

KHÔNG GIAN VECTOR \mathbf{R}^n I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:1.1/ KHÔNG GIAN VECTOR \mathbf{R}^n :

Cho số nguyên $n \geq 1$ và $\mathbf{R}^n = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \}$.

Ta gọi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là *vector* X trong \mathbf{R}^n . Ta thường “ hình học hóa ” X bằng một đoạn thẳng có gốc, ngọn, phương, chiều và độ dài. Ta định nghĩa các phép toán *cộng vector* (+) và *nhân số thực với vector* (.) trên \mathbf{R}^n như sau:

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}$,

$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$ và $c.X = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbf{R}^n$.

Về mặt hình học, phép *nhân số thực với vector* có thể thay đổi chiều và độ dài nhưng không thay đổi phương của vector. Phép *cộng vector* có thể tạo ra các vector có phương mới.

Cấu trúc đại số $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ gọi là *không gian vector \mathbf{R}^n (trên \mathbf{R})*.

Ta cũng có thể đồng nhất \mathbf{R}^n với $M_{1 \times n}(\mathbf{R})$ trong đó phép *nhân số thực với vector* và phép *cộng vector* chính là phép *nhân số thực với ma trận* và phép *cộng ma trận*.

Ví dụ:

Với $X = (-5, 1, -4, 9), Y = (8, 0, -2, -7) \in \mathbf{R}^4$ và $c = \frac{2}{3} \in \mathbf{R}$, ta có

$X + Y = (3, 1, -6, 2) \in \mathbf{R}^4$ và $cX = \frac{2}{3}(8, 0, -2, -7) = (\frac{16}{3}, 0, \frac{-4}{3}, \frac{-14}{3}) \in \mathbf{R}^4$.

1.2/ MINH HỌA HÌNH HỌC:

$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ được đồng nhất với “ Không gian các vector gốc O trên trục $x'Ox$ ”.

$\mathbf{R}^2 = \{ X = (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với “ Không gian các vector gốc O trên mặt phẳng (Oxy) ”.

$\mathbf{R}^3 = \{ X = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với “ Không gian các vector gốc O trên trong hệ trục tọa độ $(Oxyz)$ ”.

1.3/ TÍNH CHẤT:

Không gian vector $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ trên \mathbf{R} thỏa 7 tính chất sau đây:

(A₁) Phép (+) *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$,

$$X + Y = Y + X \text{ và } (X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z.$$

(A₂) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n, \forall X \in \mathbf{R}^n, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.

Ta nói \mathbf{O} là “ vector không ” và \mathbf{O} là *phần tử trung hòa* của phép (+)

(A₃) $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \exists X' = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbf{R}^n$ thỏa

$$X' + X = X + X' = \mathbf{O}. \text{ Ký hiệu } X' = -X = (-1)X \text{ là vector đối của } X.$$

(A₁), (A₂) và (A₃) là các tính chất riêng của phép (+).

(B₁) $\forall X \in \mathbf{R}^n, 1.X = X$.

(B₂) $\forall X \in \mathbf{R}^n, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.X) = (c.d).X$

(B₁) và (B₂) là các tính chất riêng của phép (.)

(C₁) $\forall X \in \mathbf{R}^n, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).X = c.X + d.X$

(C₂) $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, c.(X + Y) = c.X + c.Y$

(C₁) và (C₂) là các tính chất liên quan giữa phép (+) và phép (.)

1.4/ HỆ QUẢ: $\forall X \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}$,

a) $c.X = \mathbf{0} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } X = \mathbf{0})$

b) $c.X \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } X \neq \mathbf{0})$

II. KHÔNG GIAN VECTOR CON TRONG \mathbf{R}^n :

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $W \subset \mathbf{R}^n$.

Các phép toán (+) và (.) trên \mathbf{R}^n vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là một không gian vector con của \mathbf{R}^n (ký hiệu $W \leq \mathbf{R}^n$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:

* $\mathbf{0} \in W$ (1)

* $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)

* $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3)

b) Suy ra $W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4)

c) \mathbf{R}^n luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{0}\}$ và chính \mathbf{R}^n .

Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $\{\mathbf{0}\} \neq W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là một không gian con không tầm thường của \mathbf{R}^n .

Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là một không gian con thực sự của \mathbf{R}^n và ký hiệu $W < \mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) \mathbf{R}^1 chỉ có hai không gian con là $\{\mathbf{0}\}$ và chính \mathbf{R}^1 .

(chúng đều là các không gian con tầm thường).

b) \mathbf{R}^2 luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{0}\}$ và chính \mathbf{R}^2 .

Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của \mathbf{R}^2 .

Xét đường thẳng tùy ý (D) trong mặt phẳng \mathbf{R}^2 sao cho (D) đi qua gốc O.

Đặt $H = \{ \text{các vector gốc O trên đường thẳng (D)} \}$. Ta có $H \subset \mathbf{R}^2$ và H thỏa

(4) trong (2.1). Do đó $H \leq \mathbf{R}^2$ và H được gọi là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^2 . Suy ra \mathbf{R}^2 có vô số không gian con kiểu đường thẳng vì có vô số đường thẳng trong mặt phẳng \mathbf{R}^2 đi qua gốc O.

c) \mathbf{R}^3 luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{0}\}$ và chính \mathbf{R}^3 .

Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của \mathbf{R}^3 .

– \mathbf{R}^3 có vô số không gian con kiểu đường thẳng (mỗi đường thẳng thuộc về không gian \mathbf{R}^3 và đi qua gốc O).

– Xét mặt phẳng (P) tùy ý trong \mathbf{R}^3 sao cho (P) đi qua gốc O.

Đặt $K = \{ \text{các vector gốc } O \text{ trên mặt phẳng } (P) \}$. Ta có $K \subset \mathbf{R}^3$ và K thỏa (4) trong (2.1). Do đó $K \leq \mathbf{R}^3$ và K được gọi là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của \mathbf{R}^3 . Suy ra \mathbf{R}^3 có vô số không gian con kiểu mặt phẳng vì có vô số mặt phẳng trong \mathbf{R}^3 đi qua gốc O .

d) Tổng quát, \mathbf{R}^n ($n \geq 4$) có các không gian con như sau:

- Không gian con tầm thường $\{\mathbf{O}\}$ (ta gọi là không gian con *0 phẳng*).
 - vô số không gian con kiểu đường thẳng (ta gọi là không gian con *1 phẳng*).
 - vô số không gian con kiểu mặt phẳng (ta gọi là không gian con *2 phẳng*).
 - vô số không gian con *3 phẳng*, ..., vô số không gian con *(n - 1) phẳng*.
- Các không gian con *(n - 1) phẳng* của \mathbf{R}^n được gọi là *các siêu phẳng* trong \mathbf{R}^n .
- Không gian con tầm thường \mathbf{R}^n (gọi là không gian con *n phẳng*).

2.2/ MỆNH ĐỀ: Khi $W \leq \mathbf{R}^n$ thì W cũng được gọi là không gian vector $(W, +, \cdot)$ trên \mathbf{R} và nó cũng thỏa 7 tính chất sau đây [tương tự như $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$]:

$$(A_1) \forall X, Y, Z \in W, X + Y = Y + X \text{ và } (X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z.$$

$$(A_2) \exists \mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0) \in W, \forall X \in W, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X.$$

$$(A_3) \forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W, \exists X' = -X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in W \text{ thỏa } X' + X = X + X' = \mathbf{O}.$$

$$(B_1) \forall X \in W, 1.X = X.$$

$$(B_2) \forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.X) = (c.d).X$$

$$(C_1) \forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).X = c.X + d.X$$

$$(C_2) \forall X, Y \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.(X + Y) = c.X + c.Y$$

$$\text{Suy ra } \forall X \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } X = \mathbf{O})$$

$$c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } X \neq \mathbf{O})$$

2.3/ MỆNH ĐỀ: (nhận diện không gian con của \mathbf{R}^n)

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

$$W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) : W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \}$$

Như vậy mỗi không gian con của \mathbf{R}^n đều là *không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* nào đó.

Ví dụ: Giải thích tập hợp sau là một không gian con của \mathbf{R}^4 :

$$W = \{ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 4u - v + 5w - 8t = -7u + 2w + t = 6u + 9v - 3w = -9u - 4v + 7w + 3t \}$$

Ta có thể sử dụng [(1), (2), (3)] hoặc (4) của (2.1) để giải thích $W \leq \mathbf{R}^4$.

Tuy nhiên ta sẽ sử dụng (2.3) để giải thích $W \leq \mathbf{R}^4$ một cách đơn giản hơn.

Ta viết lại (bằng cách lần lượt phối hợp các vế sau với vế đầu tiên)

$$W = \{ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 11u - v + 3w - 9t = 2u + 10v - 8w + 8t = 13u + 3v - 2w - 11t = 0 \}, \text{ nghĩa là}$$

$$W = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid AX = \mathbf{O} \} \text{ với } A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -4 & 4 \\ 13 & 3 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}). \text{ Do đó } W \leq \mathbf{R}^4.$$

2.4/ MỆNH ĐỀ: (phủ nhận không gian con của \mathbf{R}^n)

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } W \not\subseteq \mathbf{R}^n \text{ (} W \text{ không phải là không gian con của } \mathbf{R}^n \text{)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} O \notin W \text{ (5)} \\ \text{hay} \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W \text{ (6)} \\ \text{hay} \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha \notin W \text{ (7)} \end{array} \right. \\
 \text{b) } W \subseteq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W.
 \end{array}$$

Khi giải thích $W \subseteq \mathbf{R}^n$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

Ví dụ: Giải thích các tập hợp sau đây không phải là không gian con của \mathbf{R}^3 :

a) $H = \{ X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid uvw = 0 \}$. Để ý H không thỏa (5) và (7).

H thỏa (6) vì $\exists \alpha = (1, 0, 0), \beta = (0, 1, 1) \in H, \alpha + \beta = (1, 1, 1) \notin H$. Vậy $H \not\subseteq \mathbf{R}^3$.

b) $K = \{ X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid 2u - 5v + 8w \geq 1 \}$. K thỏa (5) vì $O = (0, 0, 0) \notin K$.

Vậy $K \not\subseteq \mathbf{R}^3$. Để ý K cũng thỏa (7) nhưng không thỏa (6).

c) $L = \{ X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2 + 3v - 4w^3 = -3 \}$

L thỏa (7) vì $\exists \alpha = (0, -1, 0) \in L, \exists c = -1 \in \mathbf{R}, c\alpha = (0, 1, 0) \notin L$. Vậy $L \not\subseteq \mathbf{R}^3$.

Để ý L cũng thỏa (5) và (6).

2.5/ KHÔNG GIAN GIAO VÀ KHÔNG GIAN TỔNG:

Cho $V, W, V_1, V_2, \dots, V_k$ là các không gian vector con của \mathbf{R}^n ($k \geq 2$).

a) Đặt $V \cap W = \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ và } \alpha \in W \}$ và

$$V + W = \{ \alpha = \beta + \gamma \mid \beta \in V \text{ và } \gamma \in W \}.$$

Ta có $(V \cap W)$ và $(V + W)$ đều là các không gian vector con của \mathbf{R}^n .

Ta nói $(V \cap W)$ và $(V + W)$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của V và W .

b) Đặt $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k = \bigcap_{j=1}^k V_j = \{ \alpha \mid \alpha \in V_j \ \forall j = 1, 2, \dots, k \}$ và

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \sum_{j=1}^k V_j = \{ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \mid \alpha_j \in V_j \ \forall j = 1, 2, \dots, k \}$$

Ta có $\bigcap_{j=1}^k V_j$ và $\sum_{j=1}^k V_j$ đều là các không gian vector con của \mathbf{R}^n .

Ta nói $\bigcap_{j=1}^k V_j$ và $\sum_{j=1}^k V_j$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của

V_1, V_2, \dots và V_k .

c) Đặt $V \cup W = \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ hay } \alpha \in W \}$ và

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = \bigcup_{j=1}^k V_j = \{ \alpha \mid \exists j = 1, 2, \dots, k \text{ thỏa } \alpha \in V_j \}.$$

Ta có $V \cup W$ và $\bigcup_{j=1}^k V_j$ *không nhất thiết* là các không gian vector con của \mathbf{R}^n .

Ví dụ:

- a) V và W là các không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^2 sao cho hai đường thẳng tương ứng giao nhau tại O . Ta có $V \cap W = \{O\}$ và $V + W = \mathbf{R}^2$.
- b) H và K lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của \mathbf{R}^3 sao cho đường thẳng và mặt phẳng tương ứng giao nhau tại O .
Ta có $H \cap K = \{O\}$ và $H + K = \mathbf{R}^3$.
- c) P và Q là các không gian con kiểu mặt phẳng của \mathbf{R}^3 sao cho hai mặt phẳng tương ứng giao nhau theo giao tuyến (D) qua O . Ta có $P \cap Q = Z$ (Z là không gian con kiểu đường thẳng tương ứng với (D) của \mathbf{R}^2) và $P + Q = \mathbf{R}^3$.
- d) E, F và G là các không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^3 sao cho ba đường thẳng tương ứng không đồng phẳng và giao nhau tại O . Ta có $E \cap F \cap G = \{O\}$ và $E + F + G = \mathbf{R}^3$.

2.6/ ĐỊNH NGHĨA: Cho V và W là các không gian vector con của \mathbf{R}^n .

- a) Nếu $W \subset V$ thì ta cũng nói W là *một không gian vector con (trên \mathbf{R})* của V và ký hiệu $W \leq V$.
- b) Không gian $\{O\}$ chỉ có duy nhất một không gian con là chính $\{O\}$.
Nếu $V \neq \{O\}$ thì V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{O\}$ và V .
Nếu $W \leq V$ và $\{O\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V .
Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu là $W < V$.

Ví dụ:

W và V lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của \mathbf{R}^3 sao cho đường thẳng chứa trong mặt phẳng và chúng đều qua O . Ta có $\{O\} < W < V < \mathbf{R}^3$.

III. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

- a) Chọn tùy ý $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ và đặt $\alpha = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k) \in \mathbf{R}^n$.

Ta nói α là *một tổ hợp tuyến tính của S* (hay của $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$).

Như vậy từ một số hữu hạn các vector cho trước, ta có thể tạo ra được nhiều tổ hợp tuyến tính khác nhau của các vector đó.

- b) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

γ là *một tổ hợp tuyến tính của S* $\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k$

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên \mathbf{R} .

γ không là *tổ hợp tuyến tính của S* $\Leftrightarrow \forall c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma \neq c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k$

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$) vô nghiệm trên \mathbf{R} .

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,3,-1,0), \alpha_3 = (-1,-1,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

- a) $\alpha = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = -2(1,1,1,1) + 3(2,3,-1,0) - 5(-1,-1,1,1) = (9,12,-10,-7) \in \mathbf{R}^4$.

$$\beta = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4(1,1,1,1) - 3(2,3,-1,0) + 2(-1,-1,1,1) = (-4,-7,9,6) \in \mathbf{R}^4.$$

b) Cho $\gamma = (u,v,w,t) \in \mathbf{R}^4$.

γ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên \mathbf{R} .

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma \Leftrightarrow c_1(1,1,1,1) + c_2(2,3,-1,0) + c_3(-1,-1,1,1) = (u,v,w,t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = u \\ c_1 + 3c_2 - c_3 = v \\ c_1 - c_2 + c_3 = w \\ c_1 + c_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & | & t \\ 1 & 0 & 1 & | & t \\ 1 & 3 & -1 & | & v \\ 1 & 2 & -1 & | & u \\ 1 & -1 & 1 & | & w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 1 & | & t \\ 0 & 1 & 0 & | & v-u \\ 0 & 2 & -2 & | & u-t \\ 0 & -1 & 0 & | & w-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 1 & | & t \\ 0 & 1^* & 0 & | & v-u \\ 0 & 0 & -2^* & | & u+2w-3t \\ 0 & 0 & 0 & | & v+w-u-t \end{pmatrix}$$

$\gamma = (u,v,w,t)$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t = 0$ (*). Lúc đó ta có biểu diễn duy nhất $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ với $c_3 = 2^{-1}(3t - u - 2w)$, $c_2 = v - u$ và $c_1 = 2^{-1}(u + 2w - t)$ (\square)

$\gamma = (u,v,w,t)$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t \neq 0$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (9,10,-2,-1)$ và $\theta = (-7,1,4,-8) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên ε là một tổ hợp tuyến tính của S với

$\varepsilon = (3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3)$ do (\square) và θ không là tổ hợp tuyến tính của S .

3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Đặt W là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính có từ S (ký hiệu $W = \langle S \rangle$),

nghĩa là $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R} \} \subset \mathbf{R}^n$.

Ta chứng minh được $W = \langle S \rangle$ là một không gian vector con của \mathbf{R}^n [sử dụng (2.1)].

Ta nói $W = \langle S \rangle$ là không gian vector con (của \mathbf{R}^n) sinh bởi tập hợp S .

b) Nếu $S = \emptyset$ thì ta qui ước $\langle S \rangle = \{ \mathbf{O} \}$ (\emptyset sinh ra không gian con $\{ \mathbf{O} \}$ của \mathbf{R}^n)

c) $\langle S \rangle$ là không gian vector con nhỏ nhất chứa được S của \mathbf{R}^n , nghĩa là

$$\forall V \leq \mathbf{R}^n, S \subset V \Rightarrow \langle S \rangle \subset V.$$

d) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

$\gamma \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên \mathbf{R} .

Suy ra $\gamma \notin W = \langle S \rangle \Leftrightarrow \gamma$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$) vô nghiệm trên \mathbf{R} .

Ví dụ:

Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3,2,1,5), \alpha_2 = (4,-3,-1,-7), \alpha_3 = (1,-3,2,-4), \alpha_4 = (-2,5,-3,7) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta mô tả $W = \langle S \rangle$ và tìm điều kiện để vector $\gamma = (u,v,w,t) \in W$.

a) $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

$$= \{ \alpha = c_1(-3,2,1,5) + c_2(4,-3,-1,-7) + c_3(1,-3,2,-4) + c_4(-2,5,-3,7) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$$

$$= \{ \alpha = (-3c_1 + 4c_2 + c_3 - 2c_4, 2c_1 - 3c_2 - 3c_3 + 5c_4, c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4, 5c_1 - 7c_2 - 4c_3 + 7c_4) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$$

b) Cho $\gamma = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

$\gamma \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của S

\Leftrightarrow Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên \mathbf{R} .

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$

$\Leftrightarrow c_1(-3, 2, 1, 5) + c_2(4, -3, -1, -7) + c_3(1, -3, 2, -4) + c_4(-2, 5, -3, 7) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & w \\ -3 & 4 & 1 & -2 & u \\ 2 & -3 & -3 & 5 & v \\ 5 & -7 & -4 & 7 & t \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -1 & 2 & -3 & w \\ 0 & 1 & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & -1 & -7 & 11 & v-2w \\ 0 & -2 & -14 & 22 & t-5w \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 9 & -14 & u+4w \\ 0 & 1^* & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+v+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+w+t \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

$\gamma = (u, v, w, t) \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w = 0 = 2u + w + t)$ (*).

Lúc đó ta có vô số biểu diễn $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$ với $c_3 = a, c_4 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $c_1 = 14b - 9a + u + 4w$ và $c_2 = 11b - 7a + u + 3w$ (\square).

$\gamma = (u, v, w, t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w \neq 0$ hay $2u + w + t \neq 0)$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (5, -6, 1, -11)$ và $\theta = (-3, 2, 7, -4) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên $\theta \notin W = \langle S \rangle$ và $\varepsilon \in W = \langle S \rangle$ với vô số biểu diễn $\varepsilon = (14b - 9a + 9)\alpha_1 + (11b - 7a + 8)\alpha_2 + a\alpha_3 + b\alpha_4$ ($a, b \in \mathbf{R}$) do (\square).

3.3/ MINH HOA: Các vector β, γ, δ trong \mathbf{R}^n dưới đây đều có gốc là O .

a) Nếu $S = \{O\} \subset \mathbf{R}^n$ thì $\langle S \rangle = \{\alpha = cO = O \mid c \in \mathbf{R}\} = \{O\} = S$.

b) Nếu $S = \{\beta\} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta \mid c \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^n và đường thẳng này chứa β .

c) Nếu $S = \{\beta, \gamma\} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ khác phương) thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con kiểu mặt phẳng của \mathbf{R}^n và mặt phẳng này chứa β, γ .

d) Nếu $S = \{\beta, \gamma\} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ (β, γ cùng phương) thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^n và Đường thẳng này chứa β và γ .

e) Nếu $S = \{\beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbf{R}^3$ (β, γ, δ không đồng phẳng) thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R}\}$ và $\langle S \rangle = \mathbf{R}^3$.

f) Nếu $S = \{\beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ, δ khác phương đôi một nhưng đồng phẳng) thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con kiểu mặt phẳng của \mathbf{R}^n và mặt phẳng này chứa β, γ và δ .

g) Nếu $S = \{\beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ (β, γ, δ cùng phương với nhau) thì $\langle S \rangle = \{\alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R}\}$ là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^n và đường thẳng này chứa β, γ và δ .

3.4/ MỆNH ĐỀ:

Cho các tập hợp hữu hạn $S_1, S_2, \dots, S_k \subset \mathbf{R}^n$ ($k \geq 2$) và $\langle S_j \rangle = W_j \leq \mathbf{R}^n$ ($1 \leq j \leq k$).

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$. Ta có $\langle S \rangle = W_1 + W_2 + \dots + W_k$.

Ví dụ: Cho $S_1 = \{\alpha\}, S_2 = \{\beta, \gamma\}, S_3 = \{\delta, \varepsilon, \theta\} \subset \mathbf{R}^n$ và $\langle S_j \rangle = W_j \leq \mathbf{R}^n$ ($1 \leq j \leq 3$).

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta\}$. Ta có $\langle S \rangle = W_1 + W_2 + W_3$.

IV. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH:

4.1/ **ĐỊNH NGHĨA:** Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \mathbf{0}$ (*) với các ẩn số thực c_1, c_2, \dots, c_k .
(*) có ít nhất một nghiệm thực là $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ (nghiệm tầm thường).

- Nếu (*) có nghiệm thực duy nhất (nghiệm tầm thường) thì ta nói S độc lập tuyến tính (nghĩa là không có vector nào của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).
- Nếu (*) có vô số nghiệm thực (có nghiệm tầm thường và vô số nghiệm không tầm thường) thì ta nói S phụ thuộc tuyến tính (nghĩa là có ít nhất một vector của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).
- Nếu $S = \emptyset$ thì ta qui ước S độc lập tuyến tính.

Ví dụ:

a) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1(-3, 1, 2, 7) + c_2(1, -2, 5, -4) + c_3(2, 4, 1, 6) = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 14 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -22 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 182 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) nên S độc lập tuyến tính.

b) Cho $T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_1(3, -4, 1, 7) + c_2(-2, 6, 8, -1) + c_3(-13, 24, 13, -23) = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 13 & 0 \\ 3 & -2 & -13 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & -1 & -23 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 8 & 13 & 0 \\ 0 & -26 & -52 & 0 \\ 0 & 19 & 38 & 0 \\ 0 & -57 & -114 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Phương trình có vô số nghiệm là $[c_3 = a (a \in \mathbf{R}), c_1 = 3a, c_2 = -2a]$ nên T phụ thuộc tuyến tính.

Trích ra một nghiệm không tầm thường (bằng cách chọn $a = 1$), ta có

$(c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1)$ và được hệ thức $3\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 = \mathbf{0}$. Suy ra $\beta_3 = 2\beta_2 - 3\beta_1$, nghĩa là β_3 được tính theo β_1 và β_2 dưới dạng tổ hợp tuyến tính.

4.2/ NHẬN XÉT:

a) $S = \{ \alpha \} \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu $\alpha = \mathbf{0}$ thì S phụ thuộc tuyến tính

(phương trình $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ có vô số nghiệm $c \in \mathbf{R}$).

Nếu $\alpha \neq \mathbf{0}$ thì S độc lập tuyến tính.

(phương trình $c \cdot \alpha = \mathbf{0}$ có nghiệm thực duy nhất $c = 0$).

b) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu α cùng phương với β (α và β có các thành phần tỉ lệ với nhau) thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu α khác phương với β (α và β có các thành phần không tỉ lệ với nhau) thì S độc lập tuyến tính.

c) $S = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^3$.

Nếu α, β, γ đồng phẳng thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu α, β, γ không đồng phẳng thì S độc lập tuyến tính.

d) Cho $S \subset T \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì T cũng phụ thuộc tuyến tính.

Nếu T độc lập tuyến tính thì S cũng độc lập tuyến tính.

Nếu $\mathbf{0} \in S$ thì S phụ thuộc tuyến tính (vì $\{\mathbf{0}\}$ phụ thuộc tuyến tính).

Nếu S độc lập tuyến tính thì $\mathbf{0} \notin S$.

Ví dụ:

Xét $S = \{ \alpha = (-2, 4, -8, 6), \beta = (3, -6, 12, -9) \}$ và $T = \{ \gamma = (5, 1, -4, 7), \delta = (-1, 8, 2, -3) \} \subset \mathbf{R}^4$

Ta có S phụ thuộc tuyến tính ($\beta = \frac{-3}{2}\alpha$) và T độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ).

4.3/ MỆNH ĐỀ: (xác định sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính)

Cho $m \geq 3$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và ta có thể hoán đổi các dòng của A . Tìm $r(A)$ và $r(A) \leq m$.

a) Nếu $m > n$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

b) Xét trường hợp $m \leq n$.

Nếu $r(A) < m$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $r(A) = m$ thì S độc lập tuyến tính.

c) Xét trường hợp đặc biệt $m = n$ và $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Nếu A không khả nghịch ($|A| = 0$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu A khả nghịch ($|A| \neq 0$) thì S độc lập tuyến tính.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \} \subset \mathbf{R}^3$. Do $m = |Z| = 5 > n = 3$ nên Z phụ thuộc tuyến tính.

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & -1 \\ -13 & 24 & 13 & -23 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & 17 & -5 \\ 0 & 8 & -9 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5^* & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 91^* & 30 \end{pmatrix} = S_A \text{ có } r(A) = 3 = m = 3 < n = 4.$$

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10 & 26 & 11 \\ 0 & 50 & 130 & 55 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10^* & 26 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B \text{ có } r(B) = 2 < m = 3 < n = 4.$$

Do đó S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính.

c) Cho $H = \{ \gamma_1 = (a, 1, 1), \gamma_2 = (1, a, 1), \gamma_3 = (1, 1, a) \} \subset \mathbf{R}^3$ ($m = n = 3$).

$$\text{Đặt } C = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ và}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1^* & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2).$$

Như vậy H độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow C$ khả nghịch $\Leftrightarrow |C| \neq 0 \Leftrightarrow -2 \neq a \neq 1$

H phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow C$ không khả nghịch $\Leftrightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow (a = -2 \text{ hoặc } a = 1)$

V. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

5.1/ VẤN ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$. Có nhiều tập hợp hữu hạn của \mathbf{R}^n sinh ra W. Ta muốn tìm một tập sinh S nào đó của W sao cho S có số lượng vector là ít nhất. Khi đó ta nói S là một tập sinh tối ưu của W.

5.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle S \rangle$ với S là một tập hợp hữu hạn của \mathbf{R}^n .

a) Nếu S độc lập tuyến tính thì S chính là một tập sinh tối ưu của W.

(nghĩa là $\forall T \subset S, T \neq S \Rightarrow \langle T \rangle \neq W$)

b) Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì S là một tập sinh chưa tối ưu của W.

(nghĩa là $\exists T \subset S, T \neq S$ và $\langle T \rangle = W$)

Ví dụ: $W = \mathbf{R}^2$.

a) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^2$ (α khác phương với β). Ta có $\langle S \rangle = \mathbf{R}^2$ và S độc lập tuyến tính nên S chính là một tập sinh tối ưu của \mathbf{R}^2 . Xét $T = \{ \alpha \} \subset S$ và $T \neq S$. Ta có $\langle T \rangle \neq \mathbf{R}^2$ vì $\langle T \rangle$ là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^2 .

b) $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^2$ (α, β, γ đôi một khác phương nhau). Ta có $\langle Z \rangle = \mathbf{R}^2$ và Z phụ thuộc tuyến tính nên Z là một tập sinh chưa tối ưu của \mathbf{R}^2 . Xét $T = \{ \alpha, \beta \} \subset S$ thì $T \neq S$ và $\langle T \rangle = \mathbf{R}^2$.

5.3/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$.

Một cơ sở của W là một tập sinh độc lập tuyến tính (một tập sinh tối ưu) của W.

5.4/ MỆNH ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$.

- a) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ thì W có vô số cơ sở.
b) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ và W có cơ sở B gồm m vector thì mọi cơ sở khác cũng có m vector. Ta gọi m là *số chiều của không gian vector* W và ký hiệu $m = \dim_{\mathbf{R}} W$ (viết gọn là $m = \dim W$). Như vậy *số chiều của một không gian vector* là *số lượng vector hiện diện trong mỗi cơ sở* của nó.

Ví dụ:

- a) $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{O}\}$ và \emptyset độc lập tuyến tính (theo qui ước) nên không gian $\{\mathbf{O}\}$ có cơ sở duy nhất là \emptyset và $\dim\{\mathbf{O}\} = |\emptyset| = 0$. Ta nói $\{\mathbf{O}\}$ là không gian 0 chiều.
b) \mathbf{R}^1 có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của \mathbf{R}^1 gồm một vector $\alpha \neq \mathbf{O}$ tùy ý vì $B = \{\alpha\}$ độc lập tuyến tính và $\langle B \rangle = \mathbf{R}^1$.
Suy ra $\dim \mathbf{R}^1 = |B| = 1$ và ta nói \mathbf{R}^1 là không gian 1 chiều.
c) \mathbf{R}^2 có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của \mathbf{R}^2 gồm hai vector α, β khác phương nhau tùy ý vì $B = \{\alpha, \beta\}$ độc lập tuyến tính và $\langle B \rangle = \mathbf{R}^2$.
Suy ra $\dim \mathbf{R}^2 = |B| = 2$ và ta nói \mathbf{R}^2 là không gian 2 chiều.
d) \mathbf{R}^3 có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của \mathbf{R}^3 gồm ba vector α, β, γ không đồng phẳng tùy ý vì $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ độc lập tuyến tính và $\langle B \rangle = \mathbf{R}^3$.
Suy ra $\dim \mathbf{R}^3 = |B| = 3$ và ta nói \mathbf{R}^3 là không gian 3 chiều.
e) \mathbf{R}^n ($n \geq 1$) có vô số cơ sở khác nhau. Trong đó có một cơ sở đơn giản thông dụng gọi là cơ sở chính tắc $B_0 = \{\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)\}$.
Suy ra $\dim \mathbf{R}^n = |B_0| = n$ và ta nói \mathbf{R}^n là không gian n chiều.
f) $S = \{\alpha = (8, 7)\} \subset \mathbf{R}^2$ và $V = \langle S \rangle = \{\delta = a\alpha \mid a \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^2$. Do $\alpha \neq \mathbf{O}$ nên S độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của V . Ta có V là một không gian con kiểu đường thẳng của \mathbf{R}^2 có $\dim V = |S| = 1 < \dim \mathbf{R}^2 = 2$. Như vậy $\{\mathbf{O}\} < V < \mathbf{R}^2$ và V là một không gian con không tầm thường của \mathbf{R}^2 .
g) $T = \{\beta = (5, -2, 4), \gamma = (-3, 1, 8)\} \subset \mathbf{R}^3$ và $W = \langle T \rangle = \{\delta = b\beta + c\gamma \mid b, c \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^3$. Do β không tỉ lệ với γ nên T độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của W . Ta có W là một không gian con kiểu mặt phẳng của \mathbf{R}^3 có $\dim W = |T| = 2 < \dim \mathbf{R}^3 = 3$. Như vậy $\{\mathbf{O}\} < W < \mathbf{R}^3$ và W là một không gian con không tầm thường của \mathbf{R}^3 .

5.5/ NHÂN DIỆN CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN \mathbf{R}^n :

Cho $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}^n$ với $|S| = n$. Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

- a) S là một cơ sở của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow A$ khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
b) S không là cơ sở của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow A$ không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Ví dụ:

- a) Cho $Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ và $T = \{\delta, \varepsilon, \theta, \eta, \lambda\}$ trong \mathbf{R}^4 . Ta có $|Z| = 3$ và $|T| = 5$ nên Z và T không phải là cơ sở của \mathbf{R}^4 vì mỗi cơ sở của \mathbf{R}^4 có 4 vector.

b) Cho $S = \{ \alpha = (1, -2, a), \beta = (2, a - 2, 1), \gamma = (2, a - 5, a + 1) \} \subset \mathbf{R}^3$ có $|S| = 3$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -2 & a \\ 0 & 3 & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3).$$

S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow A$ khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$

S không là cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow A$ không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ hoặc } a = 3)$.

5.6/ Ý NGHĨA CỦA CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $B = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$ ($\dim W = |B| = m$).

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m$ (*).

Muốn tìm c_1, c_2, \dots, c_m , ta phải giải phương trình vector (*).

Như vậy không gian W hoàn toàn được xác định bởi một cơ sở bất kỳ của nó (vì mỗi vector trong W được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính theo các vector trong cơ sở). Do đó muốn xác định một không gian vector trong \mathbf{R}^n , ta chỉ cần giới thiệu một cơ sở của nó là đủ. Điều này rất thuận lợi vì các không gian vector $\neq \{0\}$ có vô hạn vector trong khi mỗi cơ sở của nó chỉ có hữu hạn vector.

b) Các không gian vector ($\neq \{0\}$) có vô hạn vector nên ta không thể so sánh “tầm vóc (độ lớn)” của các không gian dựa trên số lượng vector của chúng được. Chúng ta dùng đại lượng “số chiều” để thấy được “tầm vóc (độ lớn)” của các không gian. Không gian có số chiều càng cao thì “tầm vóc” càng lớn.

Ví dụ:

a) Cho $B = \{X_1 = (7, -2), X_2 = (-4, 1)\}$ là một cơ sở của \mathbf{R}^2 (vì $\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).

$\forall X = (u, v) \in \mathbf{R}^2$, ta có biểu diễn tổ hợp tuyến tính duy nhất

$X = (-u - 4v)X_1 + (-2u - 7v)X_2$ bằng cách giải hệ $X = c_1X_1 + c_2X_2$ với các ẩn số thực c_1 và c_2 :

$$(X_1 \ X_2 \mid X^t) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 7 & -2 & u \\ -4 & 1 & v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -1 & u+3v \\ 0 & -1 & 2u+7v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -u-4v \\ 0 & 1^* & -2u-7v \end{pmatrix}$$

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 3, -1, 0), \alpha_3 = (-1, -1, 1, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Xét $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \mid a, b, c \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1^* & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2^* & 2 \end{pmatrix} = S_A \text{ thì } r(A) = 3 \text{ nên } S \text{ độc lập tuyến}$$

tính và cũng là một cơ sở của W với $\dim W = |S| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$. Suy ra $W < \mathbf{R}^4$.

Theo **Ví dụ** của (3.1), $\forall \gamma = (u, v, w, t) \in W$ (γ thỏa $v + w - u - t = 0$), ta có biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính $\gamma = \frac{u + 2w - t}{2} \alpha_1 + (v - u) \alpha_2 + \frac{3t - u - 2w}{2} \alpha_3$.

5.7/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

a) **Vấn đề:** Cho $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W .

b) **Giải quyết:**

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm ma trận dạng bậc thang S_A của A .

S_A có k dòng *không tầm thường* tạo thành các vector $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$.

$C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \}$ là một cơ sở của $W = \langle S \rangle$ và $\dim W = |S| = k = r(A)$.

Ta cũng nói W là *không gian dòng* của ma trận A .

Ví dụ: Trong \mathbf{R}^4 , cho tập hợp (được mô tả theo các tham số thực a, b, c, d)

$$W = \{ X = (a + 4b - 2c + 3d, 2a + 7b - 3c + 7d, 2a + b + 4c + 15d, -a - 2b - 5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$$

Hãy tìm một tập hợp hữu hạn S của \mathbf{R}^4 thỏa $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và tìm một cơ sở cho W .

Dùng cách tách riêng các tham số và đặt mỗi tham số làm thừa số chung, ta có

$$\begin{aligned} W &= \{ X = (a, 2a, 2a, -a) + (4b, 7b, b, -2b) + (-2c, -3c, 4c, 0) + (3d, 7d, 15d, -5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \} \\ &= \{ X = a(1, 2, 2, -1) + b(4, 7, 1, -2) + c(-2, -3, 4, 0) + d(3, 7, 15, -5) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } W = \langle S \rangle \text{ với } S = \{ \alpha_1 = (1, 2, 2, -1), \alpha_2 = (4, 7, 1, -2), \alpha_3 = (-2, -3, 4, 0), \alpha_4 = (3, 7, 15, -5) \}$$

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}$$

W có cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 2, -1), \gamma_2 = (0, 1, 9, -2), \gamma_3 = (0, 0, -1, 0) \}$ và $\dim W = |C| = 3$

5.8/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT:

a) **Vấn đề:** Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W .

b) **Giải quyết:** Giải hệ $AX = \mathbf{O}$ để mô tả không gian nghiệm W .

- Nếu $W = \{ \mathbf{O} \}$ thì W có cơ sở (duy nhất) là \emptyset và $\dim W = |\emptyset| = 0$.

- Nếu hệ có vô số nghiệm với k ẩn tự do thì ta mô tả W theo k ẩn tự do đó.

Dùng cách tách riêng các ẩn tự do và đặt mỗi ẩn tự do làm thừa số chung, ta có được một tập sinh D (gồm k vector) cho W . Tập sinh D độc lập tuyến tính (kết quả này đã được chứng minh trong lý thuyết) nên D là *một cơ sở* của W .

Ta có $\dim W = |D| = k = (\text{Số ẩn tự do của hệ } AX = \mathbf{O})$.

Ví dụ:

a) Cho $V = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid HX = \mathbf{0} \} \leq \mathbf{R}^4$ với $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho V . Trước hết ta giải hệ $HX = \mathbf{0}$ với $X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Ta có

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6^* & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28^* \end{vmatrix} = 840 \neq 0$$

Vậy H khả nghịch và hệ $HX = \mathbf{0}$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$.
Do đó $V = \{\mathbf{0}\}$ và V có cơ sở là \emptyset với $\dim V = |\emptyset| = 0$.

b) Cho $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \mid AX = \mathbf{0} \} \leq \mathbf{R}^5$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho W . Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{0}$ với $X = (x,y,z,t,u) \in \mathbf{R}^5$.

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 & 0 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 & 0 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1^* & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1^* & -5 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do : $y, t, u \in \mathbf{R}, x = 5y + 3t - 2u, z = u - 4t$.

$$W = \{ X = (5y + 3t - 2u, y, u - 4t, t, u) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$$

$$= \{ X = y(5, 1, 0, 0, 0) + t(3, 0, -4, 1, 0) + u(-2, 0, 1, 0, 1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$$

$$W = \langle D \rangle \text{ với } D = \{ \delta_1 = (5, 1, 0, 0, 0), \delta_2 = (3, 0, -4, 1, 0), \delta_3 = (-2, 0, 1, 0, 1) \} \subset \mathbf{R}^5$$

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = |D| = 3 =$ số ẩn tự do của hệ.

5.9/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN TỔNG:

a) Vấn đề: Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với S, T là các tập hợp con hữu hạn của \mathbf{R}^n . Ta có $(V + W) \leq \mathbf{R}^n$. Ta tìm một cơ sở cho $V + W$.

b) Giải quyết: Đặt $Z = S \cup T$ thì $V + W = \langle Z \rangle$. Sử dụng (5.6), ta tìm được một cơ sở cho $V + W$ từ tập sinh Z của nó.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha = (5, -2, -5, 4), \beta = (2, 0, -5, 3), \gamma = (-4, 4, -5, 1) \} \subset \mathbf{R}^4, V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4,$
 $T = \{ \delta = (4, -6, 4, 1), \varepsilon = (1, 6, -8, 1) \} \subset \mathbf{R}^4, W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4.$

Tìm một cơ sở cho $V + W$.

Đặt $Z = S \cup T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ thì $V + W = \langle Z \rangle$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -12 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & -15 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -32 & 35 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & -17 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 51 & -33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 2^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 17^* & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V + W$ có cơ sở $E = \{ \lambda = (1,6,-8,1), \mu = (0,2,1,-2), \nu = (0,0,17,-11) \}$

5.10/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN GIAO:

a) Vấn đề: Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \} \subset \mathbf{R}^n$ và $T = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \} \subset \mathbf{R}^n$ ($p \geq q$). Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

b) Giải quyết: Xét $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Ta có

$$\alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V \text{ và } \alpha \in W) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbf{R}, \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_p\alpha_p \text{ và phương trình}$$

$$d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \dots + d_q\beta_q = \alpha \text{ (ẩn số } d_1, d_2, \dots, d_q) \text{ có nghiệm thực.}$$

Ta sẽ thấy c_1, c_2, \dots, c_p bị ràng buộc bởi một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Giải hệ này để chỉ ra các ẩn tự do và mô tả $\alpha \in V \cap W$ theo các ẩn tự do này. Từ đó ta tìm được một tập sinh độc lập tuyến tính (một cơ sở) cho $V \cap W$.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha = (-2,4,3,0), \beta = (4,-1,-2,2), \gamma = (-1,4,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$, $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$,

$T = \{ \delta = (0,5,1,-1), \varepsilon = (1,5,-1,0), \theta = (3,4,1,0) \} \subset \mathbf{R}^4$, $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

$$\text{Ta có } \alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V \text{ và } \alpha \in W) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma \text{ và phương trình } r\delta + s\varepsilon + t\theta = \alpha \text{ (ẩn số } r, s, t) \text{ có nghiệm thực}$$

Phương trình $r(0,5,1,-1) + s(1,5,-1,0) + t(3,4,1,0) = a(-2,4,3,0) + b(4,-1,-2,2) + c(-1,4,1,1)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ -1 & 0 & 0 & 2b+c \\ 5 & 5 & 4 & 4a-b+4c \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & -1 & 1 & 3a+2c \\ 0 & 5 & 4 & 4a+9b+9c \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4 & a+4b+c \\ 0 & 0 & 9 & 19a+9b+19c \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4^* & a+4b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 67a+67c \end{array} \right). \text{ Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow a+c=0 \Leftrightarrow c=-a$$

Vậy $V \cap W = \{ \alpha = a\alpha + b\beta - a\gamma = a(\alpha - \gamma) + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} = \langle Z \rangle$ với

$Z = \{ \lambda = (\alpha - \gamma) = (-1,0,2,-1), \beta = (4,-1,-2,2) \}$ độc lập tuyến tính vì λ không tỉ lệ với β .

Do đó $V \cap W$ có một cơ sở là $Z = \{ \lambda, \beta \}$ và $\dim(V \cap W) = |Z| = 2$.

5.11/ SO SÁNH SỐ VECTOR TRONG MỘT TẬP HỢP ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ TRONG MỘT TẬP SINH VỚI SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ có $\dim W = m$.

a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset W$ thì $|S| \leq m$.

Nếu $(S$ độc lập tuyến tính $\subset W$ và $|S| = m)$ thì S là một cơ sở của W .

- b) Nếu $\langle S \rangle = W$ thì $|S| \geq m$.
 Nếu $(\langle S \rangle = W$ và $|S| = m)$ thì S là một cơ sở của W .
 c) Nếu $(S \subset W$ và $|S| > m)$ thì S phụ thuộc tuyến tính.
 d) Nếu $(S \subset W$ và $|S| < m)$ thì $\langle S \rangle \neq W$.

Ví dụ:

- a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ thì $|S| \leq \dim \mathbf{R}^4 = 4$.
 Nếu $(S$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim \mathbf{R}^4 = 4)$ thì S là một cơ sở của \mathbf{R}^4 .
 b) Nếu $\langle S \rangle = \mathbf{R}^4$ thì $|S| \geq \dim \mathbf{R}^4 = 4$.
 Nếu $(\langle S \rangle = \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim \mathbf{R}^4 = 4)$ thì S là một cơ sở của \mathbf{R}^4 .
 c) Nếu $(S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| > \dim \mathbf{R}^5 = 5)$ thì S phụ thuộc tuyến tính.
 d) Nếu $(S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| < \dim \mathbf{R}^5 = 5)$ thì $\langle S \rangle \neq \mathbf{R}^5$.

5.12/ NHẬN DIỆN CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN VECTOR:

Trong (5.5), ta đã nêu ra cách nhận diện một cơ sở cho không gian \mathbf{R}^n (\mathbf{R}^n được gọi là không gian đầy). Bây giờ ta giới thiệu cách nhận diện cơ sở cho không gian W mà $W < \mathbf{R}^n$ (W được gọi là không gian vơi).

- a) Khi chưa biết $\dim W$: Ta dùng định nghĩa (5.3) nói về cơ sở.
 B là một cơ sở của $W \Leftrightarrow (\langle B \rangle = W$ và B độc lập tuyến tính)
 b) Khi đã biết $\dim W = m$: Ta dùng phần a) của (5.11).
 B là một cơ sở của $W \Leftrightarrow (B \subset W, B$ độc lập tuyến tính và $|B| = \dim W = m)$

Ví dụ: Cho $S = \{\alpha = (-2, 1, 3, 0), \beta = (3, 4, -1, 5)\}, T = \{\gamma = (4, 9, 1, 10), \delta = (9, 1, -10, 5)\} \subset \mathbf{R}^4$
 Đặt $W = \langle S \rangle = \{X = a\alpha + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^4$. Theo (5.11), $\dim W \leq |S| = 2$ nên $W \neq \mathbf{R}^4$, nghĩa là $W < \mathbf{R}^4$. Ta giải thích S và T là các cơ sở của W .
 Giải thích S là một cơ sở của W (chưa biết $\dim W$): Do $\langle S \rangle = W$ và S độc lập tuyến tính (α không tỉ lệ với β) nên S là một cơ sở của W và $\dim W = |S| = 2$.
 Giải thích T là một cơ sở của W (đã biết $\dim W = 2$):

* $T = \{\gamma, \delta\} \subset W = \langle S = \{\alpha, \beta\} \rangle$ vì các phương trình $c_1\alpha + c_2\beta = \gamma$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha + d_2\beta = \delta$ (ẩn là d_1 và d_2) đều có nghiệm thực là $c_1 = 1, c_2 = 2, d_1 = -3, d_2 = 1$
 Các phương trình trên có vế trái như nhau nên có thể giải chung trong một bảng :

$$(\alpha^t \ \beta^t \mid \gamma^t \ \delta^t) = \begin{array}{cc|cc} c_1 & c_2 & & \\ \hline -2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ \hline d_1 & d_2 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} & & & \\ \hline 1^* & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ \hline & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} c_1 & c_2 & & \\ \hline 1^* & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1^* & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d_1 & d_2 & & \end{array}$$

* $T = \{\gamma, \delta\}$ độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ) và $|T| = 2 = \dim W$.

5.13/ ĐỊNH LÝ: Cho $V, W \leq \mathbf{R}^n$.

- a) Nếu $W \leq V$ thì $\dim W \leq \dim V$. Nếu $W < V$ thì $\dim W < \dim V$.
 b) Nếu $(W \leq V$ và $\dim W = \dim V)$ thì $V = W$.

- c) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ nên $\dim(V + W) \leq \dim V + \dim W$
d) Suy ra $\dim(V + W) = \dim V + \dim W \Leftrightarrow \dim(V \cap W) = 0 \Leftrightarrow V \cap W = \{\mathbf{O}\}$.

Ví dụ:

- a) Xét lại **Ví dụ** của (2.5) mục a), b), c) về các không gian giao và không gian tổng.
Thử lại $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$, ta thấy $2 = 1 + 1 - 0$
 $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K)$, ta thấy $3 = 1 + 2 - 0$
 $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$, ta thấy $3 = 2 + 2 - 1$
b) Xét lại **Ví dụ** của (2.6). Do $\{\mathbf{O}\} < W < V < \mathbf{R}^3$ nên
 $\dim\{\mathbf{O}\} = 0 < \dim W = 1 < \dim V = 2 < \dim \mathbf{R}^3 = 3$.
c) Nếu $(W \leq \mathbf{R}^4$ và $\dim W = \dim \mathbf{R}^4 = 4)$ thì $W = \mathbf{R}^4$.

5.14/ HÊ QUẢ: Cho $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^n$ với $m < n$.

Đặt $W = \langle S \rangle$ thì S là một cơ sở của W và $\dim W = |S| = m$ và $W < \mathbf{R}^n$.

Ta có thể thêm $(n - m)$ vector vào S để được một cơ sở B của \mathbf{R}^n và $S \subset B$.

Cách bổ sung: Ta sẽ lấy $(n - m)$ vector từ cơ sở chính tắc $B_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ thêm vào S .

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \text{ và tìm ma trận dạng bậc thang } S_A \text{ của } A. S_A \text{ có } (n - m)$$

cột không bán chuẩn hóa được là các cột thứ i_1, i_2, \dots, i_{n-m} ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m} \leq n$)

Ta thêm $\{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-m}}\}$ vào S để có $B = S \cup \{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_{n-m}}\}$ là một cơ sở của \mathbf{R}^n

Ví dụ: Cho $S = \{\alpha_1 = (3, 1, -2, 5), \alpha_2 = (-2, 0, 4, -3)\}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ ($m = 2 < n = 4$)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2^* & 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ có cột 3 và 4 không bán chuẩn hóa được}$$

Đặt $B = S \cup \{\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ thì B là một cơ sở của \mathbf{R}^4

VI. TOA ĐỘ CỦA VECTOR THEO CƠ SỞ CÓ THỨ TỰ:

Trong mục VI này, ta qui định tất cả các cơ sở (được sử dụng) đều có thứ tự.

6.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$.

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m$ (*).

Muốn tìm c_1, c_2, \dots, c_m , ta phải giải phương trình vector (*) [theo (5.6)].

$$\text{Ta ký hiệu } [\alpha]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \text{ và } [\alpha]_A \text{ gọi là tọa độ của vector } \alpha \text{ theo cơ sở } A$$

b) $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, [c\alpha]_A = c[\alpha]_A$ và $[\alpha \pm \beta]_A = [\alpha]_A \pm [\beta]_A$.

Ví dụ: $W = \mathbf{R}^3$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (1, -2, 2), \alpha_2 = (2, -3, 6), \alpha_3 = (1, 1, 7) \}$ (có thứ tự).

a) Xét $\alpha \in \mathbf{R}^3$ có $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ta có $[-5\alpha]_A = -5[\alpha]_A = -5 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$ và

$$\alpha = 4\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4(1, -2, 2) - (2, -3, 6) + 3(1, 1, 7) = (5, -2, 23).$$

b) Tìm $[\beta]_A$ nếu $\beta = (3, 11, 35) \in \mathbf{R}^3$. Đặt $[\beta]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$,

nghĩa là $c_1(1, -2, 2) + c_2(2, -3, 6) + c_3(1, 1, 7) = (3, 11, 35)$. Ma trận hóa phương trình trên

$$\begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 7 & 35 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 8 & 46 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -5 & -31 \\ 0 & 1^* & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 5 \end{array} \right) \Rightarrow [\beta]_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$c) [\alpha \pm \beta]_A = [\alpha]_A \pm [\beta]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$[-\sqrt{3}\alpha]_A = -\sqrt{3}[\alpha]_A = -\sqrt{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6.2/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có các cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \}$.

Lập ma trận $(A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \quad [\beta_2]_A \quad \dots \quad [\beta_m]_A) \in M_m(\mathbf{R})$.

Ta nói $(A \rightarrow B)$ là *ma trận đổi cơ sở từ A qua B*.

[mỗi vector của cơ sở B (đi sau) được lấy tọa độ theo cơ sở A (đi trước)].

Ví dụ:

a) Không gian W có các cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ thỏa các hệ thức $\beta_1 = \pi\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_3$, $\beta_2 = -2\alpha_1 - (\ln 5)\alpha_3$ và $\beta_3 = 4\alpha_1 + e\alpha_2 - (9/7)\alpha_3$.

$$\text{Ta có } (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \quad [\beta_2]_A \quad [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} \pi & -2 & 4 \\ -1 & 0 & e \\ \sqrt{3} & -\ln 5 & -9/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

b) \mathbf{R}^2 có các cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (-2, 5), \alpha_2 = (1, -3) \}$ và $B = \{ \beta_1 = (-1, 1), \beta_2 = (6, -17) \}$

Ta có $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ và $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2$ bằng cách giải 2 phương trình

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta_1$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 = \beta_2$ (ẩn là d_1 và d_2) có vẻ trái như

nhau trong một bảng :

$$(\alpha_1' \ \alpha_2' | \beta_1' \ | \beta_2') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -2 & 1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -17 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 1^* & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 3 & 4 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{nên } (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \ | \ [\beta_2]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

6.3/ TÍNH CHẤT: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ với $\dim W = m$ và W có các cơ sở A, B, C . Khi đó

a) $(A \rightarrow B)$ là ma trận vuông cấp m khả nghịch và $(A \rightarrow B)^{-1} = (B \rightarrow A)$.

b) $(A \rightarrow A) = I_m$.

c) $(A \rightarrow C) = (A \rightarrow B).(B \rightarrow C)$.

Ví dụ:

a) Cho không gian W có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ và $\dim W = |A| = 3$. Hiển nhiên

$$\alpha_1 = 1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3, \quad \alpha_2 = 0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 \quad \text{và} \quad \alpha_3 = 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3$$

$$\text{nên } (A \rightarrow A) = ([\alpha_1]_A \ | \ [\alpha_2]_A \ | \ [\alpha_3]_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in M_3(\mathbf{R}).$$

b) Cho không gian V có các cơ sở A, B, C và $(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $(B \rightarrow C) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ta có } (B \rightarrow A) = (A \rightarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{và}$$

$$(A \rightarrow C) = (A \rightarrow B).(B \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 23 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}.$$

6.4/ CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ THEO CƠ SỞ:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ có các cơ sở A và B .

Khi đó ta có công thức đổi tọa độ theo cơ sở

$$\forall \alpha \in W, [\alpha]_A = (A \rightarrow B).[\alpha]_B$$

Ví dụ: Không gian W có các cơ sở $A = \{ \alpha, \beta \}$ và $B = \{ \gamma, \delta \}$ thỏa

$$(A \rightarrow B) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad (B \rightarrow A) = (A \rightarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cho $\varepsilon, \theta \in W$ thỏa $[\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $[\theta]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tính $[\varepsilon]_A$ và $[\theta]_B$.

$$\text{Ta có } [\varepsilon]_A = (A \rightarrow B).[\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 57 \end{pmatrix}$$

(nghĩa là $\varepsilon = -6\gamma + 5\delta \Rightarrow \varepsilon = 40\alpha + 57\beta$)

Ta có $[\theta]_B = (B \rightarrow A) \cdot [\theta]_A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -61 \end{pmatrix}$
 (nghĩa là $\theta = 3\alpha - 8\beta \Rightarrow \theta = -25\gamma - 61\delta$)

6.5/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN \mathbf{R}^n :

a) \mathbf{R}^n có cơ sở chính tắc $B_0 = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1) \}$.

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n \Leftrightarrow [\alpha]_{B_0} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha^t.$$

Chẳng hạn $\alpha = (7, -\sqrt{2}, e, -\pi) \in \mathbf{R}^4$ có $[\alpha]_{B_0} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\sqrt{2} \\ e \\ -\pi \end{pmatrix} = \alpha^t.$

b) Giả sử \mathbf{R}^n có các cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \}$.
 Ta muốn viết $L = (A \rightarrow B)$.

Cách 1: (tìm gián tiếp thông qua cơ sở chính tắc B_0)

Viết $H = (B_0 \rightarrow A) = ([\alpha_1]_{B_0} \ [\alpha_2]_{B_0} \ \dots \ [\alpha_n]_{B_0}) = (\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_n) \in M_n(\mathbf{R})$.

$K = (B_0 \rightarrow B) = ([\beta_1]_{B_0} \ [\beta_2]_{B_0} \ \dots \ [\beta_n]_{B_0}) = (\beta'_1 \ \beta'_2 \ \dots \ \beta'_n) \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta có $L = (A \rightarrow B) = (A \rightarrow B_0)(B_0 \rightarrow B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm L dựa vào H^{-1} .

Cách 2: (tìm trực tiếp theo định nghĩa)

Ta có $L = (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ \dots \ [\beta_n]_A)$. Muốn tìm tọa độ của các vector $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ theo cơ sở A , ta phải giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và n ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_n) = H$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n$. Do đó ta có thể giải đồng thời n hệ trên trong cùng một bảng là $(\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_n \mid \beta'_1 \mid \beta'_2 \mid \dots \mid \beta'_n)$, nghĩa là n hệ trên được viết thành dạng ma trận là $(H \mid K)$ và khi giải xong bằng phương pháp Gauss – Jordan, ta thu được $(I_n \mid H^{-1}K)$. Ta có $L = (A \rightarrow B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm $L = H^{-1}K$ mà không cần phải tìm riêng H^{-1} .

Ví dụ: $W = \mathbf{R}^3$ có các cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (-3, 4, 6), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -3, -4) \}$,

$B = \{ \beta_1 = (3, 4, 9), \beta_2 = (2, 1, 2), \beta_3 = (-7, 1, 4) \}$ và cơ sở chính tắc $B_0 = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$
 a) Viết $L = (A \rightarrow B)$.

Cách 1:

$$H = (B_0 \rightarrow A) = (\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \alpha'_3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ có } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ theo sơ đồ sau}$$

$$(\mathbf{H} | \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -6 & -6 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & 3 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 | \mathbf{H}^{-1})$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}) = (\beta_1^t \ \beta_2^t \ \beta_3^t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{L} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Cách 2:

$$(\mathbf{H} | \mathbf{K}) = (\alpha_1^t \ \alpha_2^t \ \alpha_3^t | \beta_1^t | \beta_2^t | \beta_3^t) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow (\mathbf{I}_3 | \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}) \text{ như sau:}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 1 & -1 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -24 & -11 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & -1 & -8 & -3 & 4 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 7 & -5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 13 & 4 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1^* & 21 & 7 & -5 \end{array} \right). \text{ Vậy } \mathbf{L} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Tìm $\alpha \in \mathbf{R}^3$ nếu $[\alpha]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 2(-3, 4, 6) + (0, 1, 1) - 5(2, -3, -4) = (-16, 24, 33).$$

c) Tìm $[\beta]_{\mathbf{A}}$ nếu $\beta = (4, -3, -2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[\beta]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $(\alpha_1^t \ \alpha_2^t \ \alpha_3^t | \beta^t) = (\mathbf{H} | \beta^t) \rightarrow (\mathbf{I}_3 | \mathbf{H}^{-1}\beta^t)$:

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right) & \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1^* & 11 \end{array} \right) \Rightarrow [\beta]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cách 2: dùng công thức đổi tọa độ theo cơ sở.

$$\text{Ta có } [\beta]_{\mathbf{B}_0} = \beta^t = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ và } [\beta]_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_0) [\beta]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{H}^{-1}\beta^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

d) Xét $\gamma \in \mathbf{R}^3$ có $[\gamma]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tính $[\gamma]_A$.

$$\text{Ta có } [\gamma]_A = (A \rightarrow B) [\gamma]_B = L [\gamma]_B = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 \\ 100 \\ 131 \end{pmatrix}.$$

(nghĩa là $\gamma = 6\beta_1 - \beta_3 \Rightarrow \gamma = 79\alpha_1 + 100\alpha_2 + 131\alpha_3$)

6.6/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $W < \mathbf{R}^n$:

Cho $W < \mathbf{R}^n$ (nghĩa là $W \leq \mathbf{R}^n$ và $\dim W = m < n$). Ta có $B_0 = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \} \not\subset W$.

Giả sử W có các cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \}$.

Ta có $L = (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \quad [\beta_2]_A \quad \dots \quad [\beta_m]_A)$. Muốn tìm $[\beta_j]_A$ ($1 \leq j \leq m$), ta phải giải m hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và m ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \dots \quad \alpha'_m)$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m$. Do đó ta có thể giải đồng thời m hệ trên trong cùng một bảng là

$$\left(\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \dots \quad \alpha'_m \mid \beta'_1 \mid \beta'_2 \mid \dots \mid \beta'_m \right).$$

Khi giải xong hệ trên bằng phương pháp Gauss - Jordan, ta xóa bỏ $(n - m)$ dòng tầm thường ở phía dưới và thu được $L = (A \rightarrow B)$ ở các vế bên phải.

Ví dụ: Cho $W \leq \mathbf{R}^4$ nhận $A = \{ \alpha_1 = (-1, 1, 5, 0), \alpha_2 = (2, -5, -4, 1), \alpha_3 = (-3, 0, -2, 4) \}$ và $B = \{ \beta_1 = (-1, 7, 16, -5), \beta_2 = (11, -17, 3, -4), \beta_3 = (-19, 13, 15, 14) \}$ là các cơ sở. Ta có $\dim W = |A| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$ nên $W < \mathbf{R}^4$ và $B_0 = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \} \not\subset W$. Do đó $L = (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \quad [\beta_2]_A \quad [\beta_3]_A)$. Để tìm $[\beta_1]_A, [\beta_2]_A$ và $[\beta_3]_A$, ta giải đồng thời 3 hệ $(\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \alpha'_3 \mid \beta'_1 \mid \beta'_2 \mid \beta'_3)$ (mỗi hệ 3 phương trình, 4 ẩn số):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 & 11 & -19 \\ 1 & -5 & 0 & 7 & -17 & 13 \\ 5 & -4 & -2 & 16 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 3 & 1 & -11 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & -17 & 11 & 58 & -80 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 5 & -3 & -7 & 23 \\ 0 & 1^* & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 23 & 46 & -92 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Xóa dòng cuối tầm thường, từ các cột ở vế bên phải ta có

$$L = (A \rightarrow B) = ([\beta_1]_A \quad [\beta_2]_A \quad [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.7/ NHẬN DIỆN MỘT CƠ SỞ DỰA THEO MỘT CƠ SỞ KHÁC:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$ ($\dim W = m$).

Xét tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \} \subset \mathbf{R}^n$ có $|B| = m$.

a) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$
 thì B cũng là một cơ sở của W . Lúc đó $(A \rightarrow B) = P^t$.

b) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$
 thì B cũng là một cơ sở của W . Lúc đó $(B \rightarrow A) = P^t$.

Ví dụ: Cho $W \leq \mathbf{R}^5$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ ($\dim W = 3$).

Giả sử có các tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ và $C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}$ trong \mathbf{R}^5 thỏa

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 \text{ và } \beta_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

$$\alpha_1 = 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3, \alpha_2 = -\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2\gamma_3 \text{ và } \alpha_3 = -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 4\gamma_3$$

Như vậy

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ với } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có } |P| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \text{ nên } P \text{ khả nghịch.}$$

Do đó B và C đều là các cơ sở của W với

$$(A \rightarrow B) = (C \rightarrow A) = P^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$