CHƯƠNG III

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH TRONG ĐỒ THỊ

Trong chương này, từ " ***đồ thị*** " sẽ được hiểu chung là " ***đồ thị vô hướng hay có hướng*** ".

Nếu chỉ muốn nói riêng cho " ***đồ thị vô hướng*** " hoặc " ***đồ thị có hướng*** " thì ta sẽ nói rõ.

I. BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT CHO ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG:

1.1/ ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ: Cho $G = (V, E)$.

a) Giả sử mỗi cạnh của G được gán với một số thực và ta gọi số thực này là *trọng số* của cạnh tương ứng đã được gán. Lúc này ta nói G là *một đồ thị có trọng số*.

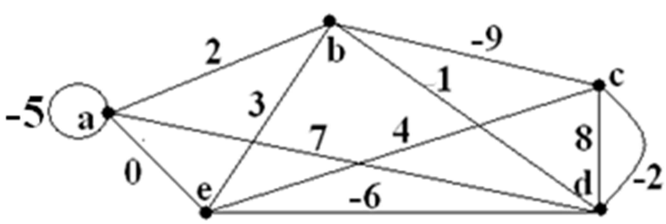
b) Khi G là một đồ thị *có trọng số*, ta gọi tổng trọng số của tất cả các cạnh trong G là trọng số của G. Tương tự, trọng số của một đồ thị con trong G là tổng trọng số của tất cả các cạnh mà đồ thị con đó đi qua.

c) Nếu $H \le G$ và $\varepsilon \in E$, ta ký hiệu $w(H)$, $w(G)$ và $w(\varepsilon)$ lần lượt là trọng số của H, G và ε.

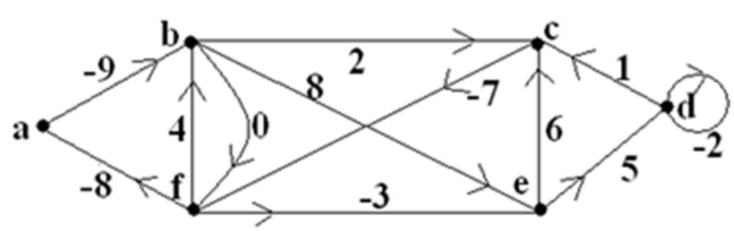
d) Nếu H là một đường (hay chu trình, mạch) thì $w(H)$ gọi là *độ dài* của H.

Nếu H là một chu trình (mạch) có $w(H) < 0$ thì H được gọi là *một mạch âm*.

Ví dụ: Xét các đồ thị G (vô hướng) và K (có hướng) có trọng số như sau:



G



K

$w(G) = -5 + 2 - 9 - 2 - 6 + 0 + 3 + 1 + 7 + 4 + 8 = 3$, $w(\overline{aa}) = -5$ và $w(\overline{ae}) = 0$.

$w(K) = -9 + 2 + 1 - 2 + 5 - 3 - 8 + 4 + 0 + 8 - 7 + 6 = -3$, $w(\overline{ed}) = 5$ và $w(\overline{fa}) = -8$.

G có đường đơn (P): $\overline{abecbd}$ với w(P) = 2 + 3 + 4 – 9 + 1 = 1.

K có mạch sơ cấp âm (C): $\overline{abedcfa}$ với w(C) = – 9 + 8 + 5 + 1 – 7 – 8 = – 10 < 0.

1.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho G = (V, E) là *một đồ thị liên thông có trọng số.*

Trọng số của mỗi cạnh xem như là ‘‘ *độ dài* ’’ của cạnh đó. Xét u, v ∈ V (u ≠ v).

a) Nếu có $\overline{uv}$ ∈ E, đặt d(u, v) = độ dài ngắn nhất của cạnh $\overline{uv}$ (có thể có một hay nhiều cạnh song song đi từ u đến v).

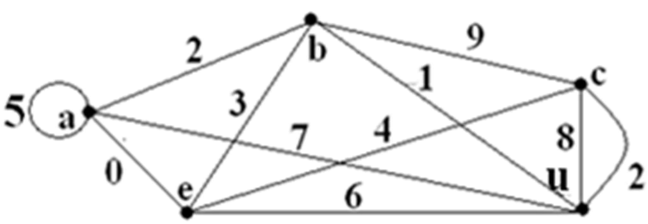
Nếu không có cạnh nối u và v thì d(u, v) = ∞.

b) Nếu có đường trong G nối u với v, đặt d*(u, v) = độ dài của đường ngắn nhất trong G nối u với v (nếu đường ngắn nhất này tồn tại).

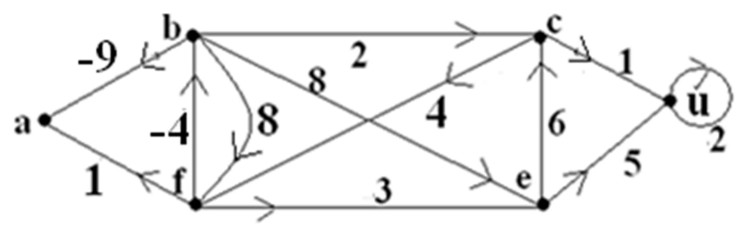
Nếu không có đường ngắn nhất trong G nối u với v thì d*(u, v) = ∞.

c) Nếu có $\overline{uv}$ ∈ E thì d*(u, v) ≤ d(u, v).

<u>Ví dụ:</u> Xét các đồ thị liên thông có trọng số G và H như sau:



G



H

a) Trong G: d(a, b) = 2 (cạnh $\overline{ab}$ có độ dài 2), d(a, c) = ∞ (không có cạnh $\overline{ac}$),

d*(a, c) = 4 (đường ngắn nhất nối a với c là $\overline{aec}$ có độ dài 4),

d*(b, c) = 3 (đường ngắn nhất nối b với c là $\overline{buc}$ có độ dài 3 vì d(u, c) = 2).

b) Trong H: d(b, a) = – 9 (cạnh $\overline{ba}$ có độ dài – 9), d(a, b) = ∞ (không có cạnh $\overline{ab}$),

d(b, f) = 8 (cạnh $\overline{bf}$ có độ dài 8) nhưng d(f, b) = – 4 (cạnh $\overline{fb}$ có độ dài – 4),

d*(f, u) = – 1 (đường ngắn nhất nối f với u là $\overline{fbcu}$ có độ dài – 1),

d*(u, c) = ∞ (không có đường nối u với c) nhưng d*(c,u) = d(c,u) = w($\overline{cu}$) = 1.

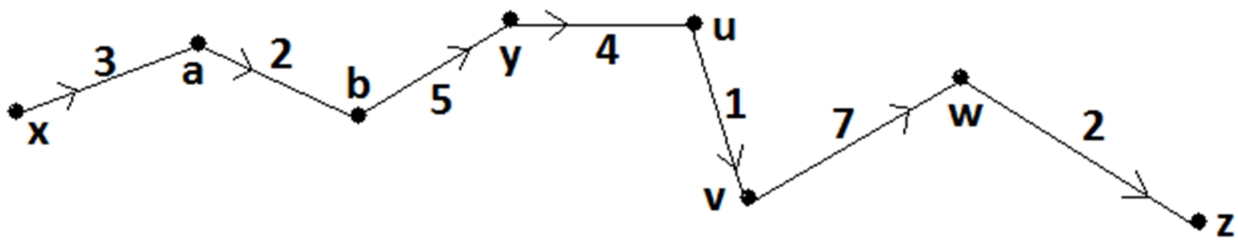
1.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $G = (V, E)$ là *một đồ thị liên thông có trọng số.*

Nếu (P) : $\overline{xu_1u_2...u_kyv_1v_2...v_pz}$ là đường ngắn nhất (có trọng số nhỏ nhất) nối x với z thì

(P_1) : $\overline{xu_1u_2...u_ky}$ và (P_2) : $\overline{yv_1v_2...v_pz}$ lần lượt là ‘‘ đường ngắn nhất nối x với y ’’ và là

‘‘ đường ngắn nhất nối y với z ’’ . Hơn nữa $d^*(x, z) = d^*(x, y) + d^*(y, z)$.

<u>Ví dụ:</u>



Giả sử (P) : $\overline{xabyuvwz}$ là đường ngắn nhất trong $G = (V, E)$ nối x với z. Khi đó

(P_1) : $\overline{xaby}$ và (P_2) : $\overline{yuvwz}$ lần lượt là các đường ngắn nhất trong $G = (V, E)$ nối x với z và nối y với z. Ta có $d^*(x, y) = 3 + 2 + 5 = 10$ và $d^*(y, z) = 4 + 1 + 7 + 2 = 14$.

Suy ra $d^*(x, z) = d^*(x, y) + d^*(y, z) = 10 + 14 = 24$.

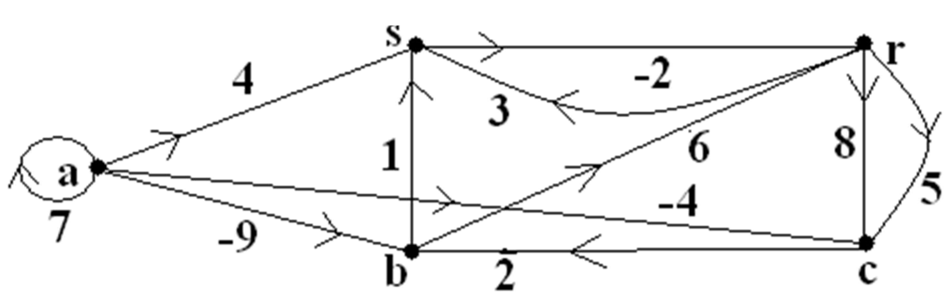
1.4/ <u>MA TRẬN KHOẢNG CÁCH (MA TRẬN TRỌNG SỐ) :</u>

Cho $G = (V, E)$ là *đồ thị liên thông có trọng số* với $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$.

Với $1 \leq i \neq j \leq n$, đặt $d_{ij} = w(\overline{v_iv_j})$ (nếu có $\overline{v_iv_j}$ và chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất),

$d_{ij} = \infty$ (nếu không có $\overline{v_iv_j}$) và $d_{ii} = 0$. Khi đó $D = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ được gọi là *ma trận khoảng cách* (hay *ma trận trọng số*) của G.

<u>Ví dụ:</u> Xét đồ thị có hướng $G = (V, E)$



G

Ma trận khoảng cách của G là

D_G	a	b	c	r	s
a	0*	–9	–4	∞	4
b	∞	0*	∞	6	1
c	∞	2	0*	∞	∞
r	∞	∞	5	0*	3
s	∞	∞	∞	–2	0*

1.5/ THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT DIJKSTRA (1959) :

Cho $G = (V, E)$ là *một đồ thị liên thông có trọng số không âm* và xét đỉnh $a \in V$.

a) Giả thiết thêm cho G trước khi thực hiện thuật toán:

* Khi G *vô hướng*: Ta có thể loại bỏ các vòng. Nếu có nhiều cạnh song song nối 2 đỉnh nào đó, ta chỉ giữ lại cạnh có trọng số nhỏ nhất. Làm như vậy sẽ không ảnh hưởng đến việc tìm đường đi ngắn nhất. Vậy ta có thể coi như G là *đơn đồ thị*.

* Khi G *có hướng*: Ta có thể loại bỏ các vòng. Nếu có nhiều cạnh song song cùng chiều nối 2 đỉnh nào đó, ta chỉ giữ lại cạnh có trọng số nhỏ nhất. Làm như vậy sẽ không ảnh hưởng đến việc tìm đường đi ngắn nhất. Ta còn giả sử thêm từ a, ta có các đường đi đến các đỉnh khác trong G (những giả thiết này đương nhiên xảy ra khi G là *đơn đồ thị liên thông mạnh*).

b) Ý tưởng của thuật toán : Ta muốn tìm *đường đi ngắn nhất* từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong G. Ta sẽ xây dựng *một cây khung* T *có gốc* a trong G dựa theo việc định nghĩa các *hàm* $L_i : V \to [\, 0, +\infty \,]$, các *ánh xạ* $p_i : V \setminus \{a\} \to V$ và các cây $T_i = (V_i , E_i)$ ($1 \le i \le n$ và $n = |V| \ge 2$). Cây T này thể hiện đầy đủ *đường đi ngắn nhất* từ đỉnh a đến các đỉnh khác ở trong G.

c) Ý nghĩa của các hàm $L_i : V \to [\,0, +\infty\,]$, của các ánh xạ $p_i : V \setminus \{a\} \to V$ và của các cây $T_i = (V_i, E_i)$ ($1 \le i \le n$ với $n = |V| \ge 2$): $\forall v \in V \setminus \{a\}$,

$L_i(v)$ là *độ dài của đường tạm thời ở bước thứ* i nối a và v trong G,

$p_i(v)$ là *đỉnh đứng ngay trước đỉnh* v trên đường tạm thời ở bước thứ i .

và $T_i = (V_i, E_i)$ là cây được xây dựng đến bước thứ i.

d) Thuật toán DIJKSTRA: Cho $G = (V, E)$ như đã nói ở a) và $|V| = n \ge 2$.

<u>Bước 1</u> (i = 1): * *Khởi tạo* $T_1 = (\,V_1 = \{\,v_1 = a\,\}, E_1 = \varnothing\,)$ và *gán* $L_1(v_1) = 0$.

* $\forall v \in V \setminus V_1$, *gán* $L_1(v) = d(v_1, v)$ và

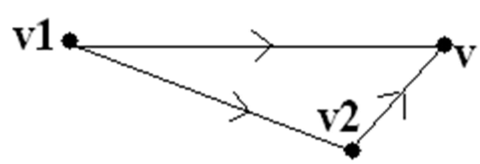
{ [$p_1(v) = v_1$ khi $L_1(v) < \infty$] hoặc [$p_1(v) = -$ (không xác định) khi $L_1(v) = \infty$] }.

* *Chọn* $v_2 \in V \setminus V_1$ thỏa $L_1(v_2) = \min\{\,L_1(v) \mid v \in V \setminus V_1\,\}$. Kể từ đây cột ứng với v_2 không thay đổi.

<u>Bước 2</u> (i = 2): * *Gán* $L_2(v_1) = 0$ và $T_2 = (\,V_2 = \{\,v_1, v_2\,\}, E_2 = \{\,\overline{p_1(v_2)v_2}\,\}\,)$.

* $\forall v \in V \setminus V_2$, ta định nghĩa $L_2(v)$ và $p_2(v)$ như sau:

Nếu $d(v_2, v) = \infty$ hoặc [$d(v_2, v) < \infty$ và $L_1(v) \le L_1(v_2) + d(v_2, v)$] thì $L_2(v) = L_1(v)$ và $p_2(v) = p_1(v)$. Nếu [$d(v_2, v) < \infty$ và $L_1(v) > L_1(v_2) + d(v_2, v)$] thì $L_2(v) = L_1(v_2) + d(v_2, v)$ và $p_2(v) = v_2$.



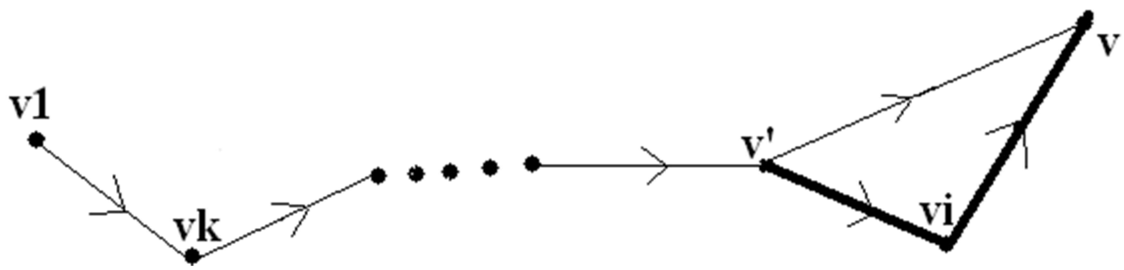
* Nếu $i = 2 = n$ thì thuật toán hoàn thành. Nếu $i = 2 < n$ thì *chọn* $v_3 \in V \setminus V_2$ thỏa $L_2(v_3) = \min\{\,L_2(v) \mid v \in V \setminus V_2\,\}$ và chuyển qua bước $(\,i + 1\,) = 3$. Kể từ đây cột ứng với v_3 không thay đổi.

<u>Bước (i + 1):</u> * Gán $i := (\,i + 1\,)$.

** *Gán* $L_i(v_1) = 0$ và $T_i = (\,V_i = V_{i-1} \cup \{\,v_i\,\}, E_i = E_{i-1} \cup \{\,\overline{p_{i-1}(v_i)v_i}\,\}\,)$.

$\forall v \in V \setminus V_i$, ta định nghĩa $L_i(v)$ và $p_i(v)$ như sau:

Nếu $d(v_i, v) = \infty$ hoặc $[\, d(v_i, v) < \infty$ và $L_{i-1}(v) \le L_{i-1}(v_i) + d(v_i, v)\,]$ thì $L_i(v) = L_{i-1}(v)$ và $p_i(v) = p_{i-1}(v)$. Nếu $[d(v_i, v) < \infty$ và $L_{i-1}(v) > L_{i-1}(v_i) + d(v_i, v)]$ thì $L_i(v) = L_{i-1}(v_i) + d(v_i, v)$ và $p_i(v) = v_i$.



$k \in \{ 2, \ldots, i-1 \}$, $v' = p_{i-1}(v)$ và $[\, p_i(v) = v'$ hoặc $p_i(v) = v_i\,]$

* Nếu $i = n$ thì thuật toán hoàn thành. Nếu $i < n$ thì *chọn* $v_{i+1} \in V \setminus V_i$ thỏa $L_i(v_{i+1}) = \min \{ L_i(v) \mid v \in V \setminus V_i \}$ và chuyển qua bước $(i + 1)$. Kể từ đây cột ứng với v_{i+1} không thay đổi.

Khi thuật toán *đã hoàn thành*, ta đặt

$L(a) = 0$, $L(v) = L_n(v)$ và $p(v) = p_n(v)$, $\forall v \in V \setminus \{a\}$. Ta có $\forall v \in V \setminus \{a\}$, $L(v) = d^*(a, v) =$ *độ dài của đường ngắn nhất* nối từ a đến v trong G và $p(v)$ là *đỉnh đứng ngay trước đỉnh* v trên đường ngắn nhất nối từ a đến v.

Lúc này T là *một cây khung có gốc* a của G. T thể hiện đầy đủ *đường đi ngắn nhất* từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong G.

Lưu ý: T không nhất thiết là một MST của G.

		x	
		⋮	
y	...	$(\infty, -)$	...
		⋮	

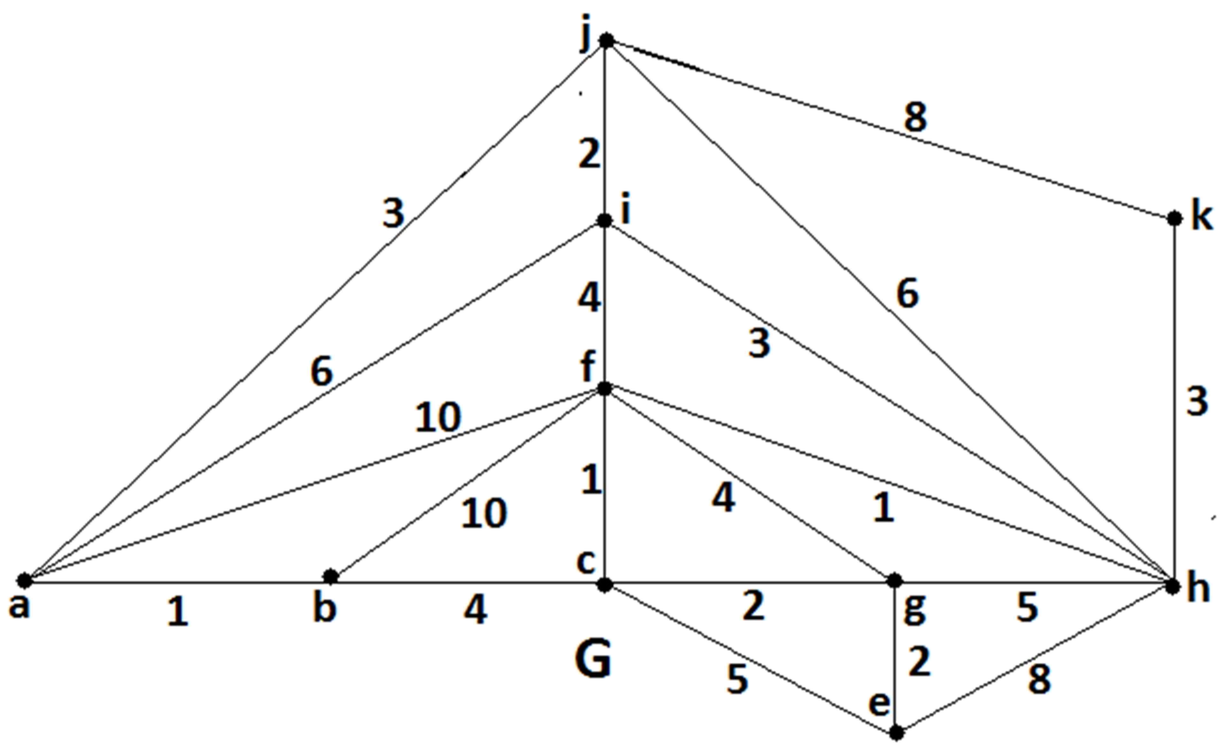
Ý nghĩa : *không có cạnh nối trực tiếp* từ y đến x.

		x	
		⋮	
y	...	(λ,z)	...
		⋮	

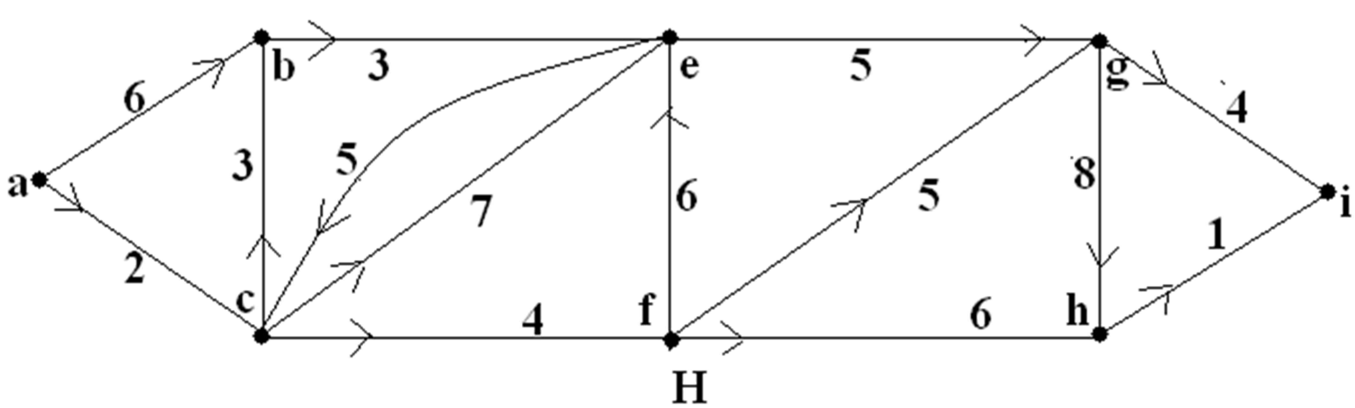
Ý nghĩa : *đường tạm thời ở bước thứ i* nối từ a đến x có độ dài là $L_i(x) = \lambda$

và *đỉnh đứng ngay trước đỉnh* x trên đường tạm thời đó là $p_i(x) = z$.

<u>Ví dụ:</u> Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác của G và H như sau:



G là đơn đồ thị vô hướng, liên thông và có trọng số không âm.



H là đồ thị có hướng, liên thông và có trọng số không âm (H không liên thông mạnh).

a) Các bước biến đổi của thuật toán DIJKSTRA được thể hiện cho H trong bảng dưới đây:

V	b	c	e	f	g	h	i	j	k	T
A	**(1,a)**	(∞,–)	(∞,–)	(10,a)	(∞,–)	(∞,–)	(6,a)	(3,a)	(∞,–)	
B	–	(5,b)	(∞,–)	(10,a)	(∞,–)	(∞,–)	(6,a)	**(3,a)**	(∞,–)	$\overline{ab}$
J	–	**(5,b)**	(∞,–)	(10,a)	(∞,–)	(9, j)	(5,j)	–	(11,j)	$\overline{aj}$
C	–	–	(10,c)	(6,c)	(7,c)	(9, j)	**(5,j)**	–	(11,j)	$\overline{bc}$
I	–	–	(10,c)	**(6,c)**	(7,c)	(8,i)	–	–	(11,j)	$\overline{ji}$
F	–	–	(10,c)	–	**(7,c)**	(7,f)	–	–	(11,j)	$\overline{cf}$
G	–	–	(9,g)	–	–	**(7,f)**	–	–	(11,j)	$\overline{cg}$
H	–	–	**(9,g)**	–	–	–	–	–	(10,h)	$\overline{fh}$
E	–	–	–	–	–	–	–	–	**(10,h)**	$\overline{ge}$
K	(1,a)	(5,b)	(9,g)	(6,c)	(7,c)	(7,f)	(5,j)	(3,a)	(10,h)	$\overline{hk}$

Lưu ý: Ở mỗi cột, ô có ký hiệu – được hiểu là ‘‘ ô này y hệt như ô ở ngay phía trên nó và các ô ở phía dưới ô này cũng vẫn như vậy ”.

Bước 1: $T_1 = (V_1 = \{a\}, E_1 = \varnothing)$. $d(a, c) = d(a, e) = d(a, g) = d(a, h) = d(a, k) = +\infty$ nên $(L_1(c), p_1(c))$, $(L_1(e), p_1(e))$, $(L_1(g), p_1(g))$, $(L_1(h), p_1(h))$ và $(L_1(k), p_1(k))$ đều là $(\infty, -)$.

$d(a,b) = 1$, $d(a,f) = 10$, $d(a,i) = 6$, $d(a,j) = 3$ nên $(L_1(b), p_1(b)) = (\mathbf{1}, \mathbf{a})$, $(L_1(f), p_1(f)) = (\mathbf{10},\mathbf{a})$, $(L_1(i), p_1(i)) = (\mathbf{6},\mathbf{a})$ và $(L_1(j), p_1(j)) = (\mathbf{3}, \mathbf{a})$. Để ý $L_1(\mathbf{b}) = 1 = \min \{ L_1(v) \mid v \in V \setminus V_1 \}$.

Bước 2: $T_2 = (V_2 = V_1 \cup \{ \mathbf{b} \}, E_2 = E_1 \cup \{ \overline{p_1(b)b} = \overline{ab} \})$.

$d(b, e) = d(b, g) = d(b, h) = d(b, i) = d(b, j) = d(b, k) = +\infty$ *nên* $(L_2(e), p_2(e))$, $(L_2(g), p_2(g))$,

$(L_2(h), p_2(h))$, $(L_2(i), p_2(i))$, $(L_2(j), p_2(j))$ và $(L_2(k), p_2(k))$ *y hệt dòng* 1.

$L_1(c) = \infty > L_1(b) + d(b, c) = 1 + 4 = 5$ *nên có* $(L_2(c), p_2(c)) = (\mathbf{5}, \mathbf{b})$.

$L_1(f) = 10 \le L_1(b) + d(b, f) = 1 + 10 = 11$ *nên* $(L_2(f), p_2(f))$ *y hệt dòng* 1.

Để ý $L_2(\mathbf{j}) = 3 = \min \{ L_2(v) \mid v \in V \setminus V_2 \}$.

Bước 3: $T_3 = (V_3 = V_2 \cup \{ \mathbf{j} \}, E_3 = E_2 \cup \{ \overline{p_2(j)j} = \overline{aj} \})$. $d(j,c) = d(j,e) = d(j,f) = d(j,g) = +\infty$

nên $(L_3(c), p_3(c))$, $(L_3(e), p_3(e))$, $(L_3(f), p_3(f))$ và $(L_3(g), p_3(g))$ *y hệt dòng* 2.

$L_2(h) = \infty > L_2(j) + d(j, h) = 3 + 6 = 9$ *nên có* $(L_3(h), p_3(h)) = (\mathbf{9}, \mathbf{j})$.

$L_2(i) = 6 > L_2(j) + d(j, i) = 3 + 2 = 5$ *nên có* $(L_3(i), p_3(i)) = (\mathbf{5}, \mathbf{j})$.

$L_2(k) = \infty > L_2(j) + d(j, k) = 3 + 8 = 11$ *nên có* $(L_3(k), p_3(k)) = (\mathbf{11}, \mathbf{j})$.

Để ý $L_3(\mathbf{c}) = 5 = \min \{ L_3(v) \mid v \in V \setminus V_3 \}$.

Bước 4: $T_4 = (V_4 = V_3 \cup \{ \mathbf{c} \}, E_4 = E_3 \cup \{ \overline{p_3(c)c} = \overline{bc} \})$. $d(c, h) = d(c, i) = d(c, k) = +\infty$

nên $(L_4(h), p_4(h))$, $(L_4(i), p_4(i))$ và $(L_4(k), p_4(k))$ *y hệt dòng* 3.

$L_3(e) = \infty > L_3(c) + d(c, e) = 5 + 5 = 10$ *nên có* $(L_4(e), p_4(e)) = (\mathbf{10}, \mathbf{c})$.

$L_3(f) = 10 > L_3(c) + d(c, f) = 5 + 1 = 6$ *nên có* $(L_4(f), p_4(f)) = (\mathbf{6}, \mathbf{c})$.

$L_3(g) = \infty > L_3(c) + d(c, g) = 5 + 2 = 7$ *nên có* $(L_4(g), p_4(g)) = (\mathbf{7}, \mathbf{c})$.

Để ý $L_4(\mathbf{i}) = 5 = \min \{ L_4(v) \mid v \in V \setminus V_4 \}$.

Bước 5: $T_5 = (V_5 = V_4 \cup \{ \mathbf{i} \}, E_5 = E_4 \cup \{ \overline{p_4(i)i} = \overline{ji} \})$. $d(i, e) = d(i, g) = d(i, k) = +\infty$

nên $(L_5(e), p_5(e))$, $(L_5(g), p_5(g))$ và $(L_5(k), p_5(k))$ *y hệt dòng* 4.

$L_4(f) = 6 \le L_4(i) + d(i, f) = 5 + 4 = 9$ *nên* $(L_5(f), p_5(f))$ *y hệt dòng* 4.

$L_4(h) = 9 > L_4(i) + d(i, h) = 5 + 3 = 8$ *nên có* $(L_5(h), p_5(h)) = (\mathbf{8}, \mathbf{i})$.

Để ý $L_5(\mathbf{f}) = 6 = \min \{ L_5(v) \mid v \in V \setminus V_5 \}$.

Bước 6 : $T_6 = (V_6 = V_5 \cup \{ \mathbf{f} \}, E_6 = E_5 \cup \{ \overline{p_5(f)f} = \overline{cf} \})$.

$d(f, e) = d(f, k) = +\infty$ *nên* $(L_6(e), p_6(e))$ và $(L_6(k), p_6(k))$ *y hệt dòng* 5.

$L_5(g) = 7 \le L_5(f) + d(f, g) = 6 + 4 = 10$ *nên* $(L_6(g), p_6(g))$ *y hệt dòng* 5.

$L_5(h) = 8 > L_5(f) + d(f, h) = 6 + 1 = 7$ *nên có* $(L_6(h), p_6(h)) = (\mathbf{7}, \mathbf{f})$.

Để ý $L_6(\mathbf{g}) = 7 = \min \{ L_6(v) \mid v \in V \setminus V_6 \}$.

Bước 7: $T_7 = (V_7 = V_6 \cup \{ \mathbf{g} \}, E_7 = E_6 \cup \{ \overline{p_6(g)g} = \overline{cg} \})$.

$d(g, k) = +\infty$ *nên* $(L_7(k), p_7(k))$ *y hệt dòng* 6.

$L_6(h) = 7 \le L_6(g) + d(g, h) = 7 + 5 = 12$ *nên* $(L_7(h), p_7(h))$ *y hệt dòng* 6.

$L_6(e) = 10 > L_6(g) + d(g, h) = 7 + 2 = 9$ *nên có* $(L_7(e), p_7(e)) = (\mathbf{9}, \mathbf{g})$.

Để ý $L_7(\mathbf{h}) = 7 = \min \{ L_7(v) \mid v \in V \setminus V_7 \}$.

Bước 8: $T_8 = (V_8 = V_7 \cup \{ \mathbf{h} \}, E_8 = E_7 \cup \{ \overline{p_7(h)h} = \overline{fh} \})$:

$L_7(e) = 9 \le L_7(h) + d(h, e) = 7 + 8 = 15$ *nên* $(L_8(e), p_8(e))$ *y hệt dòng* 7.

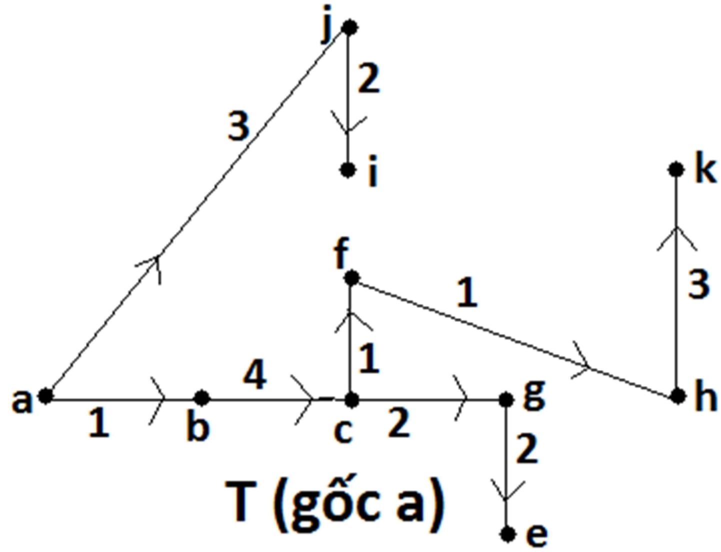
$L_7(k) = 11 > L_7(h) + d(h, k) = 7 + 3 = 10$ *nên có* $(L_8(k), p_8(k)) = (\mathbf{10}, \mathbf{h})$.

Để ý $L_8(\mathbf{e}) = 9 = \min \{ L_8(v) \mid v \in V \setminus V_8 \}$.

Bước 9: $T_9 = (V_9 = V_8 \cup \{ \mathbf{e} \}, E_9 = E_8 \cup \{ \overline{p_8(e)e} = \overline{ge} \})$.

$L_8(e,k) = +\infty$ *nên* $(L_9(k), p_9(k))$ *y hệt dòng* 8. Để ý $L_9(\mathbf{k}) = 10 = \min \{ L_9(v) \mid v \in V \setminus V_9 \}$.

Bước 10: $T_{10} = (V_{10} = V_9 \cup \{ \mathbf{k} \}, E_{10} = E_9 \cup \{ \overline{p_9(k)k} = \overline{hk} \})$. Dòng 10 *y hệt dòng* 9.



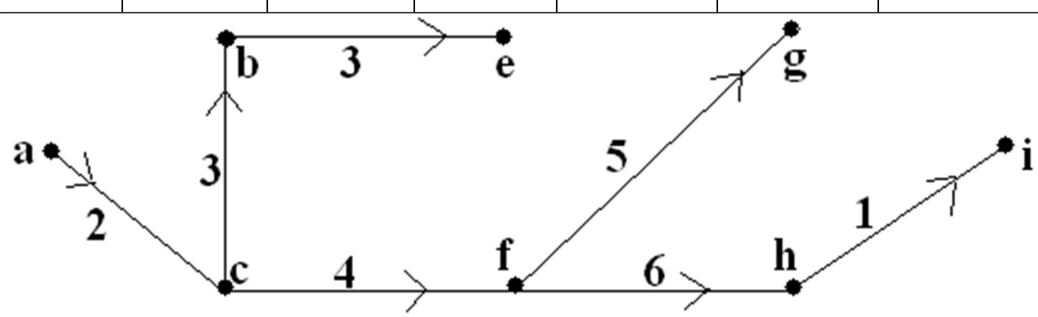
Thuật toán *kết thúc* với cây $T = T_{10}$ (vì $n = 10$).

$w(T) = 1 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 19$.

Cây T gốc a thể hiện đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác trong G.

b) Các bước biến đổi của thuật toán DIJKSTRA được thể hiện cho H trong bảng dưới đây:

V'	**b**	**c**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**T'**
a	(6,a)	**(2,a)***	(∞,–)	(∞,–)	(∞,–)	(∞,–)	(∞,–)	
c	**(5,c)***	–	(9,c)	(6,c)	(∞,–)	(∞,–)	(∞,–)	$\overline{ac}$
b	–	–	(8,b)	**(6,c)***	(∞,–)	(∞,–)	(∞,–)	$\overline{cb}$
f	–	–	**(8,b)***	–	(11,f)	(12,f)	(∞,–)	$\overline{cf}$
e	–	–	–	–	**(11,f)***	(12,f)	(∞,–)	$\overline{be}$
g	–	–	–	–	–	**(12,f)***	(15,g)	$\overline{fg}$
h	–	–	–	–	–	–	**(13,h)***	$\overline{fh}$
i	(5,c)	(2,a)	(8,b)	(6,c)	(11,f)	(12,f)	(13,h)	$\overline{hi}$



T' (gốc a)

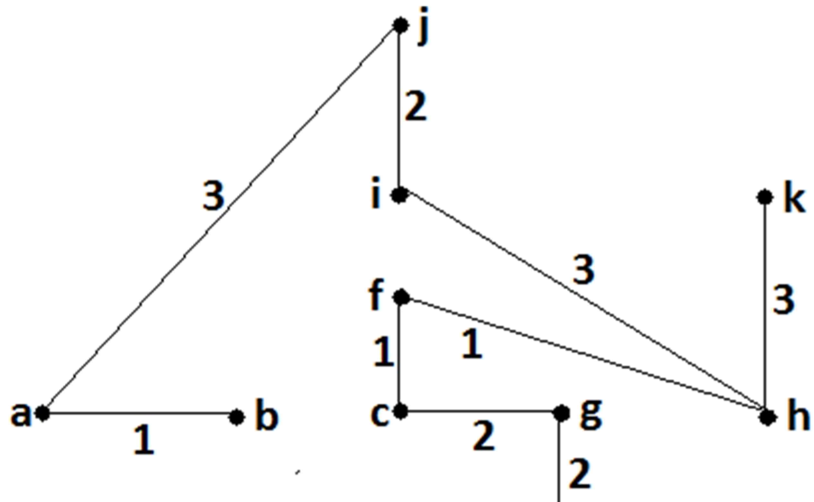
Các bước biến đổi (từ **Bước 1** đến **Bước 8**) được thực hiện tương tự như đồ thị G.

Thuật toán *kết thúc* với cây T' = T_8' (vì n = 8).

w(T') = 2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 6 + 1 = 24.

Cây T’ gốc a thể hiện đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác trong H.

c) Nếu dùng thuật toán KRUSKAL, ta xây dựng được một MST của G là Z như sau:



MST Z

w(Z) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 18.

w(Z) = 18 < w(T) = 19 nên T không phải là một MST của G.

1.6/ <u>THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT FORD - BELLMAN :</u>

Cho G = (V, E) là *một đồ thị liên thông* có *trọng số thực* với $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$.

Chọn đỉnh $a \in V$.

Nếu G *vô hướng* và *có cạnh* $\overline{bc}$ *nào đó có trọng số âm* thì bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong G đi từ a đến c là *vô nghiệm* (do G liên thông, ta chọn được một đường đi (P) từ a đến b trong G. Xét đường (P_k) : $\overline{bcbc...bc}$ (bc lặp lại k lần với $k \in \mathbf{N^*}$) trong G. Khi đó đường $(P) \cup (P_k)$ đi từ a đến b có trọng số $\to -\infty$ khi $k \to +\infty$).

Xét G *có hướng* và giả sử từ a có đường đi đến các đỉnh khác trong G. Nếu G *có một mạch âm* (C) *nào đó đi từ đỉnh* b *đến* b thì bài toán tìm đường đi ngắn nhất nhất trong G đi từ a đến b là *vô nghiệm* (Ta có đường đi (P) từ a đến b trong G. Khi đó đường $(P) \cup (C) \cup (C) \cup \ldots \cup (C)$ [(C) lặp lại k lần với $k \in \mathbf{N^*}$] đi từ a đến b có trọng số $\to -\infty$ khi $k \to +\infty$). Nếu G không có mạch âm nào (vẫn có thể có cạnh có trọng số âm) thì ta có đường đi ngắn nhất đi từ a đến các đỉnh khác của G.

Như vậy ta chỉ quan tâm *bài toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh* a *đến các đỉnh khác* trong đồ thị G *liên thông*, *có hướng* và *có trọng số thực* với giả thiết trong G có các đường đi từ a đến các đỉnh khác.

Ta *loại bỏ các vòng có trọng số âm* (chúng cũng là *các mạch âm*) vì lúc này bài toán *vô nghiệm.* Ta cũng loại bỏ *các vòng có trọng số không âm*. Nếu có nhiều cạnh song song cùng chiều nối hai đỉnh nào đó thì ta chỉ *giữ lại cạnh có trọng số nhỏ nhất*. Làm như vậy sẽ không ảnh hưởng đến kết quả của việc tìm đường đi ngắn nhất.

Những giả thiết đã nêu trên sẽ được thỏa ngay khi G là *đơn đồ thị liên thông mạnh*. Nếu G có cạnh mang trọng số âm thì thuật toán DIJKSTRA không thể sử dụng để tìm các đường đi ngắn nhất từ a. Ta dùng thuật toán FORD – BELLMAN hữu hiệu hơn để tìm các đường đi ngắn nhất từ a hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm (chu trình có trọng số âm) để khẳng định bài toán vô nghiệm . Thuật toán FORD – BELLMAN vẫn có hiệu lực trong trường hợp G có trọng số các cạnh đều không âm (có thể dùng thay cho thuật toán DIJKSTRA).

a) Ý tưởng của thuật toán : Ta muốn tìm *đường đi ngắn nhất* từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong G dựa theo việc định nghĩa các *hàm* $L_i : V \to [\, 0, +\infty \,]$ và các *ánh xạ* $p_i : V \setminus \{a\} \to V$ ($1 \le i \le n$ và $n = |V| \ge 2$). Nếu đường đi ngắn nhất tồn tại thì ta xây dựng được một cây T có gốc a trong G.

b) Ý nghĩa của các hàm $L_i : V \to [\, 0, +\infty \,]$ và các ánh xạ $p_i : V \setminus \{a\} \to V$ ($1 \le i \le n$) với $n = |V| \ge 2$): $\forall v \in V \setminus \{a\}$, $L_i(v)$ là *độ dài của đường tạm thời ở bước thứ i* nối a và v trong G và $p_i(v)$ là *đỉnh ở ngay trước đỉnh* v trên đường tạm thời đó.

c) Thuật toán FORD - BELLMAN: Cho $G = (V, E)$ đã nói như trên và $|V| = n \ge 2$.

<u>Bước 1</u> (i = 1):

- *Gán* $L_1(v_1) = 0$.
- $\forall v \in V \setminus \{ v_1 \}$, *gán* $L_1(v) = d(v_1, v)$ và

{ $p_1(v) = v_1$ [nếu $L_1(v) < \infty$] hoặc $p_1(v) = -$ (không xác định) [nếu $L_1(v) = \infty$] }.

Bước 2 (i = 2):

- *Gán* $L_2(v_1) = 0$.
- $\forall v \in V \setminus \{ v_1 \}$, *chọn* $w_{2v} \in \Gamma^{-1}(v)$ thỏa

  $\min \{ L_1(u) + d(u, v) \mid u \in \Gamma^{-1}(v) \} = L_1(w_{2v}) + d(w_{2v}, v)$ rồi *gán*

  $L_2(v) = L_1(w_{2v}) + d(w_{2v}, v)$ và $p_2(v) = w_{2v}$.
- Nếu $L_2(v) = L_1(v), \forall v \in V$ thì $L_2(v)$ ổn định, $\forall v \in V$: thuật toán hoàn thành và ta có đường ngắn nhất đi từ a đến các đỉnh khác của G.
- Nếu $\exists v \in V, L_2(v) \neq L_1(v)$ thì có 2 khả năng : khi $i = 2 = n$ thì G có mạch âm và bài toán vô nghiệm, khi $i = 2 < n$ thì chuyển qua bước (i + 1).

Bước (i + 1): Gán $i := (i + 1)$.

- *Gán* $L_i(v_1) = 0$.
- $\forall v \in V \setminus \{ v_1 \}$, *chọn* $w_{iv} \in \Gamma^{-1}(v)$ thỏa

  $\min \{ L_{i-1}(u) + d(u, v) \mid u \in \Gamma^{-1}(v) \} = L_{i-1}(w_{iv}) + d(w_{iv}, v)$ rồi *gán*

  $L_i(v) = L_{i-1}(w_{iv}) + d(w_{iv}, v)$ và $p_i(v) = w_{iv}$.
- Nếu $L_i(v) = L_{i-1}(v), \forall v \in V$ thì $L_i(v)$ đã ổn định, $\forall v \in V$: thuật toán hoàn thành và ta có đường ngắn nhất đi từ a đến các đỉnh khác của G.
- Nếu $\exists v \in V, L_i(v) \neq L_{i-1}(v)$ thì có 2 khả năng : khi $i = n$ thì G có mạch âm và bài toán vô nghiệm, khi $i < n$ thì chuyển qua bước (i + 1).

Khi thuật toán *đã hoàn thành* ($\exists i \in \{ 2, \ldots ,n \}$ để $L_i(v) = L_{i-1}(v), \forall v \in V$), ta đặt $L(a) = 0, L(v) = L_i(v)$ và $p(v) = p_i(v), \forall v \in V \setminus \{a\}$.

Ta có $\forall v \in V \setminus \{a\}, L(v) = d^*(a, v) =$ *độ dài của đường ngắn nhất* nối từ a đến v trong G và p(v) là *đỉnh ở ngay trước đỉnh* v trên đường ngắn nhất nối từ a đến v. Lúc này ta có *một cây* T *có gốc* a của G. Cây T này thể hiện đầy đủ *đường đi ngắn* *nhất* từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong G.

		x	
		⋮	
y	...	(∞,–)	...
		⋮	

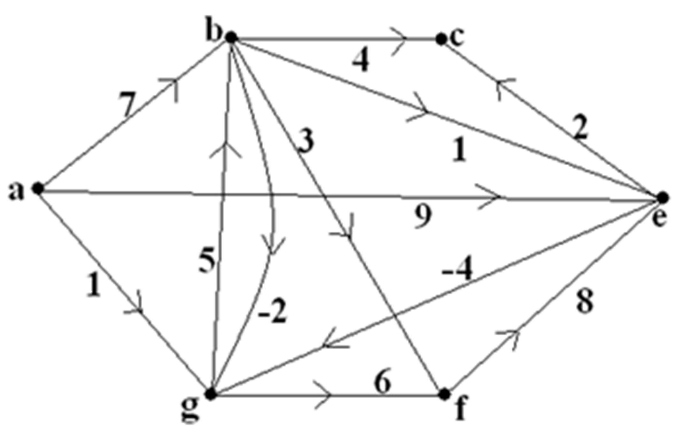
Ý nghĩa : *không có cạnh nối trực tiếp* từ y đến x.

		x	
		⋮	
y	...	(λ,z)	...
		⋮	

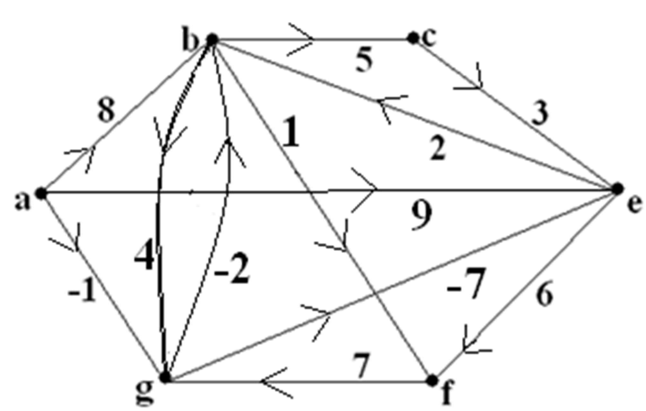
Ý nghĩa : *đường tạm thời ở bước thứ i* nối từ a đến x có độ dài là $L_i(x) = \lambda$

và *đỉnh đứng ngay trước đỉnh* x trên đường tạm thời đó là $p_i(x) = z$.

<u>Ví dụ:</u> Hãy tìm các đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác của các đồ thị G và H có hướng và có trọng số như sau :



G



H

a) Các bước biến đổi của thuật toán FORD – BELLMAN được thể hiện cho G trong bảng dưới đây:

i	a	b	c	e	f	g
Bước 1	**0**	(7,a)	(∞,–)	(9,a)	(∞,–)	(1,a)
Bước 2	0	(6,g)	(11,b)	(8,b)	(7,g)	(1,a)
Bước 3	0	(6,g)	(10,b)	(7,b)	(7,g)	(1,a)
Bước 4	0	(6,g)	(9,e)	(7,b)	(7,g)	(1,a)
Bước 5	0	(6,g)	(9,e)	(7,b)	(7,g)	(1,a)

Bước 1: $L_1(a) = 0$, $(L_1(b), p_1(b)) = (\mathbf{7},\mathbf{a})$, $(L_1(c), p_1(c)) = (\infty, -)$, $(L_1(e), p_1(e)) = (\mathbf{9},\mathbf{a})$,

$(L_1(f), p_1(f)) = (\infty, -)$ và $(L_1(e), p_1(e)) = (\mathbf{1}, \mathbf{a})$.

Bước 2: $L_2(a) = 0$.

$L_2(b) = \min\{ L_1(v) + d(v, b) \mid v \in \Gamma^{-1}(b) = \{ a, \mathbf{g} \}\} = L_1(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, b) = 6$ và $p_2(b) = \mathbf{g}$.

$L_2(c) = \min\{ L_1(v) + d(v, c) \mid v \in \Gamma^{-1}(c) = \{ \mathbf{b}, e \}\} = L_1(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, c) = 11$ và $p_2(c) = \mathbf{b}$.

$L_2(e) = \min\{ L_1(v) + d(v, e) \mid v \in \Gamma^{-1}(e) = \{a, \mathbf{b}, f \}\} = L_1(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, e) = 8$ và $p_2(e) = \mathbf{b}$.

$L_2(f) = \min\{ L_1(v) + d(v, f) \mid v \in \Gamma^{-1}(f) = \{ b, \mathbf{g} \}\} = L_1(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, f) = 7$ và $p_2(f) = \mathbf{g}$.

$L_2(g) = \min\{ L_1(v) + d(v, g) \mid v \in \Gamma^{-1}(g) = \{\mathbf{a}, b, e\}\} = L_1(\mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, g) = 1$ và $p_2(g) = \mathbf{a}$.

Bước 3: $L_3(a) = 0$.

$L_3(b) = \min\{ L_2(v) + d(v, b) \mid v \in \Gamma^{-1}(b) = \{ a, \mathbf{g} \}\} = L_2(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, b) = 6$ và $p_3(b) = \mathbf{g}$.

$L_3(c) = \min\{ L_2(v) + d(v, c) \mid v \in \Gamma^{-1}(c) = \{ \mathbf{b}, e \}\} = L_2(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, c) = 10$ và $p_3(c) = \mathbf{b}$.

$L_3(e) = \min\{ L_2(v) + d(v, e) \mid v \in \Gamma^{-1}(e) = \{ a, \mathbf{b}, f \}\} = L_2(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, e) = 7$ và $p_3(e) = \mathbf{b}$.

$L_3(f) = \min\{ L_2(v) + d(v, f) \mid v \in \Gamma^{-1}(f) = \{ b, \mathbf{g} \}\} = L_2(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, f) = 7$ và $p_3(f) = \mathbf{g}$.

$L_3(g) = \min\{ L_2(v) + d(v, g) \mid v \in \Gamma^{-1}(g) = \{\mathbf{a}, b, e\}\} = L_2(\mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, g) = 1$ và $p_3(g) = \mathbf{a}$.

Bước 4: $L_4(a) = 0$.

$L_4(b) = \min\{ L_3(v) + d(v, b) \mid v \in \Gamma^{-1}(b) = \{ a, \mathbf{g} \}\} = L_3(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, b) = 6$ và $p_4(b) = \mathbf{g}$.

$L_4(c) = \min\{ L_3(v) + d(v, c) \mid v \in \Gamma^{-1}(c) = \{ b, \mathbf{e} \}\} = L_3(\mathbf{e}) + d(\mathbf{e}, c) = 9$ và $p_4(c) = \mathbf{e}$.

$L_4(e) = \min\{ L_3(v) + d(v, e) \mid v \in \Gamma^{-1}(e) = \{ a, \mathbf{b}, f \}\} = L_3(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, e) = 7$ và $p_4(e) = \mathbf{b}$.

$L_4(f) = \min\{ L_3(v) + d(v, f) \mid v \in \Gamma^{-1}(f) = \{ b, \mathbf{g} \}\} = L_3(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, f) = 7$ và $p_4(f) = \mathbf{g}$.

$L_4(g) = \min\{ L_3(v) + d(v, g) \mid v \in \Gamma^{-1}(g) = \{\mathbf{a}, b, e\}\} = L_3(\mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, g) = 1$ và $p_4(g) = \mathbf{a}$.

Bước 5: $L_4(a) = 0$.

$L_5(b) = \min\{ L_4(v) + d(v, b) \mid v \in \Gamma^{-1}(b) = \{ a, \mathbf{g} \}\} = L_4(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g}, b) = 6$ và $p_5(b) = \mathbf{g}$.

$L_5(c) = \min\{ L_4(v) + d(v, c) \mid v \in \Gamma^{-1}(c) = \{ b, \mathbf{e} \}\} = L_4(\mathbf{e}) + d(\mathbf{e},c) = 9$ và $p_5(c) = \mathbf{e}$.

$L_5(e) = \min\{ L_4(v) + d(v, e) \mid v \in \Gamma^{-1}(e) = \{ a, \mathbf{b}, f \}\} = L_4(\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},e) = 7$ và $p_5(e) = \mathbf{b}$.

$L_5(f) = \min\{ L_4(v) + d(v, f) \mid v \in \Gamma^{-1}(f) = \{ b, \mathbf{g} \}\} = L_4(\mathbf{g}) + d(\mathbf{g},f) = 7$ và $p_5(f) = \mathbf{g}$.

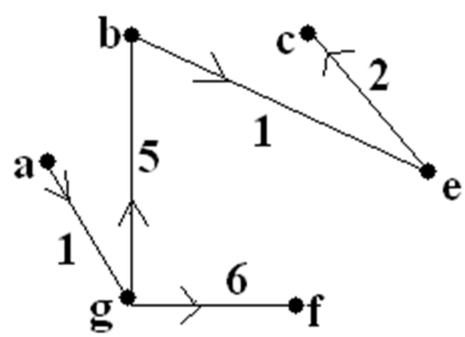
$L_5(g) = \min\{ L_4(v) + d(v, g) \mid v \in \Gamma^{-1}(g) = \{\mathbf{a}, b, e\}\} = L_4(\mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, g) = 1$ và $p_5(g) = \mathbf{a}$.

Ta thấy $L_5(v) = L_4(v), \forall v \in V$ nên $L_5(v)$ đã ổn định và thuật toán hoàn thành.

Vậy $L(v) = L_5(v), \forall v \in V$ và $p(v) = p_5(v), \forall v \in V \setminus \{a\}$.

Nhìn dòng cuối của bảng, ta có được các đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác trong G tạo từ các cạnh $\overline{gb}$, $\overline{ec}$, $\overline{be}$, $\overline{gf}$ và $\overline{ag}$.

Các đường đi này tạo thành một cây T gốc a trong G như sau:



T

$w(T) = 1 + 5 + 6 + 1 + 2 = 15$.

b) Cách 1: H có mạch âm $\overline{bgeb}$ với trọng số $-1 < 0$ nên bài toán vô nghiệm.

Cách 2: Các bước biến đổi của thuật toán FORD – BELLMAN được thể hiện cho H trong bảng dưới đây:

i	a	b	c	e	f	g
Bước 1	**0**	(8,a)	(∞,–)	(9,a)	(∞,–)	(–1,a)
Bước 2	0	(–3,g)	(13,b)	(–8,g)	(9,b)	(–1,a)
Bước 3	0	(–6,e)	(2,b)	(–8,g)	(–2,b)	(–1,a)
Bước 4	0	(–6,e)	(–1,b)	(–8,g)	(–5,b)	(–2,b)
Bước 5	0	(–6,e)	(–1,b)	(–9,g)	(–5,b)	(–2,b)
Bước 6	0	(–7,e)	(–1,b)	(–9,g)	(–5,b)	(–2,b)

Các bước biến đổi (từ **Bước 1** đến **Bước 6**) được thực hiện tương tự như đồ thị G.

Ta thấy $L_6(b) = -7 \neq L_5(b) = -6$ nên $L_6(v)$ chưa ổn định và bài toán vô nghiệm.

II. <u>ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH EULER TRONG ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG:</u>

2.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho G = (V, E) *liên thông*.

a) *Đường Euler* (P) trong G là một đường *không khép kín* đi qua *tất cả các cạnh* của G và chỉ qua mỗi cạnh *đúng một lần*.

b) *Chu trình Euler* (C) trong G là một chu trình đi qua *tất cả các cạnh* của G và chỉ qua mỗi cạnh *đúng một lần*.

c) G được gọi là *đồ thị Euler* nếu G có chu trình Euler.

d) Nếu G có chu trình Euler thì đương nhiên G không có đường Euler và ngược lại. Có những đồ thị không có cả đường Euler lẫn chu trình Euler.

2.2/ <u>ĐỊNH LÝ EULER 1:</u> Cho $G = (V, E)$ *vô hướng* và *liên thông*.

a) G *có chu trình Euler* $\Leftrightarrow$ Mọi đỉnh của G có *bậc chẵn*.

b) G *không có chu trình Euler* $\Leftrightarrow$ G có ít nhất *một đỉnh bậc lẻ*.

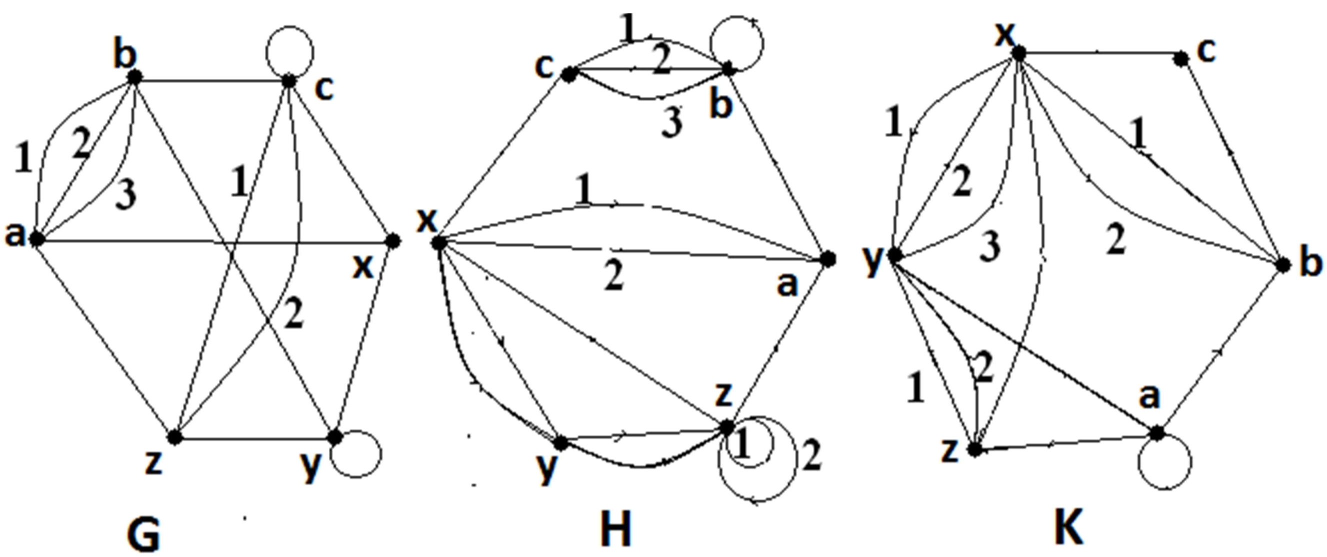
c) G *có đường Euler* $\Leftrightarrow$ G có đúng *hai đỉnh bậc lẻ*.

(đường Euler của G sẽ *nối hai đỉnh bậc lẻ* này với nhau)

d) G *không có đường Euler* $\Leftrightarrow$ Số đỉnh bậc lẻ của G *khác* 2.

e) G *không có chu trình Euler lẫn đường Euler* $\Leftrightarrow$ (Số đỉnh bậc lẻ của G) ≥ 4.

<u>Ví dụ:</u> Xét các đồ thị vô hướng liên thông G, H và K.



G có 4 đỉnh bậc lẻ là a, b, x và y nên G không có chu trình và đường Euler.

H có mọi đỉnh bậc chẵn nên H có chu trình Euler (C) : $\overline{ab^2cbcxyz^3axyzxa}$.

K có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là a và x nên K có đường Euler (P) : $\overline{abcxyxyzya^2zxbx}$.

2.3/ <u>ĐỊNH LÝ EULER 2:</u> Cho $G = (V, E)$ *có hướng* và *liên thông*.

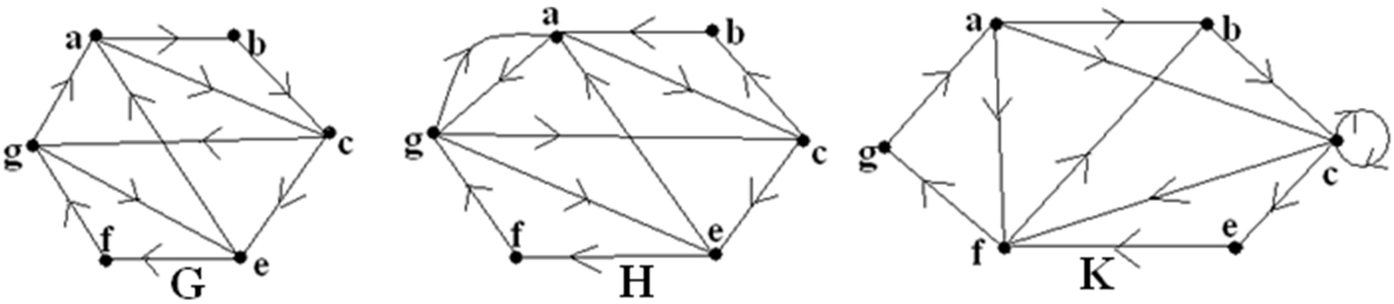
a) G *có chu trình Euler* $\Leftrightarrow$ Mọi đỉnh của G *cân bằng* [$\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v)$].

b) G *có đường Euler* $\Leftrightarrow$ G có *hai đỉnh* a và b thỏa $d^+(a) = d^-(a) + 1$,

$d^+(b) = d^-(b) - 1$ và các đỉnh còn lại đều cân bằng.

(a và b là *hai đỉnh bậc lẻ duy nhất* của G. Đường Euler của G *đi từ* a *đến* b)

<u>Ví dụ:</u> Xét các đồ thị *có hướng*, *liên thông* G, H và K.



G có mọi đỉnh cân bằng nên G có chu trình Euler (C): $\overline{abcefgeacga}$.

H có $d^+(g) = d^-(g) + 1 = 3$, $d^+(a) = d^-(a) - 1 = 2$ và $\forall v \in V \setminus \{a, b\}$, $d^+(v) = d^-(v)$

nên H có đường Euler (P): $\overline{gagefgcbacea}$ đi từ g đến a.

K có $d^+(a) = d^-(a) + 2 = 3$ nên K không có chu trình Euler lẫn đường Euler .

2.4/ <u>THUẬT TOÁN FLEURY XÂY DỰNG CHU TRÌNH EULER:</u>

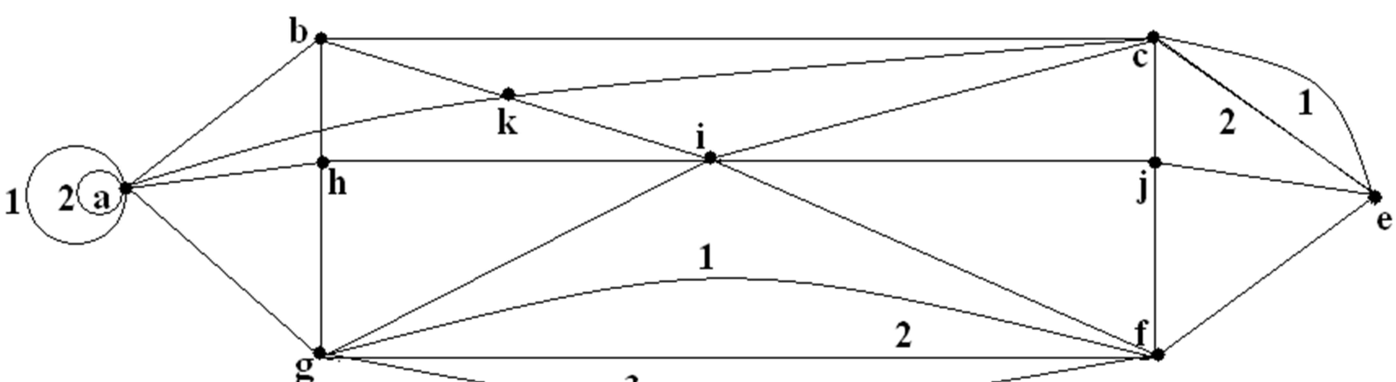
Cho G = (V, E) *liên thông* và giả sử G thỏa điều kiện có *có chu trình* Euler.

Ta xây dựng *chu trình Euler* cho G như sau : Xuất phát từ một đỉnh a tùy ý

của G, ta vẽ chu trình đi qua liên tiếp các cạnh và tuân thủ hai nguyên tắc sau :

- Mỗi khi đã đi qua một cạnh thì xóa ngay cạnh đó (tạm thời chưa xóa hai đỉnh của nó). Ta chỉ xóa đỉnh của các các cạnh đã đi qua khi đỉnh đó trở thành đỉnh cô lập của đồ thị mới vào lúc đang xét.
- Chỉ đi qua *một cầu* của đồ thị mới vào lúc đang xét nếu không còn cạnh nào khác (không phải là cầu của đồ thị mới vào lúc đang xét) để đi tiếp.

<u>Ví dụ:</u> a) Cho đồ thị vô hướng liên thông G = (V, E) như sau :

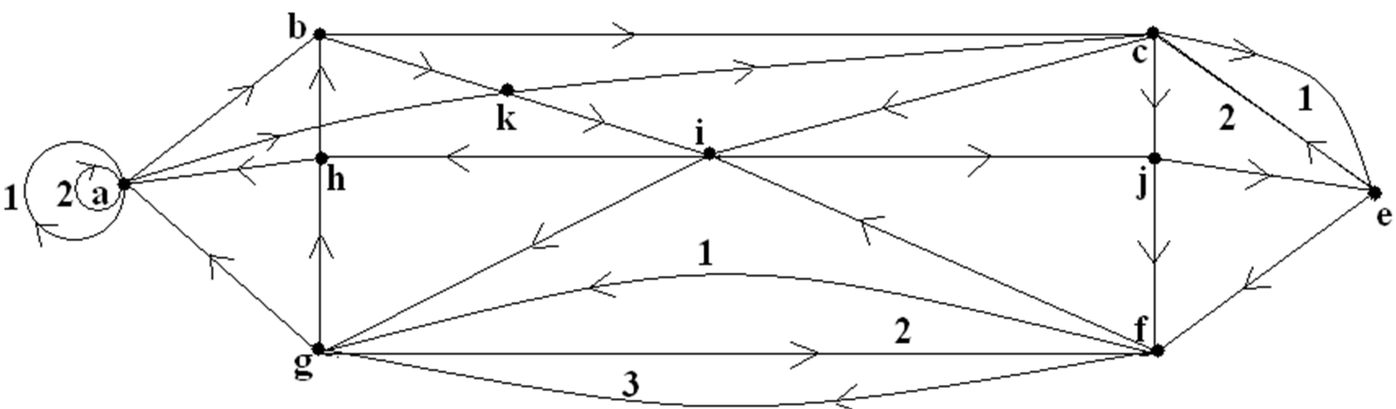


G = (V,E)

Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn nên G có chu trình Euler.

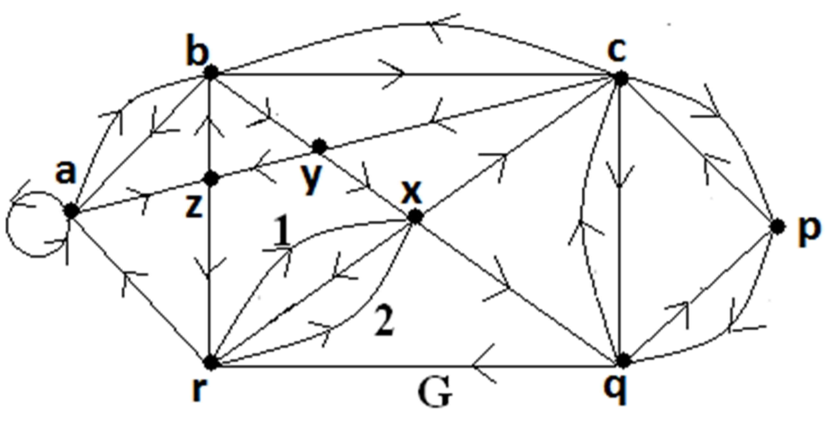
Xuất phát từ đỉnh a chọn liên tiếp các cạnh $\overset{1}{\overline{aa}}$, $\overset{2}{\overline{aa}}$, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overset{1}{\overline{ce}}$, $\overset{2}{\overline{ec}}$, $\overline{cj}$, $\overline{je}$, cầu $\overline{ef}$ (xóa **e** cô lập), $\overset{1}{\overline{fg}}$, $\overset{2}{\overline{gf}}$, $\overset{3}{\overline{fg}}$, $\overline{ga}$, $\overline{ak}$, $\overline{kc}$, cầu $\overline{ci}$ (xóa **c** cô lập), $\overline{ij}$, cầu $\overline{jf}$ (xóa **j** cô lập), cầu $\overline{fi}$ (xóa **f** cô lập), $\overline{ig}$, cầu $\overline{gh}$ (xóa **g** cô lập), $\overline{hb}$, cầu $\overline{bk}$ (xóa **b** cô lập), cầu $\overline{ki}$ (xóa **k** cô lập), cầu $\overline{ih}$ (xóa **i** cô lập) và cầu $\overline{ha}$ (xóa **h** và **a** cô lập).

Như vậy G có chu trình Euler (C) : $\overline{a^3bcecjefgfgakcijfighbkiha}$ có hướng di chuyển trên sơ đồ như sau:



G = (V,E)

b) Cho đồ thị có hướng G = (V, E) liên thông như sau :



Ta thấy mọi đỉnh của G đều cân bằng nên G có chu trình Euler.

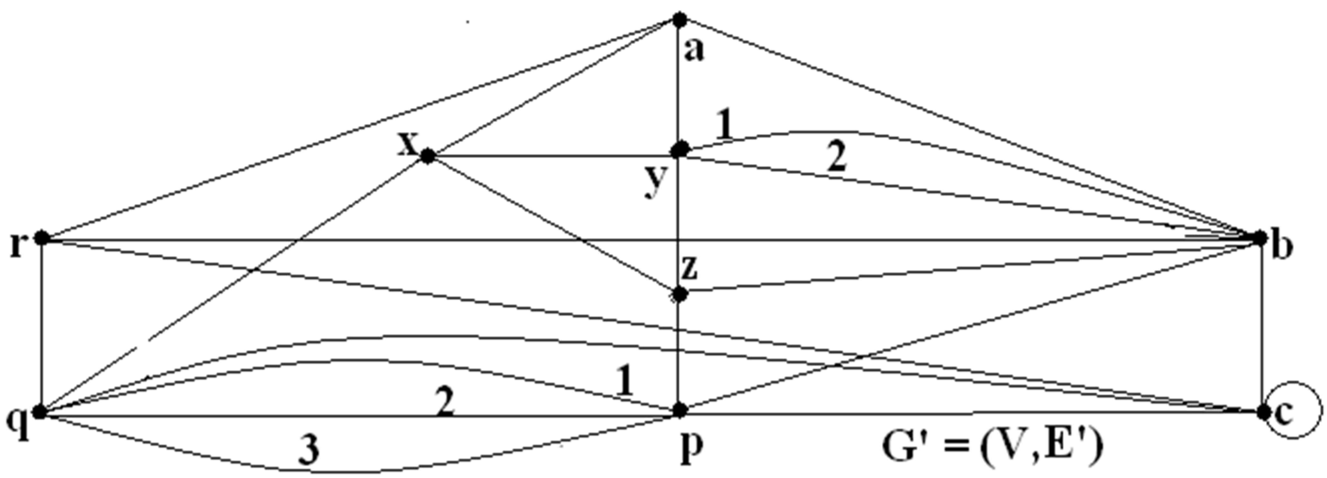
Xuất phát từ đỉnh a chọn liên tiếp các cạnh $\overline{aa}$, $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{az}$, $\overline{zr}$, $\overset{1}{\overline{rx}}$, $\overline{xr}$, $\overset{2}{\overline{rx}}$, $\overline{xc}$, $\overline{cb}$, $\overline{bc}$, $\overline{cy}$, $\overline{yz}$, cầu $\overline{zb}$ (xóa **z** cô lập), cầu $\overline{by}$ (xóa **b** cô lập), cầu $\overline{yx}$ (xóa **y** cô lập), cầu $\overline{xq}$ (xóa **x** cô lập), $\overline{qc}$, $\overline{cq}$, $\overline{qp}$, $\overline{pc}$, cầu $\overline{cp}$ (xóa **c** cô lập), cầu $\overline{pq}$ (xóa **p** cô lập), cầu $\overline{qr}$ (xóa **q** cô lập) và cầu $\overline{ra}$ (xóa **r** và **a** cô lập). Như vậy G có chu trình Euler (C): $\overline{a^2bazrxrxcbcyzbyxqcqpcpqra}$.

2.5/ <u>THUẬT TOÁN FLEURY XÂY DỰNG ĐƯỜNG EULER:</u>

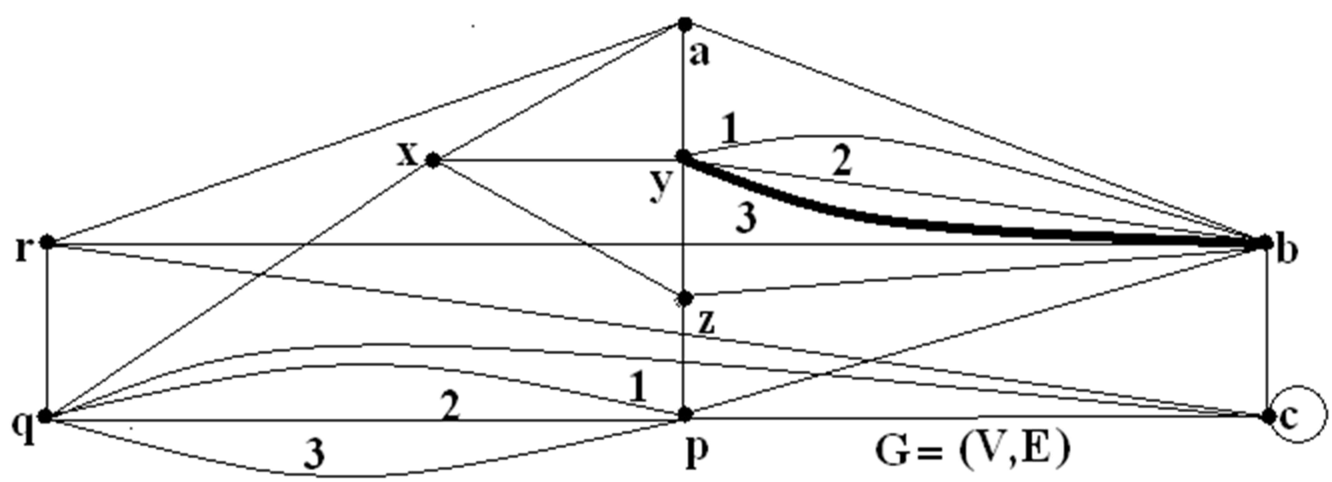
Cho G = (V, E) *liên thông* và giả sử G thỏa điều kiện *có đường Euler đi từ* a *đến* b. Ta xây dựng *đường Euler* cho G như sau :

- Vẽ thêm *cạnh ảo* $\alpha = \overline{ba}$ trong G. Đặt E' = E ∪ { α } thì G' = (V, E') có *chu trình Euler* (C) mà ta vẽ được từ thuật toán trong (**2.4**).
- Xóa cạnh ảo α trong (C), ta được *đường Euler* (P) đi từ a đến b trong G.

<u>**Ví dụ:**</u> a) Cho đồ thị vô hướng liên thông G = (V, E) như sau :



G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là b (bậc 7) và y (bậc 5) nên G có đường Euler nối b và y. Vẽ thêm cạnh ảo $\alpha = \overset{3}{\overline{yb}}$ vào G để có G' = (V, E' = E ∪ {α}).



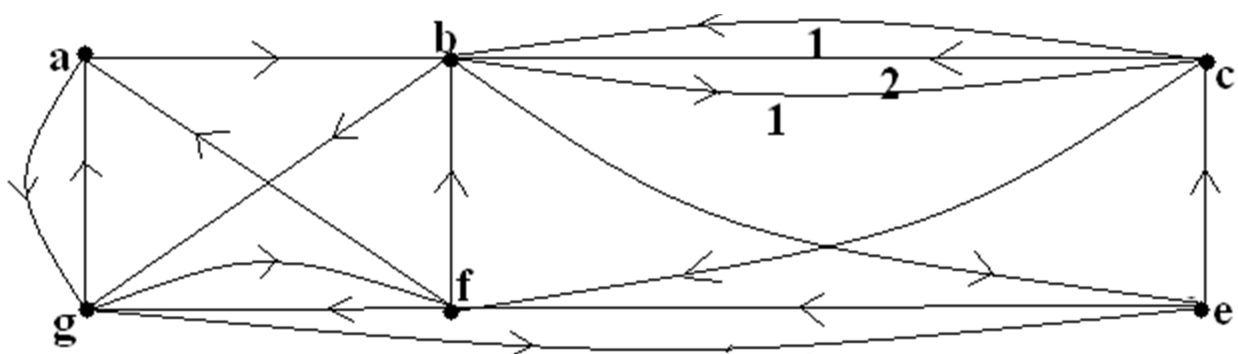
Mọi đỉnh của G’ đều có bậc chẵn nên G’ có chu trình Euler.

Xuất phát từ đỉnh a chọn liên tiếp các cạnh $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cc}$, $\overline{cp}$, $\overset{1}{\overline{pq}}$, $\overset{2}{\overline{qp}}$, $\overset{3}{\overline{pq}}$, $\overline{qr}$, $\overline{ra}$, $\overline{ax}$, $\overline{xq}$, cầu $\overline{qc}$ (xóa **q** cô lập), cầu $\overline{cr}$ (xóa **c** cô lập), cầu $\overline{rb}$ (xóa **r** cô lập), $\overset{1}{\overline{by}}$, $\overset{3}{\overline{yb}}$, $\overset{2}{\overline{by}}$, $\overline{yz}$, $\overline{zb}$, cầu $\overline{bp}$ (xóa **b** cô lập), cầu $\overline{pz}$ (xóa **p** cô lập), cầu $\overline{zx}$ (xóa **z** cô lập), cầu $\overline{xy}$ (xóa **x** cô lập) và cầu $\overline{ya}$ (xóa **y** và **a** cô lập).

Như vậy G có chu trình Euler (C): $\overline{abc^2pqpqraxqcrbybyzbpzxya}$.

Xóa cạnh ảo α trong (C), ta có đường Euler (P) : $\overline{byzbpzxyabc^2pqpqraxqcrby}$ cho G.

b) Cho đồ thị có hướng liên thông G = (V, E) như sau :

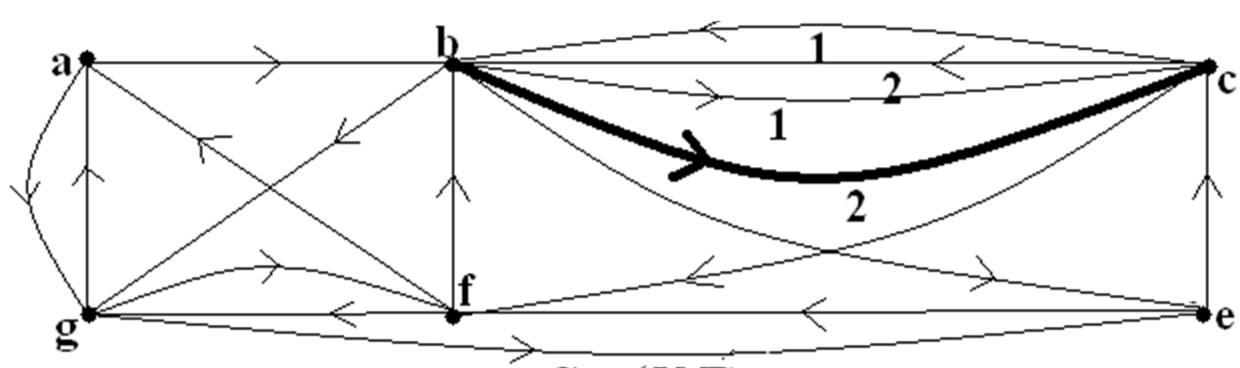


G = (V,E)

G có đường Euler đi từ c đến b [$d^+(c) = d^-(c) + 1$, $d^+(b) = d^-(b) - 1$ và $\forall v \in V \setminus \{b, c\}$, $d^+(v) = d^-(v)$].

Vẽ thêm cạnh ảo $\alpha = \overset{2}{\overline{bc}}$ vào G để có G’ = (V, E’ = E $\cup$ {α}).

Mọi đỉnh của G’ đều cân bằng nên G’ có chu trình Euler.



G = (V,E)

Xuất phát từ đỉnh b, chọn liên tiếp các cạnh $\overset{1}{\overline{bc}}$, $\overset{1}{\overline{cb}}$, $\overset{2}{\overline{bc}}$, $\overset{2}{\overline{cb}}$, $\overline{be}$, $\overline{ec}$, cầu $\overline{cf}$ (xóa **c** cô lập), $\overline{fb}$, $\overline{bg}$, $\overline{ga}$, $\overline{ag}$, $\overline{gf}$, $\overline{fg}$, cầu $\overline{ge}$ (xóa **g** cô lập), cầu $\overline{ef}$ (xóa **e** cô lập), cầu $\overline{fa}$ (xóa **f** cô lập) và cầu $\overline{ab}$ (xóa **a** và **b** cô lập).

Như vậy G' có chu trình Euler (C) : $\overline{bcbcbecfbgagfgefab}$.

Xóa cạnh ảo α trong (C), ta có đường Euler (P) : $\overline{cbecfbgagfgefabcb}$ trong G.

2.6/ THUẬT TOÁN MỞ RỘNG CHU TRÌNH XÂY DỰNG CHU TRÌNH EULER:

Cho G = (V, E) *liên thông* và giả sử G thỏa điều kiện *có chu trình Euler*. Ta xây dựng *chu trình Euler* cho G theo các bước như sau :

* Chọn tùy ý $a \in V$. Từ a, ta đi theo các cạnh của G để vẽ một đường dài nhất có thể được trong G và đường này sẽ kết thúc tại a. Ta vẽ được chu trình (C_1).

* Nếu $E \subset (C_1)$ thì (C_1) là chu trình Euler của G. Nếu $E \not\subset (C_1)$, chọn $b \in (C_1)$ và $u \in V$ sao cho có cạnh mới $\overline{bu} \notin (C_1)$. Từ b, ta vẽ lại (C_1) đi từ b đến b rồi đi theo cạnh mới $\overline{bu}$ để vẽ nối tiếp một đường dài nhất có thể được trong $G \setminus (C_1)$ và đường này sẽ kết thúc tại b. Ta vẽ được chu trình (C_2) mở rộng (C_1).

* Nếu $E \subset (C_2)$ thì (C_2) là chu trình Euler của G. Nếu $E \not\subset (C_2)$, chọn $c \in (C_2)$ và $v \in V$ sao cho có cạnh mới $\overline{cv} \in \notin (C_2)$. Từ c, ta vẽ lại (C_2) đi từ c đến c rồi đi theo cạnh mới $\overline{cv}$ vẽ nối tiếp một đường dài nhất có thể được trong $G \setminus (C_2)$ và đường này sẽ kết thúc tại c. Ta có chu trình (C_3) mở rộng (C_2).

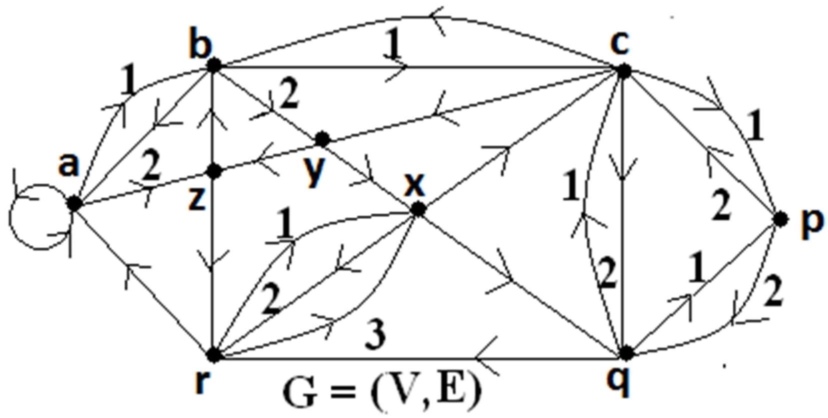
* Tiếp tục như trên cho đến khi có được $E \subset (C_k)$ và (C_k) là chu trình Euler của G.

__Ghi chú__: Khi chuyển từ (C_1) qua (C_2) thì có thể [$\mathbf{b} \equiv a$ hoặc $\mathbf{b} \neq a$], [$\mathbf{u} \in (C_1)$ hoặc $\mathbf{u} \notin (C_1)$] và [$\mathbf{b} \equiv u$ hoặc $\mathbf{b} \neq u$]). Nếu $\mathbf{b} \equiv u$ thì $\overline{bu}$ là một vòng tại b.

Khi chuyển từ (C_2) qua (C_3) thì có thể [$\mathbf{c} \equiv b$ hoặc $\mathbf{c} \neq b$], [$\mathbf{v} \in (C_2)$ hoặc $\mathbf{v} \notin (C_2)$] và [$\mathbf{c} \equiv v$ hoặc $\mathbf{c} \neq v$] . Nếu $\mathbf{c} \equiv v$ thì $\overline{cv}$ là một vòng tại c.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho đồ thị có hướng G = (V, E) liên thông như sau :



Ta thấy mọi đỉnh của G đều cân bằng nên G có chu trình Euler.

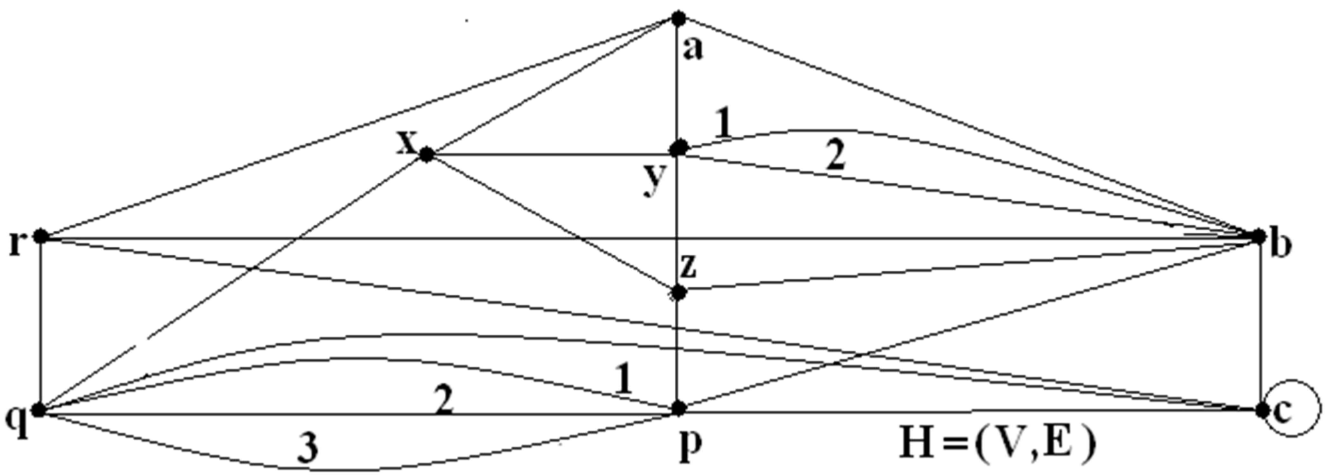
Vẽ (C_1) : $\overline{aba^2zra}$ và $E \not\subset (C_1)$. Chọn $b \in (C_1)$ và $y \in V$ có $\overline{by} \notin (C_1)$.

Vẽ (C_2) : $\overline{ba^2zrabyzbcb}$ và $E \not\subset (C_2)$. Chọn $c \in (C_2)$ và $y \in V$ có $\overline{cy} \notin (C_2)$.

Vẽ (C_3) : $\overline{cba^2zrabyzbcyxcpqcqpc}$ và $E \not\subset (C_3)$. Chọn $q \in (C_3)$ và $r \in V$ có $\overline{qr} \notin (C_3)$.

Vẽ (C_4) : $\overline{qcqpcba^2zrabyzbcyxcpqrxrxq}$ và $E \subset (C_4)$. Ta có (C_4) là chu trình Euler của G.

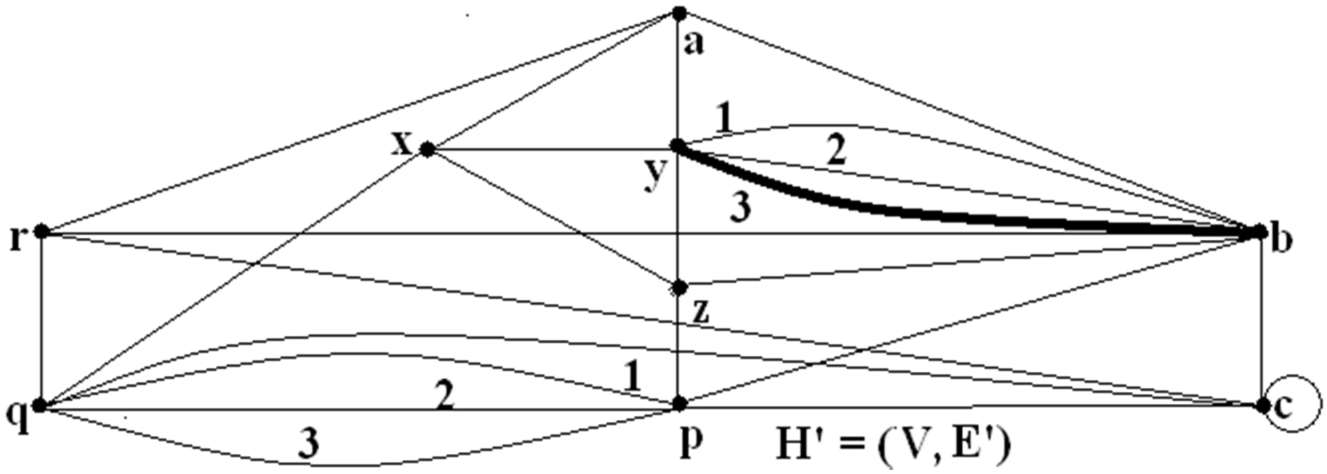
b) Cho đồ thị vô hướng liên thông H = (V, E) như sau :



Ta thấy H có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là b (bậc 7) và y (bậc 5) nên H có đường Euler nối b và y.

Cách xây dựng đường Euler cho H đã được trình bày trong **(2.5)**.

Vẽ thêm cạnh ảo $\alpha = \overset{3}{\overline{yb}}$ vào H để có H' = (V, E' = E ∪ {α}).



H' có mọi đỉnh bậc chẵn nên có chu trình Euler.

Vẽ (C_1) : $\overline{abc^2raxqrbpzya}$ và E' $\not\subset (C_1)$. Chọn $b \in (C_1)$ và $y \in V$ có $\overset{1}{\overline{by}} \notin (C_1)$.

Vẽ (C_2) : $\overline{bc^2raxqrbpzyabybyxzb}$ và E' $\not\subset (C_2)$. Chọn $c \in (C_2)$ và $p \in V$ có $\overline{cp} \notin (C_2)$.

Vẽ (C_3) : $\overline{c^2raxqrbpzyabybyxzbcpqpqc}$ và E' $\subset (C_3)$. Ta có (C_3) là chu trình Euler của H'.

Xóa cạnh ảo α trong (C_3), ta có đường Euler (P) : $\overline{byxzbcpqpqc^2raxqrbpzyaby}$ cho H.

III. <u>ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH HAMILTON TRONG ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG LIÊN THÔNG:</u>

3.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho G = (V, E) *vô hướng* và *liên thông*.

a) *Một chu trình Hamilton* (C) trong G là một chu trình *đi qua tất cả các đỉnh* của G và *mỗi đỉnh qua đúng một lần*.

b) G được gọi là *một đồ thị Hamilton* nếu G *có chu trình Hamilton*.

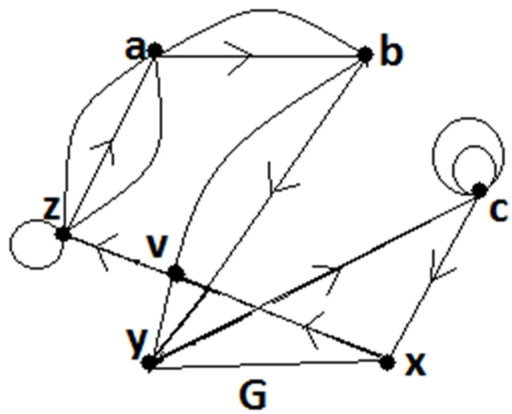
c) *Một đường Hamilton* (P) trong G là *một đường không khép kín đi qua tất cả các đỉnh* của G và *mỗi đỉnh qua đúng một lần*.

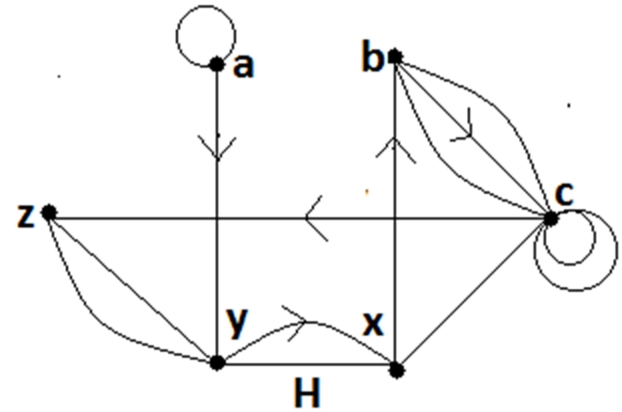
d) Nếu G *có chu trình Hamilton* (C) thì G cũng *có đường Hamilton* bằng cách xóa bỏ một cạnh tùy ý của (C) [không xóa 2 đỉnh của cạnh đó].

e) Nếu G *có đường Hamilton* thì G không nhất thiết có chu trình Hamilton.

f) Đồ thị *đầy đủ* luôn luôn *có chu trình Hamilton*.

Ví dụ: Cho các đồ thị vô hướng liên thông G và H như sau :





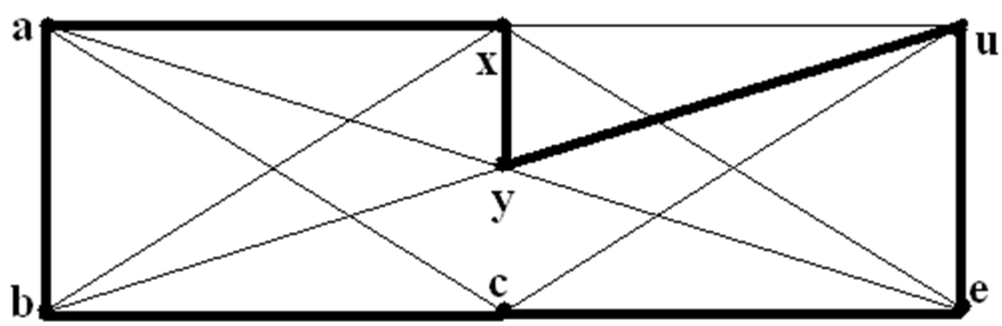
G có chu trình Hamilton (C) : $\overline{abycxvza}$ nên cũng có đường Hamilton (P) : $\overline{abycxvz}$.

H có đường Hamilton (Q) : $\overline{ayxbcz}$ mà không có chu trình Hamilton (xét tại đỉnh a).

3.2/ <u>ĐỊNH LÝ DIRAC (1952):</u> Cho G = (V, E) là *đơn đồ thị vô hướng liên thông*.

Giả sử | V | = n ≥ 3 và ∀v ∈ V, d(v) ≥ $\frac{n}{2}$. Khi đó G *có chu trình Hamilton*.

Ví dụ: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông G = (V, E) với | V | = 7 như sau:



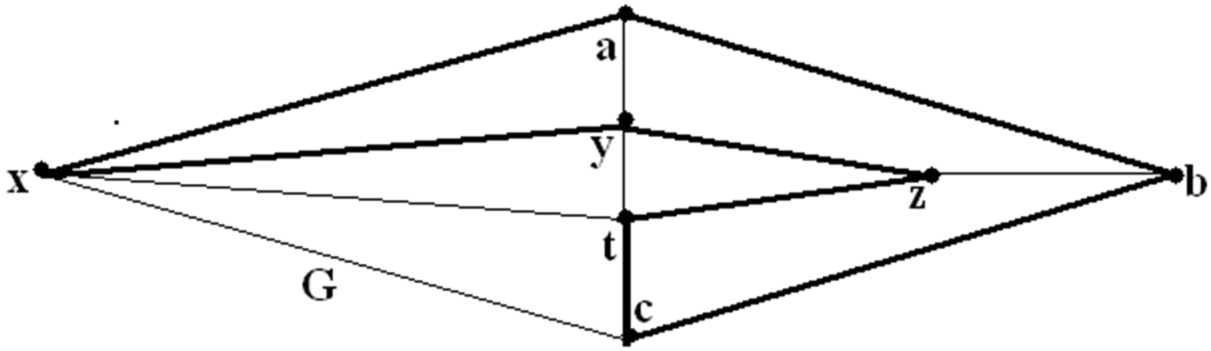
Ta thấy ∀v ∈ V, d(v) ≥ 4 > (7 / 2) nên G thỏa giả thiết của định lý DIRAC và G có chu trình Hamilton (C) : $\overline{axyuecba}$.

3.3/ <u>ĐỊNH LÝ ORE (1960):</u> Cho G = (V, E) là *đơn đồ thị vô hướng liên thông*.

Giả sử | V | = n ≥ 3 và tổng bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kỳ trong G có giá trị ≥ n. Khi đó G *có chu trình Hamilton*.

<u>Ghi chú</u> : Định lý DIRAC (1952) có giả thiết mạnh hơn giả thiết của định lý ORE (1960). Do đó Định lý DIRAC trở thành một hệ quả của Định lý ORE kể từ 1960.

Ví dụ: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ với $|V| = 7$ như sau:



G thỏa giả thiết của định lý ORE nên G có chu trình Hamilton (C) : $\overline{abctzyxa}$.

3.4/ NHỮNG ĐIỀU LƯU Ý VỀ CHU TRÌNH HAMILTON:

Cho $G = (V, E)$ *vô hướng* và *liên thông*. Ta *chưa có các điều kiện cần và đủ* để nhận biết một đồ thị liên thông có hay không có chu trình và đường Hamilton (mà chỉ có *một số điều kiện đủ* như Định lý DIRAC, ORE, …). Do đó khi muốn nói đồ thị *có chu trình hay đường Hamilton* thì ta phải vẽ trực tiếp nó. Khi muốn nói đồ thị *không có chu trình hay đường Hamilton* thì ta dùng *chứng minh phản chứng*.

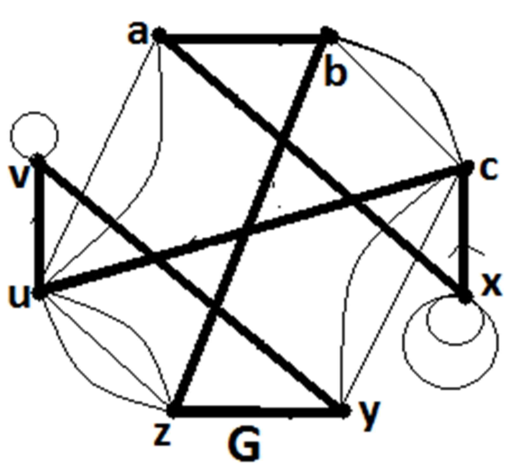
Ta lưu ý một số thông tin sau để khẳng định đồ thị *không có chu trình Hamilton*:

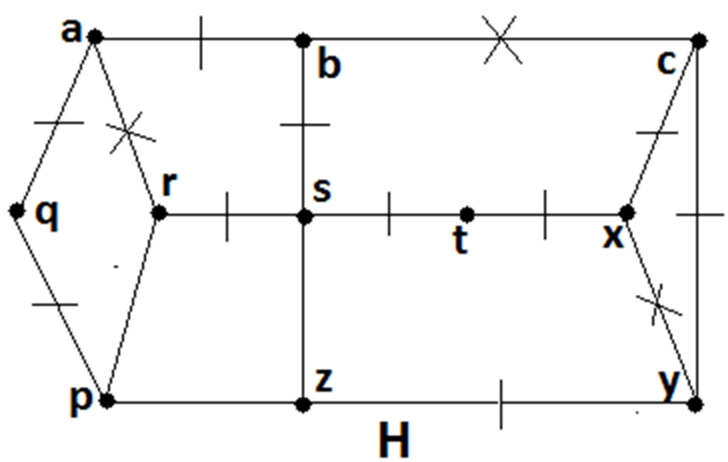
a) Nếu G có *đỉnh treo* a [d(a) = 1] thì G *không có chu trình Hamilton.*

b) Nếu G *có chu trình Hamilton* (C) thì $\forall a \in V$, có đúng 2 cạnh của (C) qua a.

c) Mọi *chu trình Hamilton* của (G) *không chứa một chu trình con nào thực sự.*

Ví dụ: Cho các đồ thị liên thông G và H như sau:





G là đồ thị Hamilton vì G có chu trình Hamilton (C) : $\overline{axcuvyzba}$.

H không phải là đồ thị Hamilton. Thật vậy. Giả sử H có chu trình Hamilton là (L) Do d(q) = d(t) = 2 nên $\overline{aq}$, $\overline{pq}$, $\overline{st}$, $\overline{tx} \in$ (L). Suy ra $\overline{cx} \notin$ (L) hay $\overline{xy} \notin$ (L). Do $\overline{rstx}$ như là trục đối xứng của (H) nên ta có thể xem như $\overline{xy} \notin$ (L) mà không giảm sự tổng quát. Suy ra $\overline{cx} \in$ (L) và do đó $\overline{cy}$, $\overline{yz} \in$ (L). Suy ra $\overline{bc} \notin$ (L), $\overline{ab}$, $\overline{bs} \in$ (L). Suy ra $\overline{ar} \notin$ (L) và $\overline{rs} \in$ (L). Như vậy tại s, chu trình Hamilton (L) đi qua 3 cạnh $\overline{st}$, $\overline{bs}$ và $\overline{rs}$: mâu thuẫn với b) của (**3.4**). Vậy H không có chu trình Hamilton.