và do đó $e_1 \perp e_2$. Vậy E là một họ trực chuẩn. Vì E chứa mọi họ trực chuẩn thuộc K nên E là một chặn trên của K. Bây giờ bổ đề Zorn khẳng định G có một phần tử cực đại. □

Kết quả sau đây nói lên ý nghĩa của họ trực chuẩn cực đại: một họ trực chuẩn cực đại sinh ra được không gian Hilbert bằng cách lấy tổ hợp tuyến tính và qua giới hạn.

4.5.6 Định lý. *Cho họ trực chuẩn E trong không gian Hilbert H. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(a) E là cực đại.

(b) Không gian con sinh bởi E là dày đặc trong H.

Vậy một họ trực chuẩn cực đại sinh ra cả không gian Hilbert bằng tổ hợp tuyến tính và qua giới hạn.

Chứng minh. Giả sử E là cực đại. Lấy $x \in H$. Gọi $y = P_{\overline{\langle E\rangle}}x$. Ta có $(x-y) \perp \overline{\langle E\rangle}$, do đó $(x-y) \perp e, \forall e \in E$. Do E là cực đại nên phải có $x - y = 0$. Vậy $x = y \in \overline{\langle E\rangle}$. Do đó $H = \overline{\langle E\rangle}$.

Ngược lại, giả sử $H = \overline{\langle E\rangle}$. Nếu $x \perp E$ thì $x \perp \langle E\rangle$, nên $x \perp \overline{\langle E\rangle} = H$ (xem 4.7.6, 4.7.17), suy ra $x = 0$. Vậy E là cực đại. □

4.5.1 Không gian Hilbert tách được

Nếu không gian Hilbert H có một họ trực chuẩn cực đại đếm được (điều này được biết là tương đương với việc H là một không gian mêtríc tách được, nghĩa là có một tập con đếm được dày đặc) ta gọi H là một ***không gian Hilbert tách được***.

4.5.7 Ví dụ. Không gian Euclid $\mathbb{F}^n$ dĩ nhiên là tách được. Ở 4.5.4 ta đã thấy ℓ^2 là một không gian Hilbert tách được. Ở 4.6.1 ta thấy $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$ là một không gian Hilbert tách được.

4.5.8 Định lý. *Giả sử không gian Hilbert H có một họ trực chuẩn cực đại vô hạn đếm được E. Giả sử E được đánh chỉ số là $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$. Với mọi $x \in H$, đặt $x_i = \langle x, e_i\rangle$, thì:*

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i,}$$

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i,}$$

*và có **đẳng thức Parseval:***

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.}$$

Rõ ràng các biểu diễn trên cũng đúng trong trường hợp E là hữu hạn, chỉ thay tổng vô hạn bằng tổng hữu hạn.

Chứng minh. Ta chứng tỏ dãy $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy. Do bất đẳng thức Bessel chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ hội tụ về một số thực, do đó dãy $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy. Từ công thức Pythagore ta có

$$\left\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2.$$

Điều này cho thấy dãy $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy, do đó hội tụ trong H. Vậy tồn tại phần tử $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. (Xem thêm 4.7.22.) Ta kiểm tra được ngay $(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) \perp e_i$, $\forall i \geq 1$ nhờ tính liên tục theo một biến của tích trong. Do đó $x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = 0$. Vậy $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.

Hai tính chất còn lại là hệ quả đơn giản của tính chất này. Do tính liên tục theo từng biến của tích trong:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, y\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \langle e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

Lấy $y = x$ ta được tính chất thứ ba. □

4.5.2 Không gian Hilbert bất kì

4.5.9 Bổ đề. *Cho E là một họ trực chuẩn. Khi đó, với mọi $x \in H$, tập $\{e \in E \mid x_e = \langle x, e\rangle \neq 0\}$ là đếm được.*

Chứng minh. Đặt $A_n = \{e \in E \mid |\langle x, e\rangle| \geq 1/n\}$ thì do bất đẳng thức Bessel, A_n là hữu hạn. Suy ra tập

$$\{e \in E \mid \langle x, e\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

là hội của một họ đếm được các tập hữu hạn nên là đếm được (một kết quả của lý thuyết tập hợp, xem chẳng hạn [7],[17]). □

Do bổ đề này nên ta có thể phát biểu kết quả tương tự 4.5.8 cho không gian Hilbert bất kì:

4.5.10 Định lý. *Cho họ trực chuẩn cực đại E của không gian Hilbert H. Với mọi $x \in H$, đặt $x_e = \langle x, e\rangle$, thì:*

$$x = \sum_{e \in E} x_e e.$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{e \in E} x_e \bar{y}_e.$$

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |x_e|^2.$$

Ở đây chẳng hạn ta viết $x = \sum_{e\in E} x_e e$ có nghĩa là với một cách đánh chỉ số $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ bất kì cho tập (đếm được) $\{e \in E \mid x_e \neq 0\}$ thì $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Chứng minh. Đánh chỉ số $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ cho tập đếm được $\{e \in E \mid x_e \neq 0\}$. Như trong chứng minh cho trường hợp E là đếm được, chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ là hội tụ. Ta kiểm tra được ngay $(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) \perp e$, $\forall e \in E$, do đó $x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = 0$. Vậy $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. ◻

Hai không gian tích trong (trên cùng một trường) H_1 và H_2 được gọi là ***đẳng cấu tích trong*** với nhau nếu tồn tại song ánh tuyến tính Λ từ H_1 lên H_2 bảo toàn tích vô hướng, tức là $\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle = \langle x, y\rangle$, với mọi $x, y \in H$. Khi đó, ta còn nói Λ là một ***phép đẳng cấu tích trong*** từ H_1 lên H_2.

Dễ thấy ngay một phép đẳng cấu tích trong thì bảo toàn chuẩn, nghĩa là $\|\Lambda x\| = \|x\|$. Ngược lại do các đẳng thức ở 4.7.1 nên một song ánh tuyến tính mà bảo toàn chuẩn thì cũng bảo toàn tích trong.

4.5.11 Định lý. *Cho E là một họ trực chuẩn tối đại trong không gian Hilbert H. Với $x \in H$, đặt $\hat{x}$ là ánh xạ*

$$\begin{aligned} \hat{x} : E &\longrightarrow \mathbb{F} \\ e &\longmapsto \hat{x}(e) = x_e = \langle x, e\rangle. \end{aligned}$$

Khi đó ánh xạ $x \mapsto \hat{x}$ là một phép đẳng cấu tích trong từ H lên $\ell^2(E)$.

Vậy mỗi không gian Hilbert đều đẳng cấu với một không gian $\ell^2(E)$ nào đó.

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow \ell^2(E) \\ x &\longmapsto \hat{x}. \end{aligned}$$

Ta kiểm tra f được xác định, tức là chứng tỏ $\hat{x} \in \ell^2(E)$. Với một cách đánh chỉ số $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ bất kì cho tập đếm được $\{e \in E \mid \hat{x}(e) = x_e \neq 0\}$ thì từ 4.5.10 ta có thể thấy

$$\|\hat{x}\|^2_{\ell^2(E)} = \sup_{F\subset E, |F|<\infty} \sum_{e\in F} |\hat{x}(e)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Như vậy f bảo toàn chuẩn. Dễ kiểm f là tuyến tính. Suy ra f là đơn ánh.

Ta kiểm tra rằng f là toàn ánh. Cho $y \in \ell^2(E)$, ta có

$$\|y\|^2_{\ell^2(E)} = \sup_{F\subset E, |F|<\infty} \sum_{e\in F} |y(e)|^2.$$

Dùng lí luận như ở 4.5.9 ta thấy tập $I = \{e \in E \mid y(e) \neq 0\}$ là đếm được. Đánh chỉ số $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ cho tập I này. Đặt

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} y(e_i) e_i.$$

Như trong phần 4.5.8, ta có $x \in H$ tồn tại. Nếu $e_i \in I$ thì $\langle x, e_i\rangle = y(e_i)$. Nếu $e \in E \setminus I$ thì $\langle x, e\rangle = 0 = y(e)$. Suy ra $\hat{x} = y$. Vậy f là toàn ánh.

Từ việc chuẩn xác định tích trong ở 4.7.1 ta suy ra được f bảo toàn tích vô hướng. ◻

4.6 Một ứng dụng: Chuỗi Fourier

Ở phần này chúng ta chỉ làm việc trên trường thực. Trên $L^2([0,2\pi])$, với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt).$$

Ta kiểm trực tiếp được rằng họ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ là một họ trực chuẩn trong $L^2([0,2\pi])$, xem 4.7.34.

4.6.1 Mệnh đề. *Họ* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ *là một họ trực chuẩn cực đại của* $L^2([0,2\pi])$.

Chứng minh. Đây là chỉ là sơ lược ý cho một chứng minh (có ở [3, tr. 21]). Ta muốn chứng minh rằng không gian vectơ con của $L^2([0,2\pi])$ sinh bởi họ này

$$A = \left\langle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \right\rangle = \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \mid N \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

là dày đặc trong $L^2([0,2\pi])$. Gọi S^1 là đường tròn đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : [0,2\pi] &\to S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

sinh ra một song ánh giữa tập các hàm f xác định trên $[0,2\pi]$ thỏa $f(0) = f(2\pi)$ với tập hợp các hàm xác định trên S^1. Đặt $B = \{f \in C([0,2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$ thì $A \subset B$. Ánh xạ φ sinh ra song ánh bảo toàn chuẩn φ_* giữa B và $C(S^1)$. Tập $\varphi_*(A)$ là một đại số con tách điểm của $C(S^1)$, do đó $\varphi_*(A)$ dày đặc trong $C(S^1)$ theo định lý Stone–Weierstrass. Mặt khác người ta biết $C(S^1)$ dày đặc trong $L^2(S^1)$. Từ đó có thể suy ra $\varphi_*(A)$ dày đặc trong $L^2(S^1)$. Do đó A là dày đặc trong $\{f \in L^2([0,2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$, nhưng đây cũng chỉ là $L^2([0,2\pi])$. □

Như vậy theo 4.5.8 mỗi hàm $h \in L^2([0,2\pi])$ đều có phân tích

$$h = \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle h, e_n \rangle e_n + \langle h, f_n \rangle f_n \right).$$

Vậy bất kì hàm bình phương khả tích nào cũng xấp xỉ được bằng tổng của các hàm lượng giác. Lưu ý ở đây ta chỉ có xấp xỉ hàm theo chuẩn L^2 chứ không phải xấp xỉ từng điểm.

Tóm tắt lại, với $a_0 = \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $a_n = \langle h, e_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $b_n = \langle h, f_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}$,

Công thức khai triển Fourier:

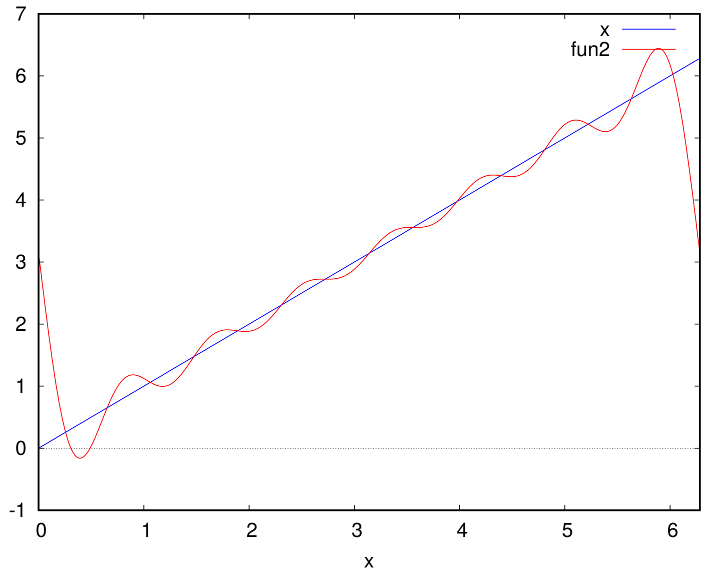
$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

với

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\, dt,\ n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\, dt,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

4.6.2 Ví dụ. Cho $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$. Tính trực tiếp theo công thức trên ta được $a_0 = 0$, và với $n \geq 1$ thì $a_n = 0$, $b_n = -2/n$. Vậy chuỗi Fourier của f là

$$\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx.$$



Hình 4.6.3: Hàm $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$, và tổng 8 phần tử đầu của chuỗi Fourier của hàm này.

Chuỗi Fourier có nhiều ứng dụng như vào việc tìm và xấp xỉ nghiệm của phương trình (có thể đọc ở [12]), qua đó có ứng dụng vào trong kĩ thuật, như trong xử lí tín hiệu, chẳng hạn một loại xấp xỉ Fourier được cài đặt trong dạng tập tin âm thanh mp3 để nén dữ liệu.

4.7 Bài tập

4.7.1. ✓ Tích trong tính được từ chuẩn sinh bởi tích trong đó:

(a) Trên trường thực thì

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right).$$

(b) Trên trường phức thì

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) + \frac{1}{4} \left(i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2 \right).$$

4.7.2. Chứng tỏ trên trường thực thì $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Điều này có đúng trên trường phức?

4.7.3. Cho không gian tích trong H trên trường $\mathbb{R}$.

(a) Chứng tỏ với mọi $a, b \in H$ thì

$$\|a + b\| \|a - b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

(b) Tìm điều kiện cần và đủ để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức trên.

4.7.4. Trong một không gian tích trong, chứng tỏ nếu $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ và $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y$ thì $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, y \rangle$.

4.7.5. Trong một không gian tích trong, giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là hai dãy trong quả cầu đơn vị và $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = 1$. Chứng tỏ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

4.7.6. Trong một không gian tích trong E, cho $x \in E$ và $A \subset E$. Chứng tỏ nếu $x \perp A$ thì $x \perp \overline{A}$.

4.7.7. Trong một không gian tích trong E, cho $y_1, y_2 \in E$. Giả sử $\forall x \in E, \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$. Chứng tỏ $y_1 = y_2$.

4.7.8. Chứng tỏ ℓ^p với $p \neq 2$ không phải là một không gian tích trong.

4.7.9. Cho H là một không gian tích trong và $M \subset H$. Chứng tỏ $M^\perp$ là một không gian vectơ con đóng của H.

4.7.10. Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H và $M \neq H$. Chứng tỏ $M^\perp \neq \{0\}$.

4.7.11. ✓ Cho H là một không gian tích trong và $x \in H$.

(a) Chứng tỏ rằng $x^\perp$ chính là nhân của phiếm hàm $y \mapsto T(y) = \langle y, x\rangle$, tức là $x^\perp = \ker T = T^{-1}(\{0\})$.

(b) Chứng tỏ rằng $x^\perp$ là một không gian vectơ con đóng của H.

(c) Cho $M \subset H$. Chứng tỏ
$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} x^\perp.$$

(d) Suy ra $M^\perp$ là một không gian vectơ con đóng của H.

(e) Chứng tỏ $M^\perp = \left(\overline{M}\right)^\perp$.

4.7.12. Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Chứng tỏ $x \perp M$ khi và chỉ khi $\|x\| = d(x, M)$. Kết quả này còn đúng không nếu bỏ giả thiết M là đóng?

4.7.13. Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Chứng tỏ $M = (M^\perp)^\perp$. Kết quả này còn đúng không nếu bỏ giả thiết M là đóng?

4.7.14. Trong không gian Hilbert H cho $a \neq 0$. Chứng tỏ
$$d(x, a^\perp) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}.$$

Ứng dụng, trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ hãy tìm lại công thức cho khoảng cách từ một điểm $p = (x, y, z)$ tới một mặt phẳng $ax + by + cz = 0$.

4.7.15. ✓ Với $n \in \mathbb{Z}^+$ cố định gọi M là tập tất cả các dãy số thực bằng 0 từ phần tử thứ $(n+1)$ trở đi, tức $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

(a) Hãy kiểm M là một không gian vectơ con của ℓ^2, do đó là một không gian định chuẩn con của ℓ^2. Hãy xác định số chiều của M.

(b) Chứng minh M là một tập con đóng của ℓ^2. Hỏi M có là một không gian Hilbert không?

(c) Xét ánh xạ
$$\begin{aligned} P_M : \ell^2 &\to M \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) &\mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ P_M chỉ giữ lại n tọa độ đầu tiên của x, các tọa độ còn lại được gán thành 0. Hãy kiểm P_M là một ánh xạ tuyến tính.

(d) Hãy kiểm rằng với mọi $x \in \ell^2$ thì $(x - P_M x) \perp M$. Vậy P_M chính là phép chiếu từ ℓ^2 xuống M.

(e) Chứng tỏ $\|P_M x\| \leq \|x\|$.

(f) Chứng tỏ P_M là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

(g) Hãy tìm không gian trực giao của M, tức $M^{\perp}$.

(h) Hãy tìm $\mathrm{Im} P_M$ và $\ker P_M$, tức tập ảnh và tập nhân của P_M.

4.7.16. Chứng minh mệnh đề 4.3.5.

4.7.17. ✓ Cho H là một không gian Hilbert. Cho $\emptyset \neq M, N \subset H$. Điều nào sau đây là đúng?

(a) $M^{\perp} \neq \emptyset$.

(b) $M \subset N \implies M^{\perp} \subset N^{\perp}$.

(c) $M \subset N \implies N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

(d) $M \subsetneq N \implies N^{\perp} \subsetneq M^{\perp}$.

(e) $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

(f) $M^{\perp} = \langle M \rangle^{\perp}$.

4.7.18. Kiểm đây là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và tìm chuẩn:

$$\begin{aligned} T : L^2((0,1)) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x) x \, dx. \end{aligned}$$

4.7.19. Cho $(a_1, \cdots, a_n)$ là một cơ sở tuyến tính của $\mathbb{R}^n$ và $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ là n số thực dương. Với mọi $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ và $y = \sum_{i=1}^n y_i a_i$ trong $\mathbb{R}^n$ ta đặt

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i.$$

Chứng minh f là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, với tích vô hướng này thì $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert, $(a_1, \cdots, a_n)$ là một họ trực giao, và $(\alpha_1^{-1/2} a_1, \cdots, \alpha_n^{-1/2} a_n)$ là một họ trực chuẩn.

4.7.20. Cho $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian tích trong H và một họ $(c_i)_{i=1,\ldots,n}$ trong $\mathbb{F}$. Chứng minh $\left\|\sum_{i=1}^n c_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$.

4.7.21. Chứng tỏ trong một không gian tích trong thì một họ trực giao bất kì là một họ độc lập tuyến tính.

4.7.22. Cho $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian Hilbert H và $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in \ell^2$. Chứng minh:

(a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ hội tụ trong H.

(b) $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

4.7.23. Cho $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian Hilbert H. Chứng tỏ với mọi $x \in H$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(b) $\lim_{n \to \infty} \langle x, e_n \rangle = 0$.

4.7.24. Giả sử E là một họ trực chuẩn cực đại trong không gian Hilbert H, và $x, y \in H$. Chứng tỏ nếu $\forall e \in E$, $\langle x, e \rangle = \langle y, e \rangle$ thì $x = y$.

4.7.25. Xét không gian Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$ trên trường thực. Cho $f(x) = x$ và $g(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

(a) Tính $\|f\|_{L^2}$ và $\|g\|_{L^2}$.

(b) Tính $\langle f, g \rangle_{L^2}$.

(c) Tính $P_g f$.

(d) Tìm $h \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ sao cho $h \neq 0$ và $h \perp g$.

4.7.26. Xét không gian Hilbert $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$. Gọi M là tập hợp tất cả các hàm hằng trên $[0,1]$.

(a) Chứng tỏ M là một không gian vectơ con của H.

(b) Chứng tỏ $\{1\}$ là một cơ sở trực chuẩn của M.

(c) Vì sao M là không gian vectơ con đóng của H?

(d) Cho hàm $f(x) = x$. Tìm $P_M f$.

4.7.27. ✓ Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian vectơ con sinh bởi các hàm 1, t, t^2.

4.7.28. ✓ Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$ cho $f(t) = t^2$. Tìm hình chiếu của f và khoảng cách từ f tới các không gian vectơ con M với M là tập hợp các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 1.

4.7.29. Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$ cho $f(t) = t^2$.

(a) Đặt $M = \{x \in L^2([0,1]) \mid \int_0^1 x(t)\, dt = 0\}$. Chứng tỏ $M = \langle 1 \rangle^{\perp}$.

(b) Tìm hình chiếu của f và khoảng cách từ f tới M.

4.7.30. Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$:

(a) Chứng minh rằng họ $E = \{1, \sin 2\pi x, \cos 4\pi x\}$ là trực giao.

(b) Gọi M là không gian tuyến tính sinh bởi họ E trên, hãy tìm hình chiếu $P_M f$ với $f(x) = x$.

4.7.31. Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H. Cho $x \in H$. Chứng tỏ chiếu của x xuống M là duy nhất. Cụ thể hãy chứng tỏ nếu y_1 và y_2 thuộc M thỏa $(x - y_1) \perp M$ và $(x - y_2) \perp M$ thì $y_1 = y_2$, theo các bước sau:

(a) Chứng tỏ $(y_1 - y_2) \perp M$.

(b) Chứng tỏ $(y_1 - y_2) \perp (y_1 - y_2)$.

(c) Chứng tỏ $y_1 - y_2 = 0$.

4.7.32. Trong không gian định chuẩn ℓ^2 gọi $e_1 = (1,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$. Chứng tỏ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên ℓ^2 sao cho $f(e_1) = 1$ và $f(e_2) = 0$, bằng một trong hai cách sau:

(a) Dùng định lý Hahn–Banach.

(b) Xét phiếm hàm tuyến tính trong không gian tích trong đại diện bởi e_1.

4.7.33. * Trong không gian định chuẩn ℓ^2 gọi $e_1 = (1,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$, $e_3 = (0,0,1,\dots)\dots$ Chứng tỏ dãy $(e_n)_{n\geq 1}$ hội tụ yếu (xem 3.8.28) nhưng không hội tụ.

4.7.34. ✓ Trên $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$, với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt).$$

Hãy kiểm trực tiếp rằng họ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ là một họ trực chuẩn trong $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$.

4.7.35. Tìm khai triển Fourier của hàm:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ x - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$

4.7.36. Cho $f \in L^2([0,2\pi])$ và $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$ là chuỗi Fourier của f. Áp dụng đẳng thức Parseval, chứng tỏ

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx.$$

4.7.37. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $f(x) = x$ trên $[0,2\pi]$ (xem 4.6.2), chứng tỏ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.7.38. Tìm khai triển Fourier của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \pi,\\ (x-2\pi)^2, & \pi \le x \le 2\pi.\end{cases}$$

Áp dụng đẳng thức Parseval, chứng tỏ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4.7.39. * Cho H và K là hai không gian Hilbert trên cùng một trường $\mathbb{F}$. Giả sử $T : H \to K$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Với $y \in K$, đặt với mỗi $x \in H$:

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle.$$

(a) Chứng tỏ f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên H.

(b) Áp dụng định lý biểu diễn Riesz, chứng tỏ tồn tại duy nhất một phần tử của K, đặt là T^*y, thỏa

$$\forall x \in H, f(x) = \langle x, T^*y\rangle.$$

(c) Chứng tỏ T^* là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ K vào H. Toán tử T^*, được xác định bởi tính chất

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \forall x \in H, \forall y \in K,$$

được gọi là ***toán tử liên hợp*** của T.

4.7.40. * Đây là một kết quả về tính toán chuẩn của ánh xạ tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$. Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tuyến tính. Gọi T^* là toán tử liên hợp của T, được định nghĩa bởi

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

với tích vô hướng Euclid.

(a) Chứng tỏ ma trận biểu diễn $[T^*]$ là ma trận liên hợp của ma trận $[T]$.

(b) Chứng tỏ ánh xạ tuyến tính T^*T có n giá trị riêng thực không âm.

(c) Chứng tỏ tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{e_i \mid 1 \le i \le n\}$ gồm các vectơ riêng e_i ứng với trị riêng λ_i của T^*T. Hãy kiểm rằng với chuẩn Euclid $\|\cdot\|_2$ thì

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \langle T^*Tx, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i(T^*T)(e_i), \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \le \max_i \lambda_i \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

(d) Hãy kiểm rằng $\|T\| = \sqrt{\max_{1\le i\le n}\lambda_i}$ trong đó λ_i là các giá trị riêng của T^*T.

Hướng dẫn học tiếp

Bên cạnh những khảo cứu chuyên sâu hơn các đề tài đã xuất hiện trong môn học này, Giải tích hàm còn nhiều đề tài lớn chưa xuất hiện ở đây như các định lý Baire, định lý Banach-Steinhaus, trị riêng và phổ của toán tử, không gian đối ngẫu, đại số toán tử. Người đọc có thể xem qua những tài liệu nâng cao hơn như [2], [3], [5], [8], [10].

Dưới đây là danh sách một số môn học và lĩnh vực sử dụng và phát triển các nội dung của môn Giải tích hàm:

- Giải tích hàm phi tuyến.
- Giải tích thực: không gian L^p, không gian Sobolev.
- Phương trình đạo hàm riêng: nghiệm suy rộng … Các phương trình đạo hàm riêng được sử dụng rất rộng rãi để mô hình hóa các hiện tượng vật lí và xã hội.
- Giải tích số: lí thuyết xấp xỉ, phương pháp Garlekin, phương pháp phần tử hữu hạn để giải xấp xỉ nghiệm của phương trình đạo hàm riêng.
- Tối ưu hóa: qui hoạch phi tuyến.
- Xử lí tín hiệu số trong Tin học.

Gợi ý cho một số bài tập

2.8.15 Không gian định chuẩn là liên thông nên tập vừa đóng vừa mở phải là $\emptyset$ hoặc cả không gian.

2.8.24 Dùng tính cộng tính đếm được của độ đo.

2.8.20 Đổi biến $u = 1 + e^{nx}$ và viết $\frac{1}{(u-1)u} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$.

2.8.26 Dùng bất đẳng thức Cauchy.

3.8.7 Dùng bất đẳng thức Hölder.

3.8.12 Dùng định lý Ascoli.

3.8.13 Dùng 3.8.3

3.8.14 Tham khảo mục 3.5.

3.8.22 Áp dụng định lý Hahn-Banach cho không gian sinh bởi vectơ $y - x$ và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(y - x) \neq 0$.

3.8.23 Áp dụng định lý Hahn-Banach cho không gian sinh bởi vectơ x và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(x) = \|x\|$.

3.8.25 Áp dụng định lý Hahn-Banach cho không gian sinh bởi M và x và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(M) = \{0\}$, $f(x) \neq 0$. Để thấy tính liên tục của f, dùng 3.8.21, hoặc chứng minh trực tiếp giống phần đầu của chứng minh của định lý Hahn-Banach. Vấn đề liên tục của f tương đương với việc tồn tại số thực $\alpha > 0$ sao cho $\forall y \in M, \|x - y\| > \alpha$, tức là đồng nghĩa với $d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\} > 0$, và đồng nghĩa với x không phải là một điểm dính của M.

3.8.26 Dùng 3.8.23.

3.8.21 Giả sử $\Lambda x \neq 0$. Giả sử $\ker\Lambda$ là đóng. Theo bài 3.8.20 thì $X = \ker\Lambda + \langle x\rangle$. Để thấy tính liên tục của Λ làm tương tự phần đầu của chứng minh của định lý Hahn-Banach. So sánh bài 3.8.25.

4.7.8 Dùng đẳng thức hình bình hành.

4.7.12 Dùng 4.3.5, hoặc dùng ý trong chứng minh của 4.3.1.

4.7.19 Các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ đều tương đương.

4.7.18 Phiếm hàm cho bởi tích trong.

4.7.35 (a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)x$.

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, *Nhập môn Giải tích*, NXB Giáo dục, 1997.

[2] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011. Giáo trình cho bậc sau đại học.

[3] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[4] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[5] Dương Minh Đức, *Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2005.

[6] Dương Minh Đức, *Lý thuyết độ đo và tích phân*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[7] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1975. Dành cho bậc đại học. Có bản dịch tiếng Việt.

[8] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis and applications*, John Wiley and sons, 1978. Tương đối dễ hiểu cho bậc đại học, gần với giáo trình này.

[9] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997. Có phần về không gian định chuẩn. Kiến thức giải tích bậc đại học.

[10] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Wiley-Interscience, 2002. Sách tham khảo cho trình độ sau đại học.

[11] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1986.

[12] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2002.

[13] Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Lý thuyết độ đo và xác suất*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2015.

[14] Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, Đặng Hoàng Tâm, Đinh Ngọc Thanh, *Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2011.

[15] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình Giải tích 2*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2011.

[16] Hoàng Tụy, *Hàm thực & Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2005.

[17] Huỳnh Quang Vũ, *Lecture notes on Topology*, Ho Chi Minh City University of Science, `https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`.

Chỉ mục