BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN TUẦN 1

Bài 1: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau và tính tổng chuỗi (nếu chuỗi hội tụ)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$

Bài 2: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n - 7}{2n^2 - n + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 4^n}{3^n + 4^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n.\sin\frac{\pi}{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$ g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln^2 n}$

Bài 3: Dùng định nghĩa khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

Bài 4: Chứng minh rằng các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Khi chúng cùng hội tụ, xác định α sao cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \alpha + \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$

Bài 5: Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k\right| < \varepsilon$

Bài 6: Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, cũng hội tụ và có tổng lần lượt là $a + b$ và αa.

Bài 7: Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ với $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. Chứng minh:

a) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ

b) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ phân kỳ.

Bài 8: Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

a) Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ hội tụ với $p > 1$. Điều ngược lại có đúng hay không?

b) Với $p \in (0; 1)$, hãy tìm một ví dụ để thấy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ có thể phân kỳ.

c) Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ hội tụ. Điều ngược lại có đúng hay không? Vì sao?

c) Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ hội tụ. Điều ngược lại có đúng hay không? Vì sao?

Bài 9: Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ. Dãy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ hội tụ.

Bài 10: Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ phân kỳ. Xét sự hội tụ của các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \max\{a_n, b_n\}$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \min\{a_n, b_n\}$.