BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN TUẦN 3

Bài 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n!)}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{1.5...(4n-3)}$ g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{3^n.n!}$ h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$ i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n.n!}{n^n}$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$ k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n.n!}{n^n}$ l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n.(n!)^2}{n^{2n}}$

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n^2} 2^n}{(n+1)^n}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$ g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$ h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$ j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Bài 3. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau bằng tiêu chuẩn tích phân

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n - 1)}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$

Hãy cho biết khi tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)$ hội tụ thì có thể lấy giá trị của tích phân làm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ được hay không?

Bài 4. Cho dãy số $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^k}, n = 2k \end{cases}$.

a) Tính $\limsup_{n\to+\infty} a_n, \liminf_{n\to+\infty} a_n, \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}, \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ có hội tụ không theo tiêu chuẩn tỷ số D'Alambert và căn thức?

Bài 5. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh các chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n), \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n)$ hội tụ

Bài 6. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau theo p:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n.n^p$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n n!}{n^n}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^p n}$

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

Bài 1. Cho $X = \mathbb{R}$. Cho các ánh xạ $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ định bởi
a) $d_1(x, y) = |x - y|$
b) $d_2(x, y) = |e^x - e^y|$
c) $d_3(x, y) = \left|\dfrac{x^2}{2 + x^2} - \dfrac{y^2}{2 + y^2}\right|$
d) $d_4(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$
e) $d_5(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$, với $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f) $d_6(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$
Chứng minh (X, d_i) là không gian metric.
g) Hàm số thực $f(x)$ phải có tính chất như thế nào để $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ là một metric.

Bài 2. Cho $X = \mathbb{R}^2$. Với $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, cho các ánh xạ $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ định bởi
a) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
b) $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
c) $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
Chứng (X, d_i) là các không gian metric và các chuẩn trên là tương đương.

Bài 3. Cho $X = \mathbb{R}^n$. Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, cho các ánh xạ $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ định bởi
a) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$
b) $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$
c) $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\}$
Chứng (X, d_i) là các không gian metric và các chuẩn trên là tương đương.

Bài 4. Cho không gian metric (X, d). Cho các ánh xạ $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ định bởi
a) $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
b) $d_2(x, y) = \arctan[d(x, y)]$ với $d(x, y) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$
c) $d_3(x, y) = \ln[1 + d(x, y)]$
d) $d_4(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$
Chứng minh (X, d_i) là các không gian metric.
e) Cho f là hàm số tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,$f(0) = 0$ và $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Chứng minh $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ là metric.
f) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và $f''(x) \leq 0, \forall x > 0$ thì $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ là metric

Bài 5. Cho $C([0, 1])$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên $[0, 1]$. Với $f, g \in X$, xét các ánh xạ $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ định bởi
a) $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$
b) $d_2(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\}$
Chứng minh (X, d_i) là các không gian metric.