BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN TUẦN 2

Bài 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2020n^2+2019}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^6+n^2+2}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)5^n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)7^n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n(3^n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n}{2^n+1}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+2n}$ **g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}+(-2)^n}{(-5)^n+4n^2}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n-1}{(e^n+1)^2}$

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n+1}{\sqrt{n^5+n}}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

Bài 3. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n}{3^n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cos n\pi}{n^2}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2+\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^7+5}}$ **g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\frac{n+1}{\pi^n}$

Bài 4.

a) Cho $p \in \mathbb{R}$. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^p$ theo p.

b) Cho $a > 1$ và $p \in \mathbb{R}$. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^p$ theo p.

c) Cho $p \in \mathbb{R}$. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p\sqrt[n]{n}}$ theo p.

d) Cho $p \in \mathbb{R}$. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ theo p.

e) Cho $p \in \mathbb{R}$. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ theo p.

Bài 5.

a) Cho a_n là dãy các chữ số thập phân, nghĩa là $a_n \in \{0,1,2,3,...,9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ hội tụ và có tổng là x thỏa $0 \le x \le 1$. Hơn nữa $x = 1$ khi và chỉ khi $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Cho a_n là dãy các chữ số thập phân, nghĩa là $a_n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$ hội tụ và có tổng là x thỏa $0 \le x \le 9$

c) Cho dãy số dương a_n thỏa $a_n \le M, \forall n \ge n_0$ trong đó $M > 0, n_0 \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{q^n}$ hội tụ với $|q| < 1$ và có tổng là x thỏa $0 \le x \le \dfrac{Mq}{1-q}$

d) Cho dãy số dương a_n thỏa $a_n \le M, \forall n \ge n_0$ trong đó $M > 0, n_0 \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ hội tụ với $p \ge 2$ và có tổng là x thỏa $0 \le x \le M$

e) Cho dãy số dương a_n và $q > p$. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ hội tụ hay có tổng riêng phần bị chặn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^q}$ hội tụ.

Bài 6 Cho dãy số dương $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = a$.

a) Nếu $a \in (0; \infty)$ hãy chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kì.

b) Nếu $a = +\infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ hay phân kì?

c) Nếu $a = 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ hay phân kì?

d) Nếu $a = +\infty$ và dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy giảm. Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kì.

e) Nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số dương giảm và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$

Bài 7. Giả sử các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ hội tụ. Chứng minh các chuỗi sau cũng hội tụ:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \le \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2\right)^{1/2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2$ **c)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$

Bài 8. Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \le n_0$. Chứng minh nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ.