BIÊN SOẠN THẦY LÊ DŨNG TRÍ   FB Tri Tri Le

TOÁN CAO CẤP   MA TRẬN   ĐỊNH THỨC

Các Kiến Thức Cơ Bản

Xét ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ đây là ma trận gồm m hàng và n cột

Ví dụ $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ đây là ma trận 3 hàng 2 cột m=3, n=2

Ma trận O ,Tất cả phần tử đều =0, ma trận đơn vị kí hiệu I HOẶC E, tất cả phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại =0, ví dụ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ đây là ma trận đơn vị cấp 3, gọi là I_3

A+B=B+A PHÉP CÔNG 2 MA TRẬN THỰC HIÊN ĐƯỢC, KHI 2 MA TRẬN CÙNG SỐ HÀNG VÀ SỐ CỘT

Ví dụ $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ ta có A+B $=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 4\\ 1 & 7\end{bmatrix}$, PHÉP TRỪ 2 MA TRẬN , CÁC E THỰC HIÊN LẤY CÁC PHẦN TỬ TƯƠNG ỨNG 2 MA TRẬN TRỪ CHO NHAU

k.A Lấy Số đó nhân với từng phần tử của ma trận ví 2.A= $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

Chú í   A.B $\neq$ B.A

VÍ DỤ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ Và $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ Ta có AB= $\begin{bmatrix}2.1+1.1 & 2.(-1)+1.1\\ 3.1+2.1 & 3.(-1)+2.1\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$

B.A= $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}1.2+-1.3 & 1.(1)+-1.2\\ 1.2+\ \ 1.3 & 1.(1)+\ \ 1.2\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

TRÊN LÀ VÍ DỤ CHỨNG MINH A.B $\neq$ B.A , CÁC E LƯU Í NHÉ

<u>Chú í</u> $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ $B=\left[a_{ij}\right]_{n\times p}$ thì A.B sẽ tạo thành ma trận cỡ m$\times p$ tức là m hàng và p cột

Nếu là ma trận gồm n hàng và n cột , gọi là ma trận vuông cấp n

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1+1.2+1.1 & 3.1+1.(-1)+1.0 & 3.(-1)+1.1+1.1 \\ 2.1+1.2+2.1 & 2.1+1.(-1)+2.0 & 2.(-1)+1.1+2.1 \\ 1.1+2.2+3.1 & 1.1+2.(-1)+3.0 & 1.(-1)+2.1+3.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3+1.2+1.1 & 2.1+1.1+1.0 \\ 3.3+0.2+1.1 & 3.1+0.1+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$ ĐÂY CHÍNH LÀ MA TRẬN CỠ 2.3 NHÂN VỚI MA TRẬN CỠ 3.2 TẠO THÀNH CỠ 2.2

<u>Bài 2:</u>

<u>Thực hiện phép toán sau:</u>

$a,$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$ chú í $A^2 = A.A$

Ta có $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3+3.1+1.0 & 2.1+1.1+1.1 & 2.1++1.0+1.2 \\ 3.2+1.3+0.0 & 3.1+1.1+0.1 & 3.1+1.0+0.2 \\ 0.2+1.3+2.0 & 0.1+1.1+2.1 & 0.1+1.0+2.2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b, Tính B= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$

$$CHÚ\ Í\ A^3 = A^2.A$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+1.1 & 2.1+1.3 \\ 1.2+3.1 & 1.1+3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2+5.1 & 5.1+5.3 \\ 5.2+10.1 & 5.1+10.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$

Cho A Là ma trận gồm m hàng , n cột $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ thì A^T Gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A, A^T Có được bằng cách từ ma trận A đổi hàng thành cột $\rightarrow A^T$

Ví dụ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ thì $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Nếu A= A^T Gọi A Là ma trận đối xứng -A= A^T gọi là ma trận phản đối xứng

Ví Dụ

Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Hãy tính: a. A^T b. B^T c. A^TB^T d. $B^T A^T$

e. $(AB)^T$ f. $(BA)^T$ g. $(A+B)^T$.

a…Ta Có $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, b, ta có $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c. $A^T B^T = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

d. $B^T.A^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ e. $(AB)^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ f. $(BA)^T = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

g. $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

qua đây chúng ta dễ dàng rút ra $(A.B)^T = B^T.A^T$ $(BA)^T = A^T.B^T$, $(A)^{T^T} = A$

Định thức Cho ma trận A , Định thức kí hiệu là det A hoặc $|A|$ Có 2 phương pháp tính

Cách 1.. tính theo lối cổ điển, khai triển laplace, đại khái cách này khá trâu bò , dùng cho Định thức cấp 2 và 3

cách2, tính theo cách dùng các phép biến đổi

Xét Cách 1 A= $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. đan chéo trừ nhau thôi các em

ví dụ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.3 = -1$

Định Thức cấp 3,các em có thể khai triển theo hàng, hoặc khai triển theo cột , hoặc khai triển theo đường chéo

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & m \\ n & p & q \end{vmatrix}$=a. $\begin{vmatrix} f & p \\ m & q \end{vmatrix}$-b. $\begin{vmatrix} d & n \\ m & q \end{vmatrix}$+c$\begin{vmatrix} d & f \\ n & p \end{vmatrix}$= các e tính tiếp định thức cấp 2 , kết quả sẽ ra 1 số

Ví Dụ

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=1.$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ - 1.$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ + 1.$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=1.-1- 1.1+1.-1=-3

CHÚ Í $|A^T| = |A|$

A, B CÙNG CẤP $|A.B| = |A|.|B|$ $|A^K| = |A|^K$ $K \in N$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Ma trận phụ hợp xét 1 ma trận A, ma trận phụ hợp là A^*, Là ma trận tạo nên từ các phần phụ (hoặc gọi là phần bù)đại số

Ví dụ Cho A=$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, Tìm các phần phụ đại số của ma trận A

Các e chú í công thức để tìm $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times$ giá trị định thức có được khi ta bỏ hàng bỏ hàng i , cột j

$A_{11} = (-1)^{1+1}.5 = 5$,i=1,j=1 các e thấy ta bỏ đi hàng 1 và cột 1 , thì cái còn lại chỉ là 1 số

T,TỰ $A_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $A_{21} = (-1)^{2+1}.5 = 5$ $A_{22} = (-1)^{2+2}.1 = 1$

Ví dụ Cho ma trận A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Tìm các phần phụ đại số của ma trận A

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$=-12 cấc e thấy i=1 và j=1 , định thức có được là định thức khi ta bỏ đi hàng i tức là bỏ đi hàng 1, và bỏ đi cột j tức là bỏ cột 1

<u>Tương tự</u> $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$=-2 $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$=-4

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$=4 $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$=1 $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$=-2

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$=12 $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$=0 $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ =-4

Vậy ma trận phụ hợp của ma trận A Là $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$=Các e gi các giá trị vào

<u>MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN A KÍ HIÊU LÀ</u> A^{-1}

Ma trận A CÓ MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO KHI DET A $\neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{DetA}.A^*,$$

<u>VÍ DỤ</u> TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN SAU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Ta có det A=$1.\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, nên ma trận A Có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \frac{1}{DetA}.A* = \frac{1}{-4}.\begin{bmatrix} -12 & 4 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$,Cách tìm A^*, PHÍA TRÊN ĐÃ HƯỚNG DẪN

CÁC E CHÚ Í $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

$$A.I = I.A = A$$

<u>CÁC BÀI TẬP TỰ LUYÊN</u>

Câu 1: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $f\left(A\right)=A^3-2A+I$.

Câu 2: Cho các ma trận thực

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad và \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X thỏa mãn $B^{-5}XA^{10}=-5B^{-4}A^{9}$.

Câu 3: Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X thỏa mãn $AX=A^{-1}$.