# CHƯƠNG 1
# CƠ SỞ TOÁN HỌC

# Nội dung

- Tensor và cơ học môi trường liên tục
- Tensor tổng quát. Tensor Cartesian.
- Vô hướng. Vector. Các phép toán.
- Dyad và Dyadics
- Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.
- Ký hiệu chỉ số. Kí hiệu lấy tổng và khoảng.
- Tensor metric. Tensor Cartesian. Các phép biến đổi hệ tọa độ cho tensor Cartesian.
- Các phép toán tensor.
- Giải tích tensor.
- Bài tập

# Tensor và Cơ học môi trường liên tục

- CM làm việc trên các đại lượng vật lý độc lập với hệ tọa độ cụ thể dùng để mô tả chúng.
- Đồng thời, những đại lượng vật lý này thường được cụ thể hóa trên một hệ tọa độ thích hợp.
- Về mặt toán học, những đại lượng này được đại diện bởi các tensor.
- Tensor như là một đối tượng toán học tồn tại độc lập với các hệ tọa độ bất kỳ
- Tuy nhiên, nó có thể được cụ thể hóa trong hệ tọa độ riêng biệt bởi các thành phần của nó. Việc chỉ rõ các thành phần của tensor trong một hệ tọa độ có thể xác định các thành phần này trong bất kỳ hệ tọa độ khác.
- Các định luật vật lý của cơ học môi trường liên tục được mô tả bằng các phương trình tensor. Các biến đổi tensor, như các phương trình tensor, nếu nó đúng trong một hệ tọa độ thì nó đúng cho bất kỳ hệ tọa độ khác. → tính bất biến.

# Tensor tổng quát. Tensor Cartesian

- Trong phép biến đổi tọa độ tổng quát giữa hai hệ tọa độ cong bất kỳ thì tensor là tensor tổng quát.
- Nếu giới hạn phép biến đổi tọa độ từ hệ tọa độ thuần nhất sang thuần nhất thì tensor là tensor Cartesian.
- Tensor được phân loại theo hạng hay bậc của nó. Hạng của tensor cho biết số thành phần của nó trong không gian n chiều.
- Ví dụ: trong không gian Euclide 3 chiều, số thành phần của 1 tensor bậc N là $3^N$.

  Tensor bậc 0, vô hướng, được xác định bằng 1 thành phần trong hệ tọa độ bất kỳ trong không gian 3 chiều.

  Tensor bậc 1, vector, được xác định bằng 3 thành phần trong hệ tọa độ bất kỳ trong không gian 3 chiều.

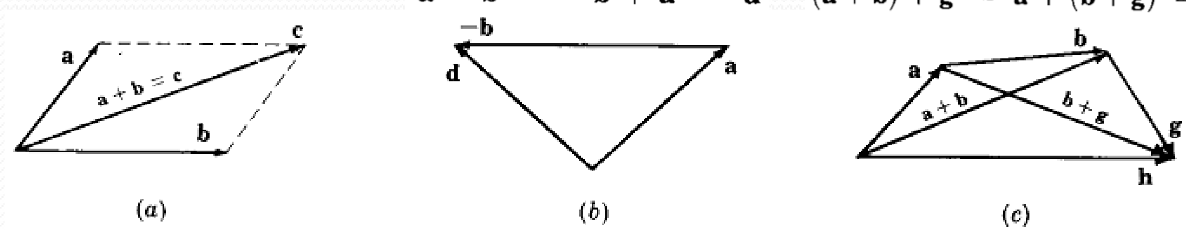
  Tensor bậc 2, dyadic, được xác định bằng 9 thành phần trong hệ tọa độ bất kỳ trong không gian 3 chiều.

# Vector. Vô hướng. Các phép toán

- Vector: tensor bậc 1, biểu diễn các đại lượng vật lý có độ lớn và hướng như: lực, vận tốc. Biểu diễn bằng các đoạn thẳng có hướng và tuân theo nguyên tắc cộng hình bình hành. Ký hiệu: **a**, **b**.
- Vô hướng: tensor bậc 0, biểu diễn các đại lượng vật lý chỉ có độ lớn như: khối lượng, năng lượng. Ký hiệu: *a*, *b*.

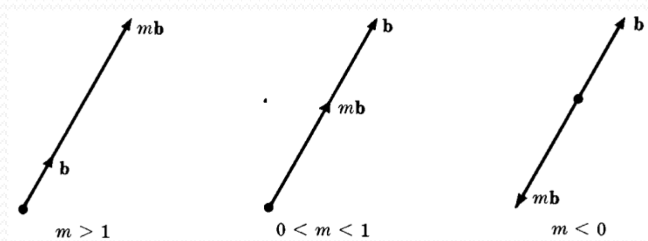
- Các phép toán:
  - Cộng vector, nhân vector với 1 vô hướng, tích vô hướng, tích hữu hướng.

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{d}$ $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \mathbf{g} = \mathbf{a} + (\mathbf{b}+\mathbf{g}) = \mathbf{h}$



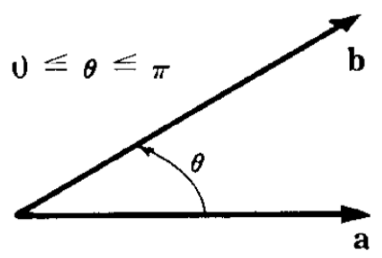

  - Nhân vector với 1 vô hướng

Vector đơn vị: $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/b$

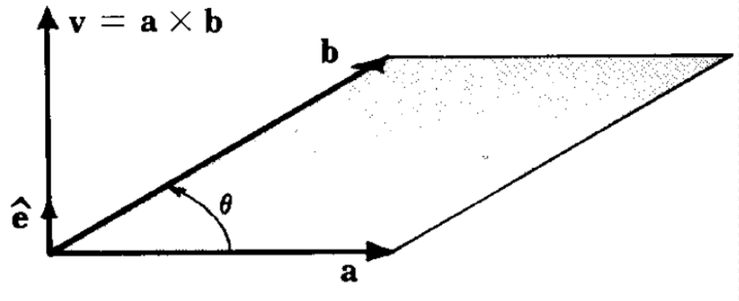


# Vector. Vô hướng. Các phép toán

- Tích vô hướng $\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = ab\cos\theta$
- Tích hữu hướng $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (ab\sin\theta)\,\hat{\mathbf{e}}$



(a)



(b)

# Dyad và Dyadic

- Dyad: tích bất định của 2 vector **ab**. (Không có tính giao hoán **ab≠ba**)
- Dyadic D tương ứng với một tensor bậc 2 và luôn được đại diện bởi tổng hữu hạn của các dyad (không duy nhất)

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_N\mathbf{b}_N$$

- Dyadic liên hợp

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{b}_N\mathbf{a}_N$$

- Vô hướng của dyadic là một vô hướng

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{b}_N$$

- Vector của dyadic là một vector

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_N \times \mathbf{b}_N$$

# Dyad và Dyadic

- Các tính chất của tích bất định

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{ac}+\mathbf{ad}+\mathbf{bc}+\mathbf{bd}$$

$$(\lambda+\mu)\mathbf{ab} = \lambda\mathbf{ab}+\mu\mathbf{ab}$$

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab}$$

- Hậu tố **D**: tích vô hướng của 1 vector với 1 dyadic như sau:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{D} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2+\cdots+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \mathbf{u}$$

- Tiền tố **D**: tích vô hướng của 1 vector với 1 dyadic như sau: :

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v})+\mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v})+\cdots+\mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

- Hai dyadic **D** và **E** là bằng nhau khi và chỉ khi với mọi vector **v** đều thỏa

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

# Dyad và Dyadic

- Dyadic đơn vị **I**

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

với $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ là cơ sở trực giao bất kỳ của không gian Euclide 3 chiều

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{v}$$

- Tích hữu hướng

$$\mathbf{v}\times\mathbf{D} = (\mathbf{v}\times\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v}\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\times\mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{D}\times\mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\times\mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\times\mathbf{v}) + \cdots + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\times\mathbf{v}) = \mathbf{G}$$

là các dyadic.

- Tích vô hướng của các dyad

$$\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{ad}$$

là các dyad.

- Tích vô hướng của các dyadic

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} &= (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_N\mathbf{b}_N)\cdot(\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{d}_2 + \cdots + \mathbf{c}_N\mathbf{d}_N)\\ &= (\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{d}_1 + (\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}_2)\mathbf{a}_1\mathbf{d}_2 + \cdots + (\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{c}_N)\mathbf{a}_N\mathbf{d}_N = \mathbf{G}\end{aligned}$$

là các dyadic.

# Dyad và Dyadic

- Các dyadic **D** và **E** được gọi là nghịch đảo của nhau khi

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{I}$$

hay $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$ và $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1}$

- Tích vô hướng và hữu hướng đôi của các dyad

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} : \mathbf{cd} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) &&= \lambda, && \text{a scalar}\\
\mathbf{ab} \overset{\times}{\cdot} \mathbf{cd} &= (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) &&= \mathbf{h}, && \text{a vector}\\
\mathbf{ab} \overset{\cdot}{\times} \mathbf{cd} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) &&= \mathbf{g}, && \text{a vector}\\
\mathbf{ab} \overset{\times}{\times} \mathbf{cd} &= (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) &&= \mathbf{uw}, && \text{a dyad}
\end{aligned}$$

- Dyadic tự liên hợp, đối xứng

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c$$

- Dyadic phản xứng

$$\mathbf{D} = -\mathbf{D}_c$$

# Dyad và Dyadic

- Mỗi dyadic có thể phân tích thành tổng của các dyadic đối xứng và phản xứng

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_c) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_c) = \mathbf{G} + \mathbf{H}$$

với **G** là dyadic đối xứng và H là dyadic phản xứng

$$\mathbf{G}_c = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}_c + (\mathbf{D}_c)_c) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}_c + \mathbf{D}) = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{H}_c = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}_c - (\mathbf{D}_c)_c) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}_c - \mathbf{D}) = -\mathbf{H}$$

- Sự phân tích ở trên là duy nhất.

# Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.

- Trong một hệ tọa độ cụ thể, một vector được xác định thông qua các thành phần của nó trong hệ tọa độ đó. Hệ tọa độ giúp xác định độ lớn, chiều thông qua các trục tọa độ.
- Hệ tọa độ vuông góc Cartesian Oxyz được biểu diễn thông qua ba trục tọa độ vuông góc. Một vector **v** bất kỳ trong hệ tọa độ này được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của 3 vector cơ sở.

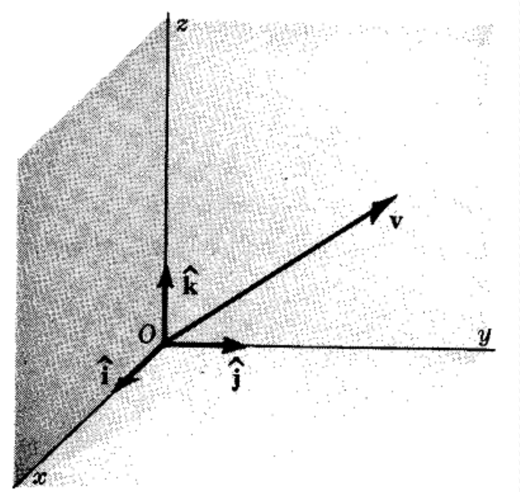
$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$$

- Thông thường các vector đơn vị được chọn làm cơ sở cho hệ tọa độ Cartesian. Hay còn gọi là cơ sở trực giao:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$



# Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.

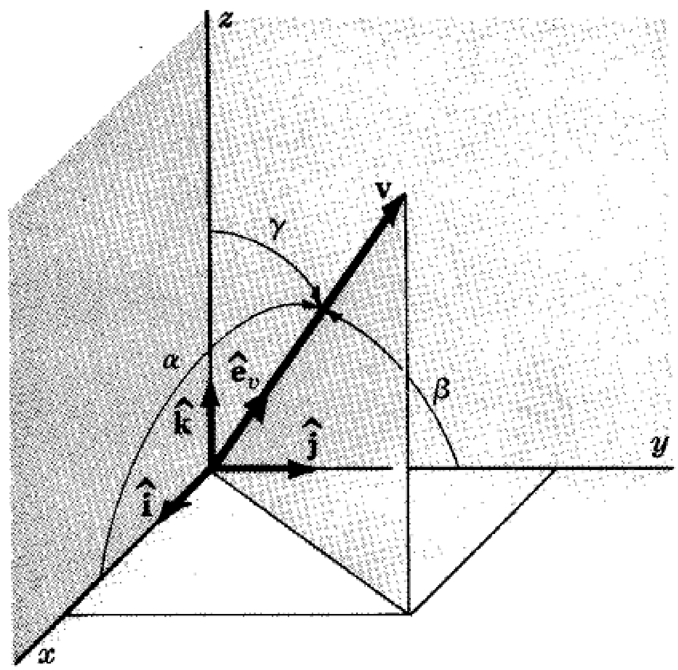
- Như vậy, một vector v có thể biểu diễn thông qua hệ 3 vector cơ sơ này như sau:

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

trong đó các thành phần Cartesian

$$\begin{aligned} v_x &= \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{i}} = v\cos\alpha \\ v_y &= \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{j}} = v\cos\beta \\ v_z &= \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}} = v\cos\gamma \end{aligned}$$

là các hình hiếu của **v** lên các trục tọa độ.




- Vector đơn vị theo hướng **v** cho bởi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_v &= \mathbf{v}/v \\ &= (\cos\alpha)\hat{\mathbf{i}} + (\cos\beta)\hat{\mathbf{j}} + (\cos\gamma)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

# Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.

- Trong hệ tọa độ Cartesian, tích vô hướng và hữu hướng của của các vector lần lượt là

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}})\cdot(b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

Với tích hữu hướng có thể tính như sau:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

# Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.

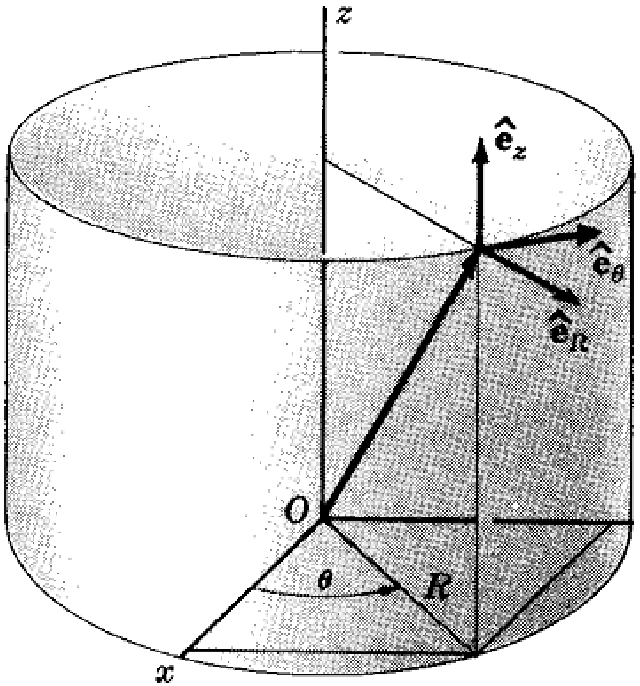
- Dyad trong hệ tọa độ Cartesian có dạng

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}})(b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= a_x b_x\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} + a_x b_y\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{j}} + a_x b_z\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{k}} \\ &\qquad + a_y b_x\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{i}} + a_y b_y\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{j}} + a_y b_z\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{k}} \\ &\qquad\qquad + a_z b_x\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{i}} + a_z b_y\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{j}} + a_z b_z\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

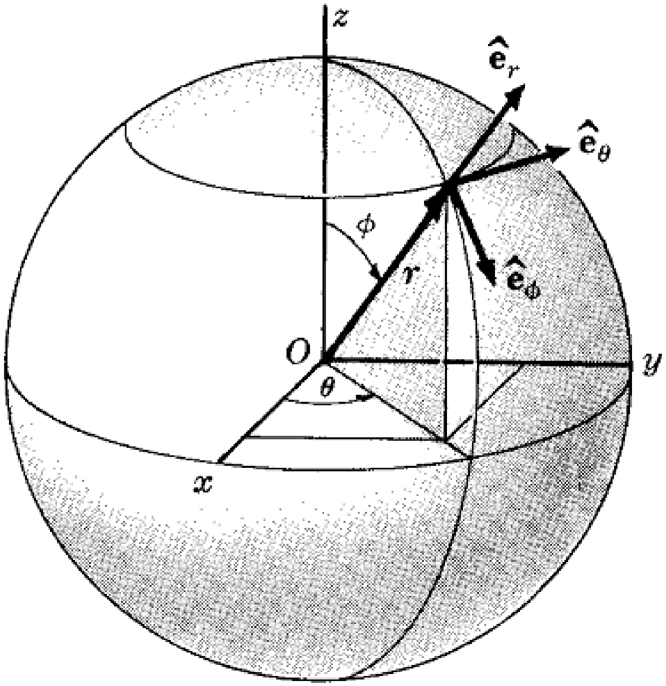
Với chín hệ số, biểu thức trên còn được gọi là dạng “nonion” của dyad **ab**.

# Hệ tọa độ. Vector cơ sở. Vector đơn vị.

- Ngoài hệ tọa độ Cartensian, các hệ tọa độ cong như hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu cũng được sử dụng rộng rãi. Bộ ba vector cơ sở của các hệ tọa độ này không cố định về hướng, và do đó, tổng quát, chúng là hàm của vị trí.




(a) Cylindrical




(b) Spherical

# Ký hiệu chỉ số. Ký hiệu lấy tổng và khoảng.

- Các thành phần của một tensor có bậc bất kỳ có thể được biểu diễn ngắn gọn và rõ ràng bằng ký hiệu chỉ số.
- Ký hiệu chỉ số, chỉ số ký tự, có thể là chỉ số trên hoặc chỉ số dưới cho biết về lượng của tensor.

$$a_i,\quad b^j,\quad T_{ij},\quad F_i{}^j,\quad \epsilon_{ijk},\quad R^{pq}$$

- Chỉ số tự do: khi chỉ số chỉ xuất hiện 1 lần (không lặp lại) thì nó được hiểu là sẽ lấy các giá trị 1, 2, …, N trong đó N xác định phạm vi của chỉ số.
- Chỉ số câm hay chỉ số lấy tổng: khi chỉ số xuất hiện 2 lần (lặp lại) nó sẽ lấy tất cả các giá trị trong phạm vi (khoảng) và lấy tổng tất cả chúng.
- Thông thường, các chỉ số không được lặp quá 2 lần. Nếu trong trường hợp cần phải lặp quá 2 lần để biểu diễn một đại lượng thì khi đó ký hiệu lấy tổng sẽ không được sử dụng.

# Ký hiệu chỉ số. Ký hiệu lấy tổng và khoảng.

- Số các chỉ số tự do và vị trí của chúng cho ta biết chính xác đặc tính của tensor về lượng. Ví dụ:

Tensor bậc 1: $a_i,\ a^i$ hay $a_{ij}b_j,\ F_{ikk},\ R^{p}_{\cdot qp},\ \epsilon_{ijk}u_j v_k$

Tensor bậc 2: $D^{ij},\ D_i^{\cdot j}$ or $D^{i}_{\cdot j},\ D_{ij}$

Lưu ý, trong dạng hỗn hợp, "." ám chỉ j là chỉ số thứ hai.

Tensor bậc 2 có thể viết dưới dạng khác như:

$A_{ijip},\ B^{ij}_{\cdot\cdot jk},\ \delta_{ij}u_k v_k$

Tensor bậc 3.

Tensor bậc 0: không có chỉ số λ.

# Ký hiệu chỉ số. Ký hiệu lấy tổng và khoảng.

- Trong không gian vật lý thông thường, ký hiệu $a_i$ vừa đại diện thành phần thứ i của vector **a** vừa đại diện cho chính vector **a** (có 3 thành phần $a_1, a_2, a_3$). Dạng tường minh của vector là:

$$a_i = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{or} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Đối với tensor hạng hai hay dyadic: được biểu diễn bởi $A_{ij}$ gồm chín thành phần. Dạng tường minh của $A_{ij}$:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

# Ký hiệu chỉ số. Ký hiệu lấy tổng và khoảng.

- Ký hiệu chỉ số rất hữu ích trong việc biểu diễn các hệ phương trình một cách cô đọng. Ví dụ:

$$x_i = c_{ij} z_j \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + c_{13} z_3 \\ x_2 &= c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3 \\ x_3 &= c_{31} z_1 + c_{32} z_2 + c_{33} z_3 \end{aligned}$$

$$A_{ij} = B_{ip} C_{jq} D_{pq} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} A_{11} &= B_{11} C_{11} D_{11} + B_{11} C_{12} D_{12} + B_{12} C_{11} D_{21} + B_{12} C_{12} D_{22} \\ A_{12} &= B_{11} C_{21} D_{11} + B_{11} C_{22} D_{12} + B_{12} C_{21} D_{21} + B_{12} C_{22} D_{22} \\ A_{21} &= B_{21} C_{11} D_{11} + B_{21} C_{12} D_{12} + B_{22} C_{11} D_{21} + B_{22} C_{12} D_{22} \\ A_{22} &= B_{21} C_{21} D_{11} + B_{21} C_{22} D_{12} + B_{22} C_{21} D_{21} + B_{22} C_{22} D_{22} \end{aligned}$$

# Ký hiệu chỉ số. Ký hiệu lấy tổng và khoảng.

- Kí hiệu lấy tổng thường được dùng để biểu diễn tensor và vector. Một vector bất kỳ trong hệ tọa độ vuông góc Cartesian

$$\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

được viết dưới dạng chỉ số lấy tổng

$$\mathbf{v} = v_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

- Tensor bậc 2 có thể được đại diện bởi tổng các vector cơ sở theo chỉ số.

Dạng nonion của 1 dyad **ab**:

$$\mathbf{ab} = (a_i\hat{\mathbf{e}}_i)(b_j\hat{\mathbf{e}}_j) = a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j$$

Dạng nonion của 1 dyadic **D**:

$$\mathbf{D} = D_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j$$

# Phép biến đổi tọa độ. Tensor tổng quát

- Xét hai hệ tọa độ $x^i$ và $\theta^i$ trong cùng không gian Euclide 3 chiều.
- Phương trình biến đổi tọa độ biến 1 điểm bất kì $(x^1,x^2,x^3)$ trong hệ $x^i$ thành tọa độ mới $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ trong hệ tọa độ $\theta^i$ :

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3)$$

- Hàm $\theta^i$ : là hàm khả vi liên tục và đơn trị. Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \quad \text{hay} \quad J = \left|\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\right|$$

- Nếu J không suy biến thì tồn tại phép biến đổi ngược

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$$

# Phép biến đổi tọa độ. Tensor tổng quát

- Từ: $\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3)$

$$\longrightarrow \quad d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j$$

là phương trình định nghĩa lớp các tensor được gọi là vector phản biến.

- Tập các **đại lượng $b^i$** ứng với điểm P là thành phần của một **tensor phản biến (contravariant)** bậc 1 nếu chúng biến đổi theo phương trình chuyển hệ tọa độ có dạng

$$b'^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} b^j \qquad (1.77)$$

Với $b^j$ là thành phần trong hệ tọa độ $x^j$ và $b'^i$ là thành phần trong hệ tọa độ $\theta^i$.

- Tương tự như vậy, một tensor phản biến bậc hai có các thành phần thỏa phép biến đổi

$$B'^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^s} B^{rs} \qquad (1.78)$$

# Phép biến đổi tọa độ. Tensor tổng quát

- Tập các **đại lượng $b_i$** ứng với điểm P là thành phần của một **tensor hiệp biến (covariant)** bậc 1 nếu chúng biến đổi theo dạng

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} b_j \tag{1.80}$$

Với $b'_i$ là thành phần trong hệ tọa độ $\theta^i$ và $b_i$ là thành phần trong hệ tọa độ $x_i$.

- Vector hiệp biến là đạo hàm riêng của một hàm vô hướng. Ví dụ, từ phương trình $x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, nếu $\phi = \phi(x^1, x^2, x^3)$ thì

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \tag{1.79}$$

- Tương tự như vậy, một tensor hiệp biến bậc hai có các thành phần thỏa phép biến đổi

$$B'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs} \tag{1.81}$$

# Tensor metric. Tensor Cartesian.

- Cho $x^i$: hệ tọa độ vuông góc Cartesian và $\theta^i$ là hệ tọa độ bất kỳ trong cùng một không gian. Vector **x** là vector vị trí của điểm $P(x^1,x^2,x^3)$
- Bình phương khoảng cách của một vi phân phần tử giữa hai điểm kề nhau P(**x**) và Q(**x**+d**x**) là

$$(ds)^2 = dx^i\,dx^i \qquad (1.83)$$

Mà

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p}\,d\theta^p \qquad (1.85)$$

$$\Rightarrow (ds)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p}\frac{\partial x^i}{\partial \theta^q}\,d\theta^p\,d\theta^q = g_{pq}\,d\theta^p\,d\theta^q \qquad (1.86)$$

trong đó $g_{pq} = (\partial x^i/\partial\theta^p)(\partial x^i/\partial\theta^q)$ là tensor metric hay fundamental tensor

- Nếu $\theta^i$ là hệ tọa độ vuông góc Cartesian thì

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq} \qquad (1.87)$$

trong đó $\delta_{pq}$ là ký hiệu Kronecker delta.

# Tensor metric. Tensor Cartesian.

- Hệ tọa độ bất kỳ trong đó phần tử vi phân bình phương khoảng cách có dạng (1.83) được gọi là hệ tọa độ thuần nhất.
- Phép biến đổi tọa độ giữa hai hệ thuần nhất gọi là phép biến đổi trực giao (orthogonal tranformation). Và nếu chỉ giới hạn trong phép biến đổi này thì tensor được gọi là tensor Cartesian. Cụ thể, đây là trường hợp dành cho các phép biến đổi giữa các hệ tọa độ vuông góc Cartesian có chung gốc tọa độ.
- Trường hợp tensor Cartesian thì không có sự khác biệt giữa các thành phần hiệp biến và phản biến. Trong trường hợp này, kí hiệu chỉ số dưới được dùng chung để mô tả tensor Cartesian.

# Phép biến đổi tọa độ cho tensor Cartesian

- Mối quan hệ giữa hai hệ trục tọa độ vuông góc Cartesian cho bởi các cosin chỉ phương $a_{ij}=\cos(x'_i,x_j)$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x'_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $x'_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $x'_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

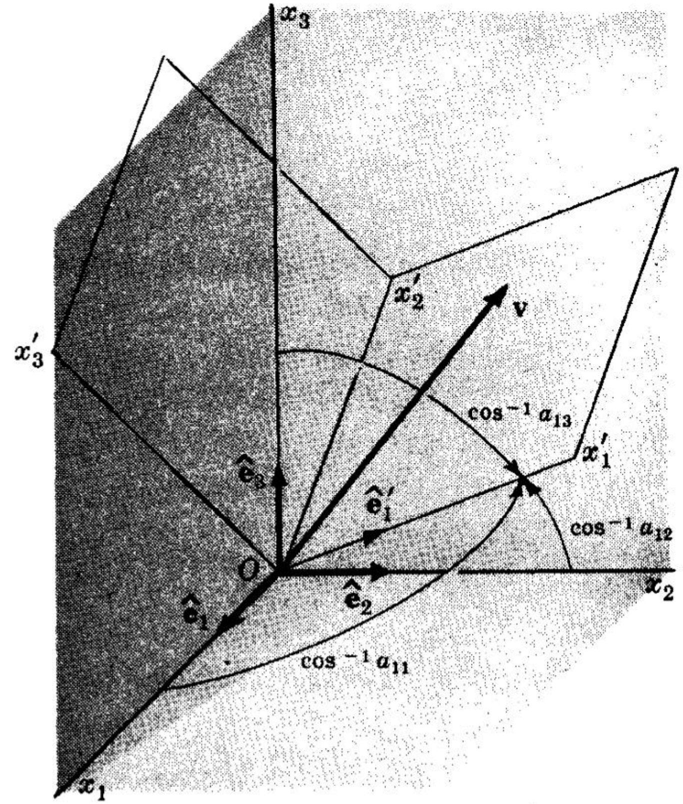



Fig. 1-9

- Tensor biến đổi tọa độ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Phép biến đổi tọa độ cho tensor Cartesian

- Tọa độ vector đơn vị thứ i $\hat{\mathbf{e}}_i'$ trong hệ tọa độ $x_i$:

$$\hat{\mathbf{e}}_i' = a_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (1.89)$$

$$\mathbf{v} = v_j\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (1.90)$$

$$\mathbf{v} = v_i'\hat{\mathbf{e}}_i' \qquad (1.91)$$

$$\mathbf{v} = v_i' a_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j \qquad (1.92)$$

$$\Rightarrow \quad v_j = a_{ij}v_i' \qquad (1.93)$$

phép biến đổi cho tensor Cartesian bậc nhất. Đây là trường hợp đặc biệt của (1.80) và (1.77).

- Phép biến đổi ngược:

$$v_i' = a_{ij}v_j \qquad (1.94)$$

$$\Rightarrow \quad v_j = a_{ij}a_{ik}v_k \qquad (1.95)$$

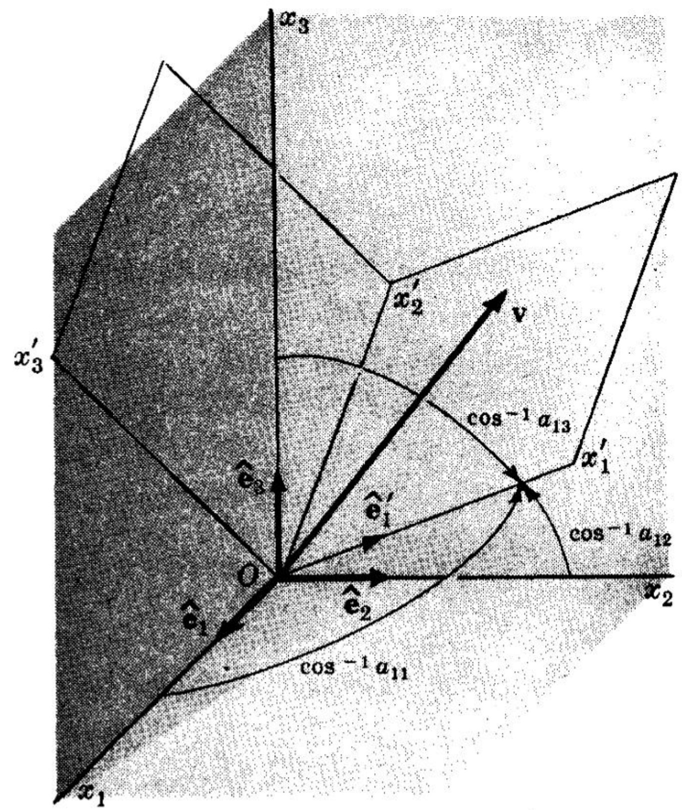



Fig. 1-9

# Phép biến đổi tọa độ cho tensor Cartesian

$$v_j = a_{ij} a_{ik} v_k \qquad (1.95)$$

Vì vector **v** là bất kỳ, (1.95) phải trở thành $v_j = v_j$.

$$\Rightarrow \quad a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (1.97)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \qquad (1.96)$$

(1.97) là điều kiện trực giao.

- Tương tự, $v_i = a_{ij} a_{kj} v'_k$

  Tương ứng, điều kiện trực giao:

$$a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \qquad (1.98)$$

- Phép biến đổi tuyến tính (1.93) và (1.94) với các hệ số thỏa các điều kiện trực giao (1.97) và (1.98) được gọi là phép biến đổi trực giao.

# Phép biến đổi tọa độ cho tensor Cartesian

- Kronecker delta còn được gọi là phép thế:

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3 = b_i$$

$$\delta_{ij} F_{ik} = \delta_{1j} F_{1k} + \delta_{2j} F_{2k} + \delta_{3j} F_{3k} = F_{jk}$$

- Theo phép biến đổi (1.94), dyad $u_i v_j$ có các thành phần trong hệ tọa độ mới là

$$u_i' v_j' = (a_{ip} u_p)(a_{jq} v_q) = a_{ip} a_{jq} u_p v_q$$

  - Như vậy, một tensor bậc hai $T_{ij}$ có quy luật biến đổi như sau

$$T_{ij}' = a_{ip} a_{jq} T_{pq} \tag{1.102}$$

  - Với phép biến đổi trực giao, ta có phép biến đổi ngược từ hệ sau thành hệ trước

$$T_{ij} = a_{pi} a_{qj} T_{pq}' \tag{1.103}$$

- Đối với tensor cấp bất kì, quy luật biến đổi cho tensor bậc thứ N là

$$T_{ijk\ldots}' = a_{ip} a_{jq} a_{km} \ldots T_{pqm\ldots} \tag{1.104}$$

# Các phép toán tensor: phép cộng và nhân với vô hướng

- Phép cộng: $A_{ijk\ldots} \pm B_{ijk\ldots} = T_{ijk\ldots}$ (1.105)
- Phép nhân vô hướng với tensor

$$b_i = \lambda a_i \quad \text{or} \quad \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \tag{1.106}$$

$$B_{ij} = \lambda A_{ij} \quad \text{or} \quad \mathbf{B} = \lambda \mathbf{A} \tag{1.107}$$

# Các phép toán tensor: nhân tensor

- Tích ngoài

$$(a)\quad a_i b_j = T_{ij} \qquad (c)\quad D_{ij} T_{km} = \Phi_{ijkm}$$

$$(b)\quad v_i F_{jk} = \alpha_{ijk} \qquad (d)\quad \epsilon_{ijk} v_m = \Theta_{ijkm}$$

- Tích cuộn (contraction)

(a) Contractions of $T_{ij}$ and $u_i v_j$

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

(b) Contractions of $E_{ij} a_k$

$$E_{ij} a_j = b_i$$

$$E_{ij} a_i = c_j$$

$$E_{ii} a_k = d_k$$

(c) Contractions of $E_{ij} F_{km}$

$$E_{ij} F_{im} = G_{jm} \qquad E_{ij} F_{kk} = P_{ij}$$

$$E_{ij} F_{ki} = H_{jk} \qquad E_{ij} F_{jm} = Q_{im}$$

$$E_{ii} F_{km} = K_{km} \qquad E_{ij} F_{kj} = R_{ik}$$

# Các phép toán tensor: tích hữu hướng vector. Kí hiệu hoán vị. Vector đối ngẫu

- Kí hiệu hoán vị: một tensor bậc ba

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if the values of } i,j,k \text{ are an } \textit{even permutation} \text{ of } 1,2,3 \text{ (i.e. if they appear in sequence as in the arrangement } 1\,2\,3\,1\,2\text{).} \\ -1 & \text{if the values of } i,j,k \text{ are an } \textit{odd permutation} \text{ of } 1,2,3 \text{ (i.e. if they appear in sequence as in the arrangement } 3\,2\,1\,3\,2\text{).} \\ 0 & \text{if the values of } i,j,k \text{ are } \textit{not} \text{ a permutation of } 1,2,3 \text{ (i.e. if two or more of the indices have the same value).} \end{cases}$$

- Tích hữu hướng vector: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$

$$\epsilon_{ijk} a_j b_k = c_i \qquad (1.108)$$

- Vector đối ngẫu (dual vector) của một tensor Cartesian bậc hai:

$$v_i = \epsilon_{ijk} T_{jk} \qquad (1.110)$$

# Ma trận. Biểu diễn ma trận của tensor Cartesian

- Tích vô hướng của vector

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \lambda \qquad [a_{1j}][b_{j1}] = [\lambda]$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda \qquad [a_1, a_2, a_3]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3]$$

- Tích vô hướng vector-dyadic

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{b} \qquad a\mathcal{E} = \mathcal{B}$$

$$a_i E_{ij} = b_j \qquad [a_{1i}][E_{ij}] = [b_{1j}]$$

$$[a_1, a_2, a_3]\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix}[a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31}, \\ a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32}, \\ a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33}]\end{matrix} \qquad (1.120)$$

# Ma trận. Biểu diễn ma trận của tensor Cartesian

- Tích vô hướng dyadic-vector

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c} \qquad \mathcal{E}a = c$$

$$E_{ij}a_j = c_i \qquad [E_{ij}][a_{j1}] = [c_{i1}]$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1E_{11} + a_2E_{12} + a_3E_{13} \\ a_1E_{21} + a_2E_{22} + a_3E_{23} \\ a_1E_{31} + a_2E_{32} + a_3E_{33} \end{bmatrix} \tag{1.121}$$

# Giá trị chính và hướng chính của tensor đối xứng bậc 2

- Với mỗi tensor đối xứng bậc hai, đều có tương ứng với mỗi hướng (hướng pháp tuyến) tại điểm đó một vector cho bởi tích trong

$$v_i = T_{ij} n_j \qquad (1.128)$$

- Nếu có 1 hướng sao cho $v_i$ song song với $n_i$, thì khi đó tích trong sẽ được thay bằng tích vô hướng

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i \qquad (1.129)$$

với $n_j$ được gọi là hướng chính.

- Phương trình đặc trưng: $\lambda^3 - \mathrm{I}_T \lambda^2 + \mathrm{II}_T \lambda - \mathrm{III}_T = 0$

$$\mathrm{I}_T = T_{ii} = \operatorname{tr} T_{ij} \ \text{(trace of } T_{ij}\text{)} \qquad (1.134)$$

$$\mathrm{II}_T = \tfrac{1}{2}(T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ij}) \qquad (1.135)$$

$$\mathrm{III}_T = |T_{ij}| = \det T_{ij} \qquad (1.136)$$

# Giá trị chính và hướng chính của tensor đối xứng bậc 2

- Giải phương trình đặc trưng ta được các giá trị chính.
- Hướng chính: được xác định bằng các cosin chỉ phương.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1^*$ | $a_{11} = n_1^{(1)}$ | $a_{12} = n_2^{(1)}$ | $a_{13} = n_3^{(1)}$ |
| $x_2^*$ | $a_{21} = n_1^{(2)}$ | $a_{22} = n_2^{(2)}$ | $a_{23} = n_3^{(2)}$ |
| $x_3^*$ | $a_{31} = n_1^{(3)}$ | $a_{32} = n_2^{(3)}$ | $a_{33} = n_3^{(3)}$ |

# Các trường tensor. Đạo hàm tensor

- Một trường tensor được ký hiệu là một tensor **T**(**x**,t), với x là vector vị trí thay đổi trong không gian và t là thời gian.
- Trường tensor liên tục (hoặc khả vi) nếu các thành phần của **T**(**x**,t) là các hàm liên tục hoặc khả vi theo **x** và t.
- Nếu các thành phần của trường tensor chỉ là hàm theo x thì nó được gọi là nghỉ (steady).

# Các trường tensor. Đạo hàm tensor

- Trong hệ tọa độ Đề-các: vector vị trí tại điểm bất kì là

$$\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{e}}_i \tag{1.142}$$

- Theo đó, các trường tensor có bậc khác nhau có thể được kí hiệu như sau:
  - Trường vô hướng: $\phi = \phi(x_i, t) \quad \text{or} \quad \phi = \phi(\mathbf{x}, t)$
  - Trường vector: $v_i = v_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$
  - Trường tensor bậc 2: $T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$

# Các trường tensor. Đạo hàm tensor

- Một số ký hiệu trong giải tích tensor
  - Đạo hàm riêng: $\partial / \partial x_i = \partial_i$
  - Toán tử del: $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_i$

$$(a)\quad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \qquad (d)\quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$$

$$(b)\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} \qquad (e)\quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$$

$$(c)\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} \qquad (f)\quad \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km}$$

$$\operatorname{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{or} \quad \partial_i \phi = \phi_{,i}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} \quad \text{or} \quad \partial_i v_i = v_{i,i}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} \quad \text{or} \quad \epsilon_{ijk}\partial_j v_k = \epsilon_{ijk} v_{k,j}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi \quad \text{or} \quad \partial_{ii}\phi = \phi_{,ii}$$

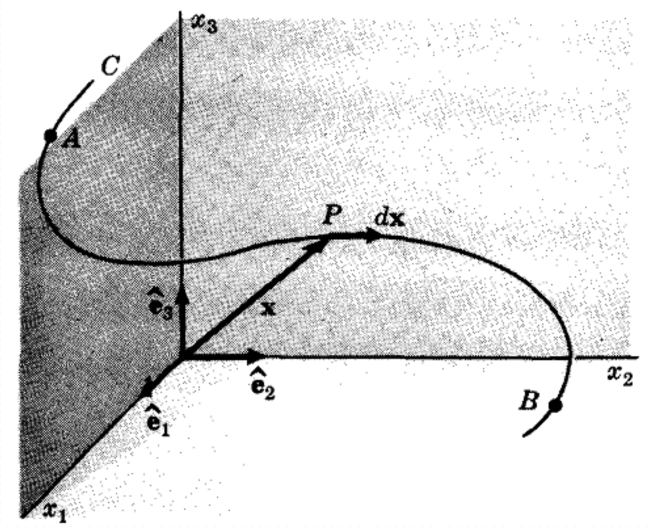
# Tích phân đường. Định lý Stoke

- Tích phân đường trên đường cong C

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} \equiv \int_{\mathbf{x}_A}^{\mathbf{x}_B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

Dạng chỉ số:

$$\int_C F_i\,dx_i \equiv \int_{(x_i)_A}^{(x_i)_B} F_i\,dx_i$$

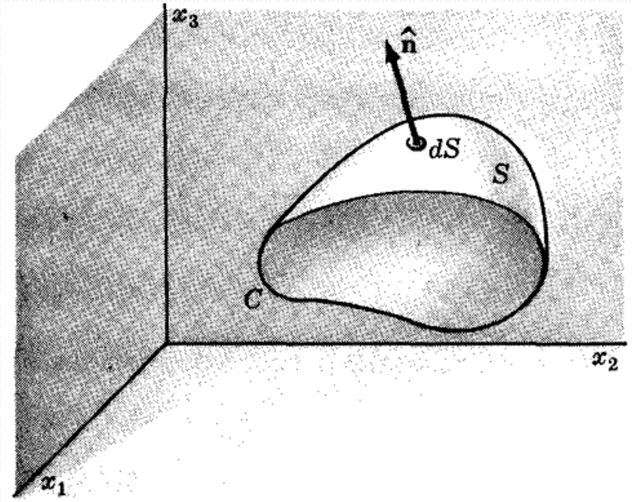



- Định lý Stoke

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})\,dS$$

Dạng chỉ số:

$$\oint_C F_i\,dx_i = \int_S n_i\epsilon_{ijk}F_{k,j}\,dS$$



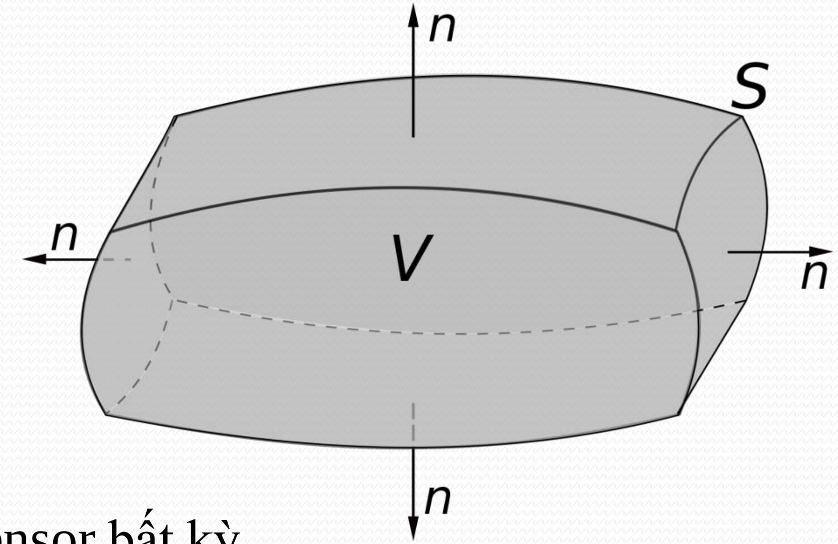
# Định lý divergence

- Dạng vector của định lý divergence

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, dS$$

Dạng chỉ số:

$$\int_V v_{i,i}\, dV = \int_S v_i n_i\, dS$$




- Trường hợp tổng quát cho trường tensor bất kỳ

$$\int_V T_{ijk\ldots,p}\, dV = \int_S T_{ijk\ldots} n_p\, dS$$