CHƯƠNG IV

HÀM SINH

I. HÀM SINH:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA:

a) Cho dãy số thực $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ có vô hạn số hạng. Ta gọi *chuỗi lũy thừa hình thức*

$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ là *hàm sinh* của dãy $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$.

b) Dãy số thực có hữu hạn số hạng $\{ a_k \mid p \leq k \leq q \}$ $(0 \leq p \leq q)$ có hàm sinh vẫn là

$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ với qui ước $a_k = 0$ khi $k < p$ hoặc $k > q$.

Ví dụ:

a) Dãy vô hạn $\{a_k = (-2)^k k! \mid k \geq 0\}$ và dãy số hữu hạn $\{b_k = k^2 \ln k \mid 3 \leq k \leq 20\}$ có các hàm sinh lần lượt là $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 1 - 2x + 8x^2 - 48x^3 + \cdots$ và $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k =$ $= 9(\ln 3)x^3 + 16(\ln 4)x^4 + \cdots + 400(\ln 20)x^{20}$ ($b_k = 0$ khi $k < 3$ hoặc $k > 20$).

b) Xét tập hợp X có $|X| = n \geq 1$. $\forall k \in \{ 0,1, \ldots, n \}$, đặt a_k = số tập hợp con có k phần tử trong X thì $a_k = C_n^k$. Dãy số hữu hạn $\{ a_k \mid 0 \leq k \leq n \}$ có hàm sinh là

$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (x + 1)^n$ trong đó $a_k = 0, \forall k > n$.

c) Đặt $a_o = b_o = 0$, a_k = số các số nguyên dương $\leq k$ mà *nguyên tố cùng nhau* với k và b_k = số *ước số nguyên dương* của k, $\forall k \geq 1$. Các dãy số vô hạn $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ và $\{ b_k \mid k \geq 0 \}$ có các hàm sinh lần lượt là $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$ và

$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots$. $\forall k$ nguyên tố ≥ 2, $b_k = 2$ và $a_k = k - 1$.

1.2/ HÀM SINH DẪN ĐẾN TÌM SỐ NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH:

a) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách chọn k viên kẹo từ 1 viên kẹo dừa, 2 viên kẹo chanh, 3 viên kẹo me và 4 viên kẹo gừng. Viết hàm sinh của dãy số hữu hạn $\{a_k \mid k \geq 0\}$.

$\forall k \geq 0$, a_k = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ với $0 \leq e_i \leq i$ $(1 \leq i \leq 4)$ trong đó e_1, e_2, e_3 và e_4 lần lượt là số viên kẹo dừa, chanh, me và gừng. Để viết hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$ trong đó $0 \leq e_i \leq i$ $(1 \leq i \leq 4)$. Như vậy ta xây dựng các đa thức $(1 + x)$, $(1 + x + x^2)$, $(1 + x + x^2 + x^3)$ và $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ lần lượt cho e_1, e_2, e_3 và e_4. Do đó hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là $F(x) = (1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) =$

$= 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10}$ ($a_k = 0$ khi $k > 10$).

b) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách chọn k viên bi từ 2 viên bi trắng, 3 viên bi đen, 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Viết hàm sinh của dãy số hữu hạn $\{a_k \mid k \geq 0\}$.

$\forall k \geq 0$, a_k = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ với $0 \leq e_1 \leq 2$, $0 \leq e_i \leq 3$ $(i = 2, 3)$ và $0 \leq e_4 \leq 4$ trong đó e_1, e_2, e_3 và e_4 lần lượt là số viên bi trắng, đen, xanh và đỏ được chọn. Để ý $a_k = 0$ khi $k > 12$.

Để viết hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$ trong đó $0 \leq e_1 \leq 2$, $0 \leq e_i \leq 3$ $(i = 2, 3)$ và $0 \leq e_4 \leq 4$. Như vậy ta xây dựng các đa thức $(1 + x + x^2)$ [cho e_1], $(1 + x + x^2 + x^3)$ [cho e_2 và e_3] và $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ [cho e_4]. Do đó hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là $F(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

c) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách chia k hạt dẻ y hệt nhau vào 5 cái hộp sao cho số hạt ở hộp 1 là số lẻ ≤ 7, số hạt ở hộp 2 là số chẵn ≤ 10, số hạt ở 3 hộp còn lại đều có số lượng trong khoảng từ 4 đến 9. Viết hàm sinh của dãy số hữu hạn $\{a_k \mid k \geq 0\}$.

$\forall k \geq 0$, a_k = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = k$ với $0 \leq e_1$ lẻ ≤ 7, $0 \leq e_2$ chẵn ≤ 10 và $4 \leq e_i \leq 9$ ($i = 3, 4, 5$) trong đó e_1, e_2, e_3, e_4 và e_5 lần lượt là số hạt dẻ được đặt vào hộp 1, 2, 3, 4 và 5.

Để viết hàm sinh của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}x^{e_5}$ với $0 \leq e_1$ lẻ ≤ 7, $0 \leq e_2$ chẵn ≤ 10 và $4 \leq e_i \leq 9$ ($i = 3, 4, 5$). Như vậy ta xây dựng các đa thức $(x + x^3 + x^5 + x^7)$ [cho e_1], $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$ [cho e_2] và $(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)$ [cho e_3, e_4 và e_5].

Do đó hàm sinh của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$F(x) = (x + x^3 + x^5 + x^7)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^3$.

Ta có $a_k = 0$ khi $k < 13$ hoặc $k > 44$.

d) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách xếp k hộp bánh y hệt nhau vào 3 cái tủ sao cho: số hộp ở tủ 1 là bội số của 3 và ≤ 9, số hộp ở tủ 2 là số chẵn ≥ 6 và số hộp ở tủ 3 là số nguyên tố ≤ 13. Viết hàm sinh của dãy số vô hạn $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$.

$\forall k \geq 0$, a_k = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 = k$ với $0 \leq e_1$ (bội của 3) ≤ 9, e_2 chẵn ≥ 6 và $2 \leq e_3$ nguyên tố ≤ 13 trong đó e_1, e_2 và e_3 lần lượt là số hộp bánh được đặt vào tủ 1, 2 và 3.

Để viết hàm sinh của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}$ với $0 \leq e_1$ (bội của 3) ≤ 9, e_2 chẵn ≥ 6 và $2 \leq e_3$ nguyên tố ≤ 13 . Như vậy ta xây dựng các đa thức $(1 + x^3 + x^6 + x^9)$ [cho e_1], $(x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13})$ [cho e_3] và $(x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots)$ [cho e_2]. Do đó hàm sinh của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$F(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9)(x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots)(x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13})$.

Ta có $a_k = 0$ khi $k < 8$.

1.3/ MỘT SỐ CÔNG THỨC ĐẠI SỐ VÀ KHAI TRIỂN MAC-LAURIN:

a) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ ($n \geq 1$).

b) $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ ($n \geq 1$).

c) $(1 - x^m)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{km} = 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} + \cdots + (-1)^n C_n^n x^{nm}$ ($m, n \geq 1$).

d) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ và $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

e) $\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+(k-1)}^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + C_{n+2}^3 x^3 + \cdots$ ($n \geq 2$).

1.4/ TÍCH CAUCHY CỦA CÁC CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC:

Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ và $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$. Khi đó $h(x) = f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ với

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = (a_o b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_o), \forall k \geq 0.$$

Chuỗi $h(x)$ gọi là *tích Cauchy* của các chuỗi $f(x)$ và $g(x)$.

1.5/ TÌM HỆ SỐ CỦA HÀM SINH:

Ta sử dụng các kỹ thuật tính toán đại số để tìm các hệ số của các hàm sinh. Ta sẽ biến đổi một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức bằng cách áp dụng **(1.3)** và **(1.4)**.

Ví dụ:

a) Tìm hệ số của x^{20} trong $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^4$.

Ta có $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots)^4 = x^{12}\dfrac{1}{(1-x)^4} = x^{12} \sum_{k=0}^{+\infty} C_{4+(k-1)}^k x^k$

nên hệ số của x^{20} trong $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^4$ chính là hệ số của x^8 trong biểu thức $\sum_{k=0}^{+\infty} C_{4+(k-1)}^k x^k$. Vậy hệ số cần tìm là $C_{11}^8 = 165$.

b) 20 bạn quyên góp vở cho học sinh nghèo. Bạn đầu tiên góp 1 hoặc 2 hoặc 5 vở. 19 bạn còn lại mỗi người góp 3 hoặc 4 vở. Hỏi có bao nhiêu cách quyên góp để thu được 76 cuốn vở ?

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách quyên góp k cuốn vở của 20 bạn đã nói ở trên.

Ta cần tìm a_{76} = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + \ldots + e_{20} = 76$, trong đó $e_1 = 1, 2, 5$ và $e_i = 3$ hoặc 4 $(2 \leq i \leq 20)$. Hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là $F(x) = (x + x^2 + x^5)(x^3 + x^4)^{19} = x^{58}(1 + x + x^4)(1 + x)^{19}$. Muốn tìm hệ số của x^{76} trong $F(x)$, ta tìm hệ số của x^{18} trong $(1 + x + x^4)(1 + x)^{19}$. Đặt $f(x) = (1 + x + x^4)$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, $g(x) = (1 + x)^{19} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k x^k = 1 + C_{19}^1 x + C_{19}^2 x^2 + \cdots + C_{19}^{19} x^{19}$ và

$h(x) = (1 + x + x^4)(1 + x)^{19} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$. Ta có $d_{18} = \sum_{i=0}^{18} b_i c_{18-i} = b_o c_{18} + b_1 c_{17} + b_4 c_{14} =$

$= C_{19}^{18} + C_{19}^{17} + C_{19}^{14} = 19 + 171 + 11628 = 11818$.

c) Có bao nhiêu cách xếp 30 bút y hệt nhau vào 8 hộp sao cho hộp 1 có không quá 12 bút và các hộp còn lại mỗi hộp có ít nhất 2 bút ?

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k bút vào 8 hộp thỏa yêu cầu của bài toán. Ta cần tìm a_{30} = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + \ldots + e_8 = 30$ trong đó $0 \leq e_1 \leq 12$ và $e_i \geq 2$ $(2 \leq i \leq 8)$. Hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là

$F(x) = (1 + x + \ldots + x^{12})(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^7 = x^{14}(1 + x + \ldots + x^{12})(1 + x + x^2 + \ldots)$.

Muốn tìm hệ số của x^{30} trong $F(x)$, ta tìm hệ số của x^{16} trong biểu thức

$$h(x) = (1 + x + \ldots + x^{12})(1 + x + x^2 + \cdots)^7 = \frac{1-x^{13}}{1-x}\frac{1}{(1-x)^7} = (1 - x^{13})\frac{1}{(1-x)^8} =$$

$$= (1 - x^{13})(1 + C_8^1 x + C_{8+1}^2 x^2 + C_{8+2}^3 x^3 + \cdots) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k.$$

Như vậy hệ số cần tìm là $d_{16} = C_{8+15}^{16} - C_{8+2}^{3} = 245157 - 120 = 245037$.

II. SỰ PHÂN HOẠCH CỦA SỐ NGUYÊN DƯƠNG:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho số nguyên dương n. Nếu có các số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_r$ thỏa $n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_r$ và $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ thì ta nói $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ là *một phép phân hoạch* của n. Phân hoạch (n) là *phép phân hoạch tầm thường* của n.

Ví dụ:

6 có 11 phân hoạch là (6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2), (1, 1, 1, 3), (1,1,2,2), (1,1,1,1,2) và (1,1,1,1,1,1) . Ta có (6) là phép phân hoạch tầm thường của 6.

2.**2/ HÀM SINH CỦA SỐ PHÉP PHÂN HOẠCH:** Ta xây dựng hàm sinh cho dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và a_k = số phân hoạch của số nguyên dương k, $\forall k \ge 1$. Một phép phân hoạch của k *được xác định* khi ta biết số lượng các số nguyên dương 1, 2, 3, ... , k được sử dụng trong phép phân hoạch đó. Gọi e_i là số lần số nguyên. dương i được dùng trong một phép phân hoạch của k $(1 \le i \le k)$, ta có phương trình $1.e_1 + 2.e_2 + \ldots + k.e_k = k$. Như vậy a_k = số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên. Ta sẽ xây dựng các đa thức sao cho khi nhân các đa thức đó với nhau, ta được các số hạng có dạng

$$x^{e_1} x^{2e_2} x^{3e_3} \ldots x^{ke_k} \ldots$$

Ta có các đa thức $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$ [cho e_1], $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)$ [cho $2e_2$], … , $(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots)$ [cho ke_k], …. Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$F(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \ldots (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots) \ldots =$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)\ldots}.$$

Ví dụ:

a) Xét dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và $\forall k \ge 1$, a_k = số cách viết k thành *tổng các số nguyên dương khác nhau* (các phân hoạch đặc biệt của k) = số nghiệm nguyên của phương trình $1.e_1 + 2.e_2 + \ldots + k.e_k = k$ với $0 \le e_i \le 1$ ($1 \le i \le k$).

Do đó hàm sinh của dãy là $F(x) = (1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^k) \ldots$

b) Xét dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và $\forall k \ge 1, a_k$ = số cách viết k thành *tổng các chữ số* lấy từ tập hợp $\{ 1, 2, 4, 7 \}$ (mỗi chữ số có thể dùng một số lần tùy ý) = số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $1.e_1 + 2.e_2 + 4.e_3 + 7.e_4 = k$.

Do đó hàm sinh của dãy $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ là

$F(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^4 + x^8 + \ldots)(1 + x^7 + x^{14} + \ldots)$.

c) Dùng hàm sinh chứng minh mọi số nguyên dương được viết một cách duy nhất thành tổng của các lũy thừa nguyên không âm khác nhau của 2.

Xét dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và $\forall k \ge 1, a_k$ = số cách viết k thành (*tổng các lũy thừa nguyên không âm khác nhau* của 2) = số nghiệm nguyên của phương trình $2^o.e_o + 2^1.e_1 + 2^2.e_2 + \ldots = k$ với $0 \le e_i \le 1$ ($i \ge 0$). Do đó hàm sinh của dãy $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ là $F(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) \ldots$

$\forall r \ge 0$, ta có $\prod_{i-0}^{r}(1+x^{2^i}) = \sum_{i=0}^{2^{r+1}-1} x^i$ bằng cách chứng minh qui nạp theo $r \ge 0$.

Như vậy $F(x) = \prod_{i=0}^{+\infty}(1+x^{2^i}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Suy ra $a_k = 1, \forall k \ge 1$.

d) Xét dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và $\forall k \ge 1, a_k$ = số cách viết k thành *tổng các số nguyên dương lẻ* = số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $1.e_1 + 3.e_2 + 5.e_3 + \ldots = k$. Do đó hàm sinh của $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ là

$F(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) \ldots$

e) Xét dãy vô hạn $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$ với $a_o = 1$ và $\forall k \ge 1, a_k$ = số cách viết k thành *tổng các số nguyên dương chẵn* = số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $2.e_1 + 4.e_2 + 6.e_3 + \ldots = k$. Để ý $a_k = 0$ khi k lẻ. Hàm sinh của $\{ a_k \mid k \ge 0 \}$

là $F(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \dots)(1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + \dots)\dots$

III. <u>HÀM SINH MŨ:</u>

3.1/<u>ĐỊNH NGHĨA:</u>

a) Cho dãy số thực $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ (có vô hạn số hạng). Ta gọi *chuỗi lũy thừa hình thức*

$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \cdots$ là *hàm sinh mũ* của dãy $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$.

b) Dãy số thực hữu hạn $\{ a_k \mid p \leq k \leq q \}$ $(0 \leq p \leq q)$ có hàm sinh mũ $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$

với qui ước $a_k = 0$ khi $k < p$ hoặc $k > q$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Dãy vô hạn $\{ a_k = (-2)^k k! \mid k \geq 0 \}$ và dãy hữu hạn $\{ b_k = k^2 \ln k \mid 3 \leq k \leq 20 \}$ có các hàm sinh mũ lần lượt là $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots$ và $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$

$= \frac{3}{2}(\ln 3)x^3 + \frac{2}{3}(\ln 4)x^4 + \cdots + \frac{20}{19!}(\ln 20)x^{20}$ ($b_k = 0$ khi $k < 3$ hoặc $k > 20$).

b) Xét tập hợp X có $| X | = n \geq 1$. $\forall k \in \{ 0,1, \dots , n \}$, đặt a_k = số cách chọn ra k phần tử trong X rồi xếp vào k vị trí (không xếp trùng) thì $a_k = A_n^k$. Dãy hữu hạn

$\{ a_k \mid 0 \leq k \leq n \}$ có hàm sinh mũ $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (x + 1)^n$ ($\forall k > n, a_k = 0$).

3.2/ <u>HÀM SINH MŨ VÀ CÁC BÀI TOÁN ĐẾM CÓ YÊU CẦU SẮP THỨ TỰ:</u>

Hàm sinh dùng trong các bài toán đếm số nghiệm nguyên có điều kiện của một phương trình. Hàm sinh mũ được dùng có hiệu quả trong các bài toán đếm có yêu cầu thêm việc sắp xếp thứ tự.

a) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số chuỗi ký tự có k mẫu tự lấy từ $\{ x, y, z, t \}$ sao cho trong chuỗi xuất hiện x (ít nhất 2 lần) và z. Viết hàm sinh mũ của dãy $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$.

$\forall k \geq 0$, xét phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ với e_1, e_2, e_3, e_4 lần lượt là số lần xuất hiện của x, y, z, t trong chuỗi có k mẫu tự ($e_1 \geq 2, e_2 \geq 0, e_3 \geq 1, e_4 \geq 0$ và đều nguyên). Mỗi nghiệm (e_1, e_2, e_3, e_4) của phương trình trên cho ta số chuỗi ký tự là $\frac{(e_1+e_2+e_3+e_4)!}{e_1!e_2!e_3!e_4!} = \frac{k!}{e_1!e_2!e_3!e_4!}$ (đây là số phép hoán vị lặp trên chuỗi ký tự).

Ta có $\forall k \geq 0$, $a_k = \sum \frac{k!}{e_1!e_2!e_3!e_4!}$ và $\frac{a_k}{k!}x^k = \sum \frac{x^{e_1}}{e_1!}\frac{x^{e_2}}{e_2!}\frac{x^{e_3}}{e_3!}\frac{x^{e_4}}{e_4!}$ vì $k = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

[cả hai tổng đều lấy trên tất cả các nghiệm (e_1, e_2, e_3, e_4) của phương trình trên].

Để viết hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $\frac{x^{e_1}}{e_1!}\frac{x^{e_2}}{e_2!}\frac{x^{e_3}}{e_3!}\frac{x^{e_4}}{e_4!}$ trong đó $e_1 \geq 2$, $e_2 \geq 0$, $e_3 \geq 1$ và $e_4 \geq 0$. Như vậy hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}x^k = \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2.$$

b) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách xếp có thứ tự k vật được chọn từ 5 loại vật khác nhau sao cho loại 1 và 2 có ít nhất 3 vật cho mỗi loại, loại 3, 4 và 5 có số vật từ 2 đến 4 vật cho mỗi loại. Ta có hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}x^k = \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)^3.$$

c) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách xếp k người vào 5 căn phòng khác nhau sao cho không có phòng nào trống, phòng 4 và 5 có số người ở mỗi phòng là bội số của 3.

Ta có hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}x^k = \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots\right)^2.$$

d) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách xếp k người vào 4 căn phòng khác nhau sao cho phòng 1 và 2 có không quá 3 người cho mỗi phòng, phòng 3 có số người chẵn và phòng 4 có số người lẻ. Ta có hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})^2 (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots)(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots).$$

3.3/ CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN CHO HÀM SINH MŨ:

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

b) $e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

c) $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

d) $e^{nx} = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \cdots$

e) $2^{-1}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$

f) $2^{-1}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Ví dụ:

a) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách sắp xếp có thứ tự k vật chọn từ n loại vật khác nhau.

Tính a_k, $\forall k \geq 0$. Trước hết, ta có hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^n = e^{nx} = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \cdots$$

Suy ra $\forall k \geq 0$, $\frac{a_k}{k!} = \frac{n^k}{k!}$, nghĩa là $a_k = n^k$.

b) $\forall k \geq 0$, đặt a_k = số cách sắp xếp k khách vào 3 phòng khác nhau sao cho không có phòng trống. Tính a_k, $\forall k \geq 0$. Trước hết, ta có hàm sinh mũ của $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$

là $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^3 = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k - 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k + 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3^k - 3.2^k + 3)}{k!} x^k - 1$$

Suy ra $a_o = 0$ và $\forall k \geq 1$, $\frac{a_k}{k!} = \frac{3^k - 3.2^k + 3}{k!}$. Do đó $a_k = 3^k - 3.2^k + 3$, $\forall k \geq 1$.

IV. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SINH VÀ HÀM SINH MŨ:

4.1/ MỆNH ĐỀ: Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, $d \in \mathbf{R}$ và $r \in \mathbf{N}$. Ta có

a) $g(x) = d.f(x) \Leftrightarrow \forall k \geq 0, b_k = da_k$. b) $h(x) = f(x) \pm g(x) \Leftrightarrow \forall k \geq 0, c_k = a_k \pm b_k$.

c) $h(x) = f(x).g(x) \Leftrightarrow \forall k \geq 0, c_k = (a_o b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_o)$.

d) $g(x) = x^r.f(x) \Leftrightarrow \forall k \geq 0, b_k = 0$ (khi $k < r$) và $b_k = a_{k-r}$ (khi $k \geq r$).

4.2/ <u>ĐẠO HÀM CỦA CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC:</u>

a) Với $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, ta có chuỗi đạo hàm $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$.

Tương tự, ta cũng có các chuỗi đạo hàm hình thức cấp cao $f''(x), f^{(3)}(x), \ldots$

b) $[g(x).h(x)]' = g'(x)h(x) + g(x).h'(x)$ (Công thức Leibniz cho đạo hàm tích số).

c) $[g(x) / h(x)]' = [g'(x)h(x) - g(x)h'(x)] / [h(x)]^2$ (công thức đạo hàm thương số).

<u>Ví dụ:</u> Ta tìm biểu thức một số hàm sinh khi biết các hệ số của nó.

a) Cho $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ và $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ thỏa $a_k = kb_k, \forall k \geq 0$. Tính $f(x)$ theo $g(x)$.

Ta có $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k b_k x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k x^{k-1} = xg'(x)$. Vậy $f(x) = xg'(x)$.

b) Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ thỏa $a_k = 2k^2, \forall k \geq 0$. Tính biểu thức của $f(x)$ theo x.

$$\text{Ta có } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 2\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k = 2x\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = 2x\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\Big)' = 2x\Big(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\Big)'$$

$$= 2x\Big[x\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\Big)' \Big]' = 2x\Big[x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' \Big]' = 2x\Big[\frac{x}{(1-x)^2} \Big]' = \frac{2x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

c) Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ thỏa $a_k = (k^3 - k), \forall k \geq 0$. Tính biểu thức của $f(x)$ theo x.

$$\textit{Cách 1}: f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^{k-1} - x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} =$$

$$= x\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k\Big)' - x\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\Big)' = x\Big(x\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}\Big)' - x\Big(\frac{1}{1-x} - 1\Big)' = x\Big[x\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\Big)'\Big]' - \frac{x}{(1-x)^2} =$$

$$= x\Big[x\Big(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\Big)' \Big]' - \frac{x}{(1-x)^2} = x\Big\{ x\Big[x\Big(\frac{1}{1-x} - 1\Big)' \Big]' \Big\}' - \frac{x}{(1-x)^2} =$$

$$= x\Big\{ x\Big[\frac{x}{(1-x)^2} \Big]' \Big\}' - \frac{x}{(1-x)^2} = x\Big[\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \Big]' - \frac{x}{(1-x)^2} = x\Big[\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \Big]' - \frac{x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} - \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^4} = \frac{x(x^2+4x+1) - x(x^2-2x+1)}{(1-x)^4} = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

Cách 2: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k^3-k)x^k = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)k(k+1)x^k = [\ \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)kx^{k+1}\ ]' =$

$= [\ x^3 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}\ ]' = [\ x^3(\sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1})'\ ]' = [\ x^3(\sum_{k=2}^{+\infty} x^k)''\ ]' = [\ x^3(\frac{1}{1-x} - 1 - x)''\ ]' =$

$= [\ x^3(\frac{x^2}{1-x})''\ ]' = \{\ x^3[\ \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\ ]'\ \}' = [\ \frac{2x^3}{(1-x)^3}\ ]' = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$.

d) Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ thỏa $a_k = (k^3 + k^2)$, $\forall k \geq 0$. Tính biểu thức của $f(x)$ theo x.

$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(k^3+k^2)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(k+1)x^k = (\ \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k+1}\ )' = [\ x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}\ ]' =$

$= [x^2(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k)']' = [x^2(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1})']' = \{x^2[x\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k]'\}' = \{x^2[x(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1})']'\}' =$

$= x^2[x(x\sum_{k=0}^{+\infty} x^k)']'\}' = \{x^2[x(\frac{x}{1-x})']'\}' = \{x^2[\frac{x}{(1-x)^2}]'\}' = [\frac{x^2(x+1)}{(1-x)^3}]' = \frac{2x(2x+1)}{(1-x)^4}$.

4.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ và $g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$. Khi đó

$$\forall k \geq 0,\ b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i = a_o + a_1 + \cdots + a_k.$$

<u>Ví dụ:</u> Ta dùng (**4.3**) để tính tổng một số dãy số đơn giản.

a) Tính $s_k = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2$, $\forall k \geq 1$. Xét $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ với $a_k = k^2$, $\forall k \geq 0$.

Theo **Ví dụ (4.2)**, ta có $f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ thì

$\forall k \geq 1$, $b_k = a_o + a_1 + \cdots + a_k = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = s_k$ và

$g(x) = x(x+1)\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^k x^{k+2} = \sum_{k=1}^{+\infty} C_{k+2}^{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} C_{k+1}^{k-2} x^k =$

$= x + \sum_{k=2}^{+\infty}(C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2})x^k$. Do đó $\forall k \geq 2$, $s_k = b_k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ và

$s_1 = b_1 = 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$. Vậy $\forall k \geq 1$, $s_k = b_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

b) Tính $u_k = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + (k-1)k(k+1), \forall k \geq 2$.

Xét $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ với $a_k = k^3 - k^2 = (k-1)k(k+1), \forall k \geq 0$.

Theo **Ví dụ (4.2)**, ta có $f(x) = \dfrac{6x^2}{(1-x)^4}$. Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{1-x} = \dfrac{6x^2}{(1-x)^5} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ thì

$\forall k \geq 2$, $b_k = a_o + a_1 + \cdots + a_k = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + (k-1)k(k+1) = u_k$.

Suy ra $g(x) = 6x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 6C_{k+4}^k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{+\infty} 6C_{k+2}^{k-2} x^k$. Do đó $\forall k \geq 2$, $s_k = b_k = 6C_{k+2}^{k-2}$.

Vậy $\forall k \geq 2$, $s_k = \dfrac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$.

4.4/ <u>GIẢI HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG BẰNG HÀM SINH:</u>

Xét hệ thức đệ qui tuyến tính hệ số hằng $\{ a_n \mid n \geq r \}$ $(r \geq 0)$. Lập hàm sinh tương ứng

$F(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($a_i = 0$ khi $i < r$) (□) . Ta giải hệ thức đệ qui đã cho như sau:

* Bước 1: Nhân cả hai vế của hệ thức đệ qui cho x^p với p là *chỉ số cao nhất theo* n trong hệ thức đệ qui (chẳng hạn $p = n$ hoặc $p = n + 1$ hoặc $p = n + 2$, …). Lấy *tổng vô hạn hình thức* các số hạng trong hệ thức đệ qui theo các giá trị $n \geq s$ sao cho *chỉ số nhỏ nhất* trong hệ thức đệ qui sẽ $\geq r$ khi $n \geq s$. Sau đó chuyển biểu thức có được thành một phương trình hàm theo ẩn $F(x)$.

* Bước 2: Giải phương trình hàm để tìm biểu thức của $F(x)$.

* Bước 3: Khai triển $F(x)$ thành chuỗi lũy thừa và dùng (□) để tính được a_n , $\forall n \geq r$.

<u>**Ví dụ:**</u>

a) Cho $a_o = 5$ và $a_n = -4a_{n-1}, \forall n \geq 1$ (*). Tính $a_n, \forall n \geq 0$. Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Nhân hai vế của (*) với x^n rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 1$, ta có

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = -4x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1}$. Suy ra $F(x) - 5 = -4xF(x)$ và $(1 + 4x)F(x) = 5$.

Vậy $F(x) = \dfrac{5}{1+4x} = 5\sum_{n=0}^{+\infty}(-4)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, nghĩa là $a_n = 5(-4)^n$, $\forall n \geq 0$.

b) Cho $a_2 = 0$, $a_3 = -64$ và $a_{n+1} = 8a_n - 16a_{n-1}$, $\forall n \geq 3$ (*). Tính a_n, $\forall n \geq 2$. Đặt $a_o = a_1 = 0$. Nhân hai vế của (*) với x^{n+1} rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 3$, ta có

$\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 8\sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 16\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1} x^{n+1} = 8x\sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n - 16x^2\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1}$. Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Ta có $F(x) + 64x^3 = 8xF(x) - 16x^2F(x)$ và $(16x^2 - 8x + 1)F(x) = -64x^3$. Suy ra

$F(x) = \dfrac{-64x^3}{(1-4x)^2} = -64x^3\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}^{n}(4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-C_{n+1}^{n})(4x)^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty}(-4^n C_{n-2}^{n-3})x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Do đó $a_2 = 0$ và $a_n = -4^n C_{n-2}^{n-3} = (2-n)4^n$, $\forall n \geq 3$. Vậy $a_n = (2-n)4^n$, $\forall n \geq 2$.

c) Cho $a_1 = -16$, $a_2 = 2$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $\forall n \geq 1$ (*). Tính a_n, $\forall n \geq 1$.

Đặt $a_o = 0$. Nhân hai vế của (*) với x^{n+2} rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 1$, ta có

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+2} + 6\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+2} = x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} + 6x^2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (□).

Ta có $F(x) + 16x - 2x^2 = x(F(x) + 16x) + 6x^2F(x)$ và $(6x^2 + x - 1)F(x) = -18x^2 + 16x$.

Suy ra $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = F(x) = \dfrac{-18x^2+16x}{6x^2+x-1} = -3 + \dfrac{19x-3}{(2x+1)(3x-1)} = -3 + \dfrac{5}{1+2x} + \dfrac{-2}{1-3x} =$

$= -3 + 5\sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = -3 + \sum_{n=0}^{+\infty}[5(-2)^n - 2.3^n]x^n$ .Từ (□), $a_n = 5(-2)^n - 2.3^n$, $\forall n \geq 1$.

d) Cho $a_1 = -15$ và $a_{n+1} = -3a_n + 8n - 18$, $\forall n \geq 1$ (*). Tính a_n, $\forall n \geq 1$. Đặt $a_o = 0$ và $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (□). Nhân hai vế của (*) với x^{n+1} và lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 1$, ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = -3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1} - 18\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} = -3x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 8x^2(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n)' - 18x^2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Suy ra $F(x) + 15x = -3xF(x) + 8x^2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' - \dfrac{18x^2}{1-x} = -3xF(x) + \dfrac{18x^3 - 10x^2}{(1-x)^2}$. Do đó

$(1 + 3x)F(x) = \dfrac{3x^3+20x^2-15x}{(1-x)^2}$ và $F(x) = \dfrac{3x^3+20x^2-15x}{(1-x)^2(1+3x)} = 1 - \dfrac{7}{1-x} + \dfrac{2}{(1-x)^2} + \dfrac{4}{1+3x} =$

$= 1 - 7\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-3x)^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}[4(-3)^n + 2(n+1) - 7]x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}[4(-3)^n + 2n - 5]x^n$

Từ (□), ta có $a_n = 4(-3)^n + 2n - 5, \forall n \geq 1$.

e) Cho $a_o = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n + 8(n-2)(-4)^n$, $\forall n \geq 0$ (*). Tính $a_n, \forall n \geq 0$.

Nhân hai vế của (*) với x^{n+1} rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 0$, ta có

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = -4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)(-4x)^{n+1} =$

$= -4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(-4x)^{n+1} + 8\sum_{n=0}^{+\infty}(-4x)^{n+1}$. Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ thì

$F(x) + 7 = -4xF(x) + 8(\dfrac{x^2}{1+4x})' - \dfrac{32x}{1+4x} = -4xF(x) - \dfrac{16x(6x+1)}{(1+4x)^2}$. Do đó

$(1 + 4x)F(x) = \dfrac{-208x^2-72x-7}{(1+4x)^2}$ và $F(x) = \dfrac{-208x^2-72x-7}{(1+4x)^3} = \dfrac{-13}{1+4x} + \dfrac{8}{(1+4x)^2} - \dfrac{2}{(1+4x)^3} =$

$= -13\sum_{n=0}^{+\infty}(-4x)^n + 8\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}^n(-4x)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+2}^n(-4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}[8C_{n+1}^n - 2C_{n+2}^n - 13](-4)^n x^n =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Suy ra $\forall n \geq 0$, $a_n = (8C_{n+1}^n - 2C_{n+2}^n - 13)(-4)^n = (-n^2 + 5n - 7)(-4)^n$.

f) Cho $a_o = 3$, $a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 8(-1)^n$, $\forall n \geq 2$ (*). Tính $a_n, \forall n \geq 0$.

Nhân hai vế của (*) với x^n rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \geq 2$, ta có

$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n - 8\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n x^n = 2x\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 3x^2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2} - \dfrac{8x^2}{1+x}$.

Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .Ta có $F(x) + 5x - 3 = 2x[F(x) - 3] + 3x^2F(x) - \dfrac{8x^2}{1+x}$. Suy ra

$(3x^2 + 2x - 1)F(x) = \dfrac{19x^2+8x-3}{x+1}$ và $F(x) = \dfrac{-19x^2-8x+3}{(x+1)^2(1-3x)} = \dfrac{6}{1+x} - \dfrac{2}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1-3x} =$

$= 6\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}^n(-x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}[6(-1)^n - 2(n+1)(-1)^n - 3^n]x^n =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}[(4-2n)(-1)^n - 3^n]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Suy ra $\forall n \ge 0, a_n = (4-2n)(-1)^n - 3^n$.

4.5/ GIẢI MỘT SỐ HỆ THỨC ĐỆ QUI PHI TUYẾN BẰNG HÀM SINH MŨ:

Xét hệ thức đệ qui phi tuyến $\{ a_n \mid n \ge r \}$ $(r \ge 0)$. Lập hàm sinh mũ tương ứng

$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ (□). Ta giải hệ thức đệ qui phi tuyến đã cho như sau:

* Bước 1: Nhân cả hai vế của hệ thức đệ qui cho $x^p/p!$ với p là *chỉ số cao nhất theo* n trong hệ thức đệ qui (chẳng hạn $p = n$ hoặc $p = n + 1$ hoặc $p = n + 2, \ldots$). Lấy *tổng vô hạn hình thức* các số hạng trong hệ thức đệ qui theo các giá trị $n \ge s$ sao cho *chỉ số nhỏ nhất* trong hệ thức đệ qui sẽ $\ge r$ khi $n \ge s$. Sau đó chuyển biểu thức có được thành một phương trình hàm theo ẩn $E(x)$.

* Bước 2: Giải phương trình hàm để tìm biểu thức của $E(x)$.

* Bước 3: Khai triển $E(x)$ thành chuỗi lũy thừa và dùng (□) để tính được a_n , $\forall n \ge r$.

Ví dụ:

a) Cho $a_o = 1$ và $a_{n+1} = (n+1)a_n + (1 - n^2)$, $\forall n \ge 0$. Tính a_n, $\forall n \ge 0$.

Nhân hai vế của (*) với $x^{n+1}/(n+1)!$ rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \ge 0$, ta có

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)a_n}{(n+1)!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-n^2}{(n+1)!} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-n}{n!} x^{n+1} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - x^2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$ Đặt $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Ta có $E(x) - 1 = xE(x) + xe^x - x^2e^x$. Suy ra $(1 - x)E(x) = x(1 - x)e^x + 1$ và

$$E(x) = \frac{1}{1-x} + xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}[1 + \frac{1}{(n-1)!}]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n .$$

Suy ra $a_o = 1$ và $\frac{a_n}{n!} = 1 + \frac{1}{(n-1)!}, \forall n \ge 1$. Do đó $\forall n \ge 0, a_n = n! + n$.

b) Cho $a_o = 0$ và $a_{n+1} = 2(n+1)a_n + (n+1)!$, $\forall n \ge 0$. Tính a_n, $\forall n \ge 0$.

Nhân hai vế của (*) với $x^{n+1}/(n+1)!$ rồi lấy tổng theo các chỉ số $n \ge 0$, ta có

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)a_n}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{+\infty}x_n$. Đặt $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

Ta có $E(x) = 2xE(x) + \frac{x}{1-x}$ nên $(1 - 2x)E(x) = \frac{x}{1-x}$ và

$E(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(2^n-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

Suy ra $\forall n \ge 0$, $\frac{a_n}{n!} = (2^n - 1)$. Do đó $\forall n \ge 0$, $a_n = (2^n - 1)n!$.
