# CHƯƠNG 3
# BIẾN DẠNG

# Hạt vật chất và vị trí

- Hạt vật chất (particle) -  chất điểm: phần tử thể tích bé trong môi trường liên tục
- Vị trí (point) – điểm không gian: vị trí trong không gian cố định.

# Cấu hình môi trường liên tục. Khái niệm biến dạng và dòng chảy.

- Cấu hình môi trường liên tục (continuum configuration)

  ○ Tại thời điểm t bất kỳ, MTLT (V, S) chiếm một vùng R trong KG vật lý.

  ○ Việc nhận biết các hạt vật chất của MTLT chiếm các điểm trong không gian tại thời điểm t bằng cách tham chiếu vào một tập các trục tọa độ thích hợp được nói là xác định **cấu hình của môi trường liên tục** tại thời điểm đó.

- **Biến dạng** (deformation): chỉ sự thay đổi về hình dạng của MTLT giữa cấu hình chưa biến dạng và cấu hình sau biến dạng. Không quan tâm đến trạng thái trung gian hoặc quá trình thay đổi biến dạng.

- **Dòng chảy** (flow): ngược lại với biến dạng, dòng chảy được dùng để chỉ trạng thái liên tục của chuyển động của MTLT. Lịch sử cấu hình của dòng chảy được xác định theo một trường vận tốc phụ thuộc vào thời gian.

# Vector vị trí. Vector chuyển vị

- Trong cấu hình chưa biến dạng, một phần tử đại diện của MTLT chiếm điểm $P_0$ trong không gian và có **vector vị trí** theo hệ tọa độ $OX_1X_2X_3$

$$\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{I}}_1 + X_2\hat{\mathbf{I}}_2 + X_3\hat{\mathbf{I}}_3 = X_K\hat{\mathbf{I}}_K \qquad (3.1)$$

o Lưu ý: chỉ số dưới in hoa trong (3.1) để chỉ mối liên hệ trong hệ tọa độ $(X_1X_2X_3)$, được gọi là hệ tọa độ vật chất (material coordinate).

- Trong cấu hình biến dạng, hạt vật chất ban đầu $P_0$ chiếm vị trí P và có **vector vị trí** trong hệ tọa độ $ox_1x_2x_3$ là

$$\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3 = x_i\hat{\mathbf{e}}_i \qquad (3.2)$$

o Lưu ý: hệ tọa độ $(x_1x_2x_3)$, được gọi là hệ tọa độ không gian (spatial coordinate).

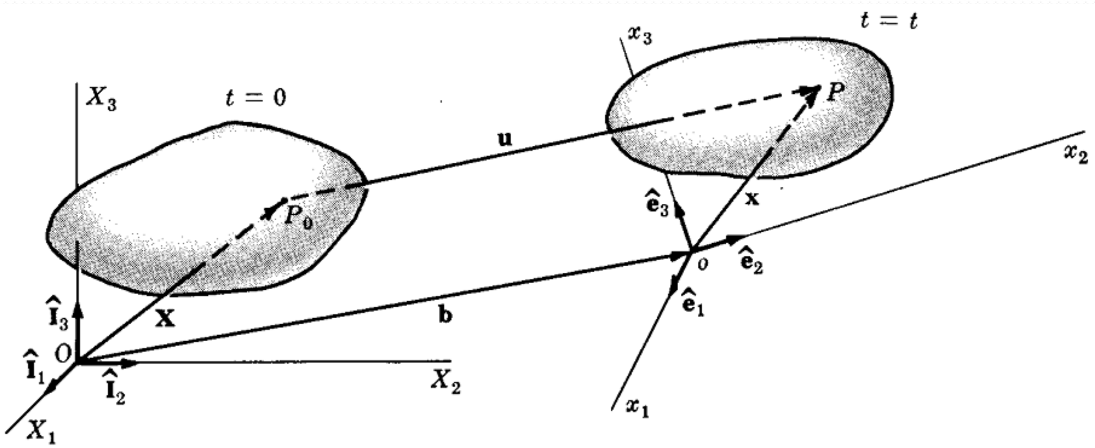



Fig. 3-1

# Vector vị trí. Vector chuyển vị

- Mối liên hệ giữa hệ tọa độ vật chất và hệ tọa độ không gian được cho bởi ma trận cosine chỉ hướng

$$\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{I}}_K = \hat{\mathbf{I}}_K \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \alpha_{kK} = \alpha_{Kk} \tag{3.3}$$

- Điều kiện trực giao:

$$\alpha_{Kk}\alpha_{Kp} = \alpha_{kK}\alpha_{pK} = \delta_{kp}; \quad \alpha_{Kp}\alpha_{Mp} = \alpha_{pK}\alpha_{pM} = \delta_{KM} \tag{3.4}$$

- **Vector chuyển vị**: vector **u** nối hai điểm $P_0$ và P:

$$\mathbf{u} = u_k \hat{\mathbf{e}}_k \tag{3.5}$$

$$\mathbf{U} = U_K \hat{\mathbf{I}}_K \tag{3.6}$$

○ Lưu ý: $u_k$ và $U_K$ liên hệ với nhau bằng cosine chỉ hướng $\alpha_{kK}$. $\hat{\mathbf{e}}_k = \alpha_{kK}\hat{\mathbf{I}}_K$

$$\mathbf{u} = u_k(\alpha_{kK}\hat{\mathbf{I}}_K) = U_K\hat{\mathbf{I}}_K = \mathbf{U} \tag{3.8}$$

$$U_K = \alpha_{kK}u_k \tag{3.9}$$

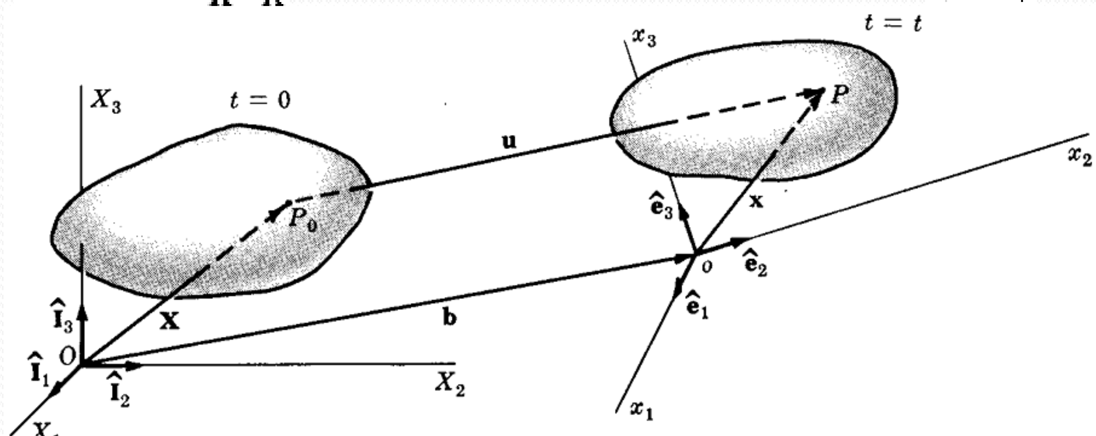



Fig. 3-1

# Vector vị trí. Vector chuyển vị

- Vector chuyển vị:

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{X} \qquad (3.10)$$

với **b** là vector nối hai gốc tọa độ o và O.

- Thường trong cơ học MTLT, có thể xem hai hệ tọa độ $OX_1X_2X_3$ và $ox_1x_2x_3$ là chồng lên nhau, khi đó **b=0**

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \qquad (3.11)$$

- Trong hệ tọa độ Cartesian, dạng tổng quát của phương trình trên là

$$u_k = x_k - \alpha_{kK} X_K \qquad (3.12)$$

Do các trục tọa độ của hai hệ trục trùng nhau nên

$$u_k = x_k - X_k \qquad (3.13)$$

<u>Lưu ý</u>: trong phần còn lại của giáo trình, nếu không có gì đặc biệt, ta sẽ giả thiết hai hệ trục trên chồng lên nhau.

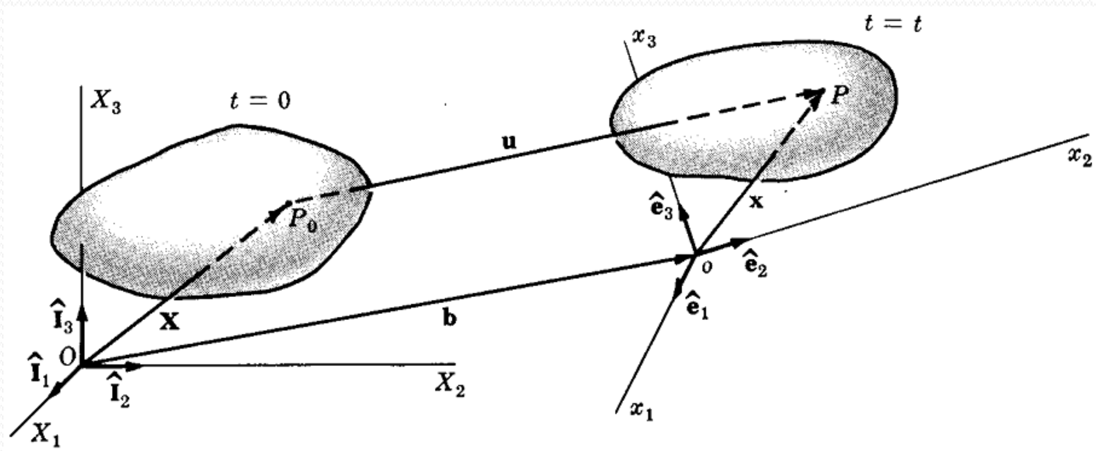



Fig. 3-1

# Mô tả theo Lagrange và mô tả theo Euler

- Khi MTLT biến dạng (hoặc có dòng chảy), các hạt vật chất (chất điểm) của nó dịch chuyển dọc theo các đường khác nhau trong không gian. Chuyển động của chúng cho bởi phương trình

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \qquad (3.14)$$

  ○ Phương trình cho biết vị trí hiện thời $x_i$ của hạt vật chất đã chiếm vị trí $(X_1X_2X_3)$ tại thời điểm t=0.

  ○ Phương trình (3.14) có thể được xem như ánh xạ từ cấu hình ban đầu vào cấu hình hiện thời. Ánh xạ được giả thiết là song ánh liên tục, có đạo hàm riêng liên tục theo bậc bất kỳ nếu cần.

  ○ Mô tả chuyển động hay biến dạng theo phương trình (3.14) được gọi là **mô tả theo Lagrange**. $X_i$ được gọi là **biến Lagrange** theo (*).

(*) Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong, Nhập môn cơ học.

# Mô tả theo Lagrange và mô tả theo Euler

- Ngược lại, nếu chuyển động hay biến dạng được cho theo phương trình sau thì được gọi là mô tả theo Euler

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \qquad (3.15)$$

trong đó, các biến độc lập là biến tọa độ $x_i$ và t.

o Mô tả theo Euler cung cấp một sự truy tìm vị trí ban đầu của chất điểm mà hiện tại nó chiếm vị trí $(x_1,x_2,x_3)$. $(x_1,x_2,x_3)$ gọi là biến Euler.

o Nếu (3.15) là song ánh liên tục và có đạo hàm riêng liên tục như (3.14), thì hai ánh xạ này là nghịch đảo của nhau. Và điều kiện cần và đủ để hàm nghịch đảo tồn tại là định thức Jacobi khác 0:

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| \qquad (3.16)$$

# Mô tả theo Lagrange và mô tả theo Euler

- Ví dụ:
  - Mô tả theo Lagrange cho bởi

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2(e^t - 1) \\ x_2 &= X_1(e^{-t} - 1) + X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \qquad (3.17)$$

  - Nghịch đảo theo mô tả Euler

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_2 &= \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad (3.18)$$

# Gradient biến dạng. Gradient chuyển vị

- **Gradient biến dạng vật chất**: tensor $\partial x_i/\partial X_j$ , đạo hàm riêng (3.14) theo $X_j$

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.19)$$

trong đó: $\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_i}\hat{\mathbf{e}}_i$

o Dạng ma trận của **F**

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} = [\partial x_i/\partial X_j] \qquad (3.20)$$

# Gradient biến dạng. Gradient chuyển vị

- **Gradient biến dạng không gian**: tensor $\partial X_i/\partial x_j$, đạo hàm riêng (3.15) theo $x_j$

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}\nabla_{\mathbf{x}} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3}\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.19)$$

  - Dạng ma trận

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial X_1/\partial x_1 & \partial X_1/\partial x_2 & \partial X_1/\partial x_3 \\ \partial X_2/\partial x_1 & \partial X_2/\partial x_2 & \partial X_2/\partial x_3 \\ \partial X_3/\partial x_1 & \partial X_3/\partial x_2 & \partial X_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = [\partial X_i/\partial x_j] \qquad (3.20)$$

# Gradient biến dạng. Gradient chuyển vị

- Gradient biến dạng vật chất và không gian liên hệ với nhau qua *quy tắc đạo hàm hàm hợp*

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik} \qquad (3.23)$$

- Đạo hàm riêng vector chuyển vị $u_i$ theo các hệ tọa độ sẽ cho ra:
  - Gradient chuyển vị vật chất: $\partial u_i/\partial X_j$

$$u_k = x_k - X_k \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad \text{or} \quad \mathbf{J} \equiv \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \qquad (3.24)$$

  - Gradient chuyển vị không gian: $\partial u_i/\partial x_j$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \text{or} \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{H} \qquad (3.25)$$

# Gradient biến dạng. Gradient chuyển vị

- Dạng ma trận của gradient chuyển vị vật chất **J**:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial X_1 & \partial u_1/\partial X_2 & \partial u_1/\partial X_3 \\ \partial u_2/\partial X_1 & \partial u_2/\partial X_2 & \partial u_2/\partial X_3 \\ \partial u_3/\partial X_1 & \partial u_3/\partial X_2 & \partial u_3/\partial X_3 \end{bmatrix} = [\partial u_i/\partial X_j] \quad (3.26)$$

- Dạng ma trận của gradient chuyển vị không gian G:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = [\partial u_i/\partial x_j] \quad (3.27)$$

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Xét hai cấu hình chưa biến dạng và biến dạng của MTLT trong hệ tọa độ Cartesian trùng nhau $OX_1X_2X_3$ và $ox_1x_2x_3$ như trong H.3.2
- $P_0$ và $Q_0$ là hai chất điểm (hạt) kề nhau trước khi biến dạng, dịch chuyển đến vị trí P và Q sau biến dạng.

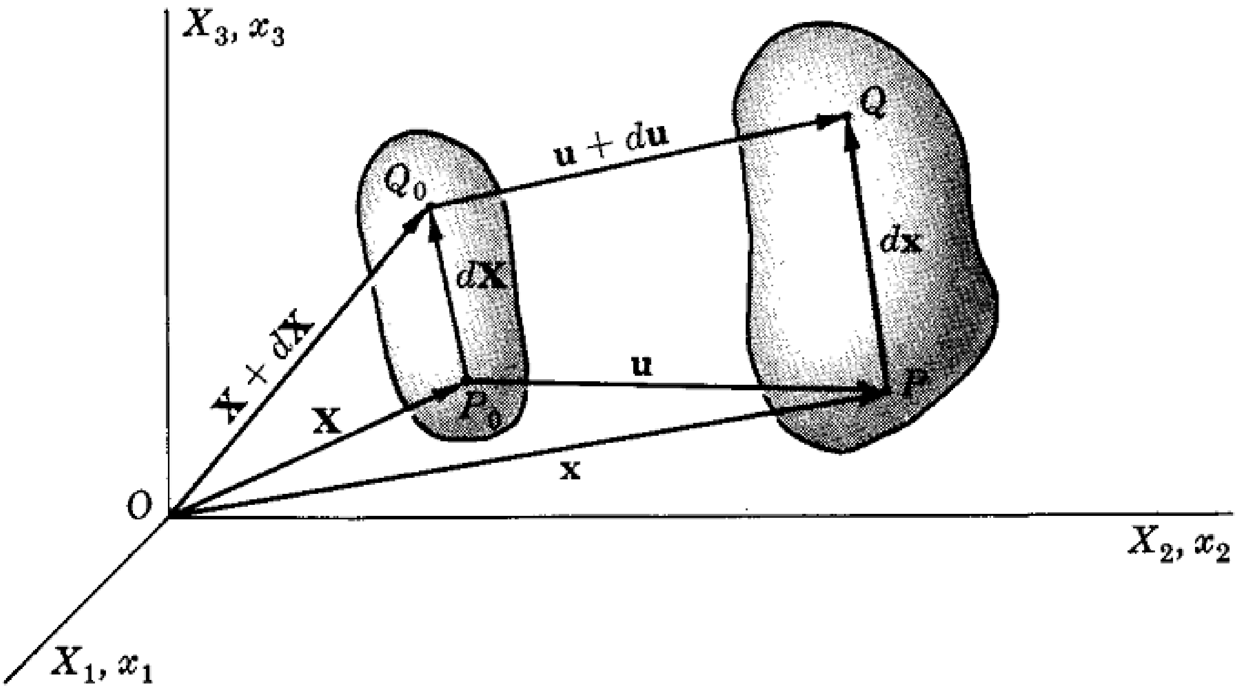



Fig. 3-2

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Bình phương phần tử vi phân độ dài giữa $P_0$ và $Q_0$ là

$$(dX)^2 = d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} = dX_i\,dX_i = \delta_{ij}\,dX_i\,dX_j \qquad (3.28)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x},t) \quad (3.15) \quad \Rightarrow \quad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}dx_j \quad \text{or} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{H}\cdot d\mathbf{x}$$

$$(3.28) \Rightarrow (dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}dx_i\,dx_j = C_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

hay $(dX)^2 = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{C}\cdot d\mathbf{x} \qquad (3.30)$

trong đó

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \qquad (3.31)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}_c\cdot\mathbf{H}$$

**C**: *tensor biến dạng Cauchy*.

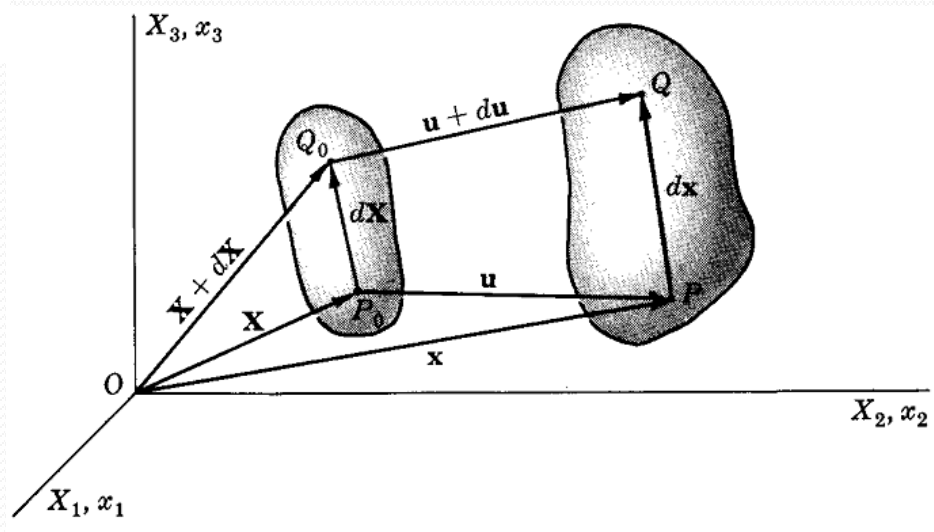



**Fig. 3-2**

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Trong cấu hình biến dạng, bình phương phần tử vi phân chiều dài giữa P và Q là

$$(dx)^2 = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = dx_i\, dx_i = \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{3.32}$$

Tương tự cách xây dựng như trên ta được

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\, dX_i\, dX_j = G_{ij}\, dX_i\, dX_j$$

$$(dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} \tag{3.34}$$

trong đó

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} \tag{3.35}$$

**G**: *tensor biến dạng Green.*

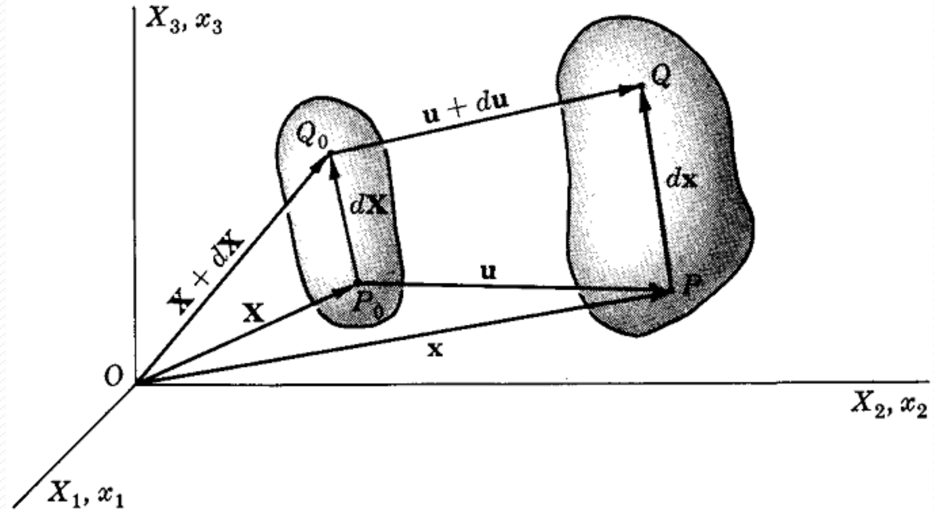



Fig. 3-2

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Hiệu $(dx)^2 - (dX)^2$ cho hai chất điểm kề nhau trong MTLT được sử dụng như là độ đo của biến dạng (measure of deformation) xuất hiện trong lân cận của các chất điểm giữa cấu hình đầu và cuối.
- Nếu hiệu này bằng không với tất cả các chất điểm trong MTLT thì chuyển vị là chuyển vị cứng (không biến dạng).
- Từ (3.34) và (3.28)

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) dX_i\, dX_j = 2L_{ij}\, dX_i\, dX_j$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{L}_G \cdot d\mathbf{X} \qquad (3.36)$$

- **Tensor biến dạng hữu hạn Lagrange** (Green): tensor bậc hai

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) \quad \text{or} \quad \mathbf{L}_G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \qquad (3.37)$$

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Tương tự, từ (3.32) và (3.30)

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) dx_i\, dx_j = 2E_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{E}_A \cdot d\mathbf{x} \qquad (3.38)$$

- **Tensor biến dạng hữu hạn Euler** (Almansi): tensor bậc hai

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) \quad \text{or} \quad \mathbf{E}_A = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{H}) \qquad (3.39)$$

- *Dạng khác* của *tensor biến dạng* hữu hạn Lagrange và Euler là hàm theo các gradient chuyển vị: thế (3.24) vào (3.37)

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \longrightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

$$\mathbf{L}_G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}) \qquad (3.40)$$

**Tensor biến dạng hữu hạn Lagrange**

# Tensor biến dạng. Tensor biến dạng hữu hạn

- Tương tự, thế (3.25) vào (3.39)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \longrightarrow E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)$$

$$\Rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

**Tensor biến dạng hữu hạn Euler**

$$\mathbf{E}_A = \tfrac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{K}) \qquad (3.41)$$

Lưu ý: Dạng ma trận có thể viết trực tiếp từ (3.26) và (3.27)

# Lý thuyết biến dạng bé. Tensor biến dạng vô cùng bé

- Lý thuyết biến dạng bé trong cơ học MTLT yêu cầu *gradient chuyển vị phải bé* so với 1.
- Độ đo cơ bản của biến dạng $(dx)^2$ - $(dX)^2$ biểu diễn theo gradient chuyển vị bằng cách thay lần lượt (3.40) và (3.41) vào (3.36) và (3.38).

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \qquad (3.40)$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) dX_i\, dX_j = 2L_{ij}\, dX_i\, dX_j \qquad (3.36)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (3.41)$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) dx_i\, dx_j = 2E_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (3.38)$$

# Lý thuyết biến dạng bé. Tensor biến dạng vô cùng bé

- Nếu gradient chuyển vị là bé thì tensor biến dạng hữu hạn trong (3.36) và (3.38) trở thành tensor biến dạng vô cùng bé và các phương trình theo đó sẽ mô tả các biến dạng bé.
- Trong (3.40), nếu gradient chuyển vị bé thì số hạng tích sẽ mất

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \cancel{\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}}\right) \qquad (3.40)$$

- Tương tự trong (3.41) nếu gradient chuyển vị bé thì số hạng tích sẽ mất

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \cancel{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right) \qquad (3.41)$$

# Lý thuyết biến dạng bé. Tensor biến dạng vô cùng bé

- Tensor biến dạng vô cùng bé Lagrange:

$$l_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \quad \text{or} \quad \mathbf{L} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_c) \qquad (3.42)$$

- Tensor biến dạng vô cùng bé Euler:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{or} \quad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c) \qquad (3.43)$$

- Nếu cả **gradient chuyển vị** lẫn **chuyển vị** đủ *bé* thì gần như không có sự khác biệt giữa tọa độ vật chất và tọa độ không gian của một chất điểm. Theo đó các thành phần gradient vật chất và gradient không gian gần như là bằng nhau, và do đó tensor biến dạng vô cùng bé Lagrange và Euler là bằng nhau:

$$l_{ij} = \epsilon_{ij} \quad \text{or} \quad \mathbf{L} = \mathbf{E} \qquad (3.44)$$

# Chuyển vị tương đối. Tensor xoay tuyến tính. Vector xoay

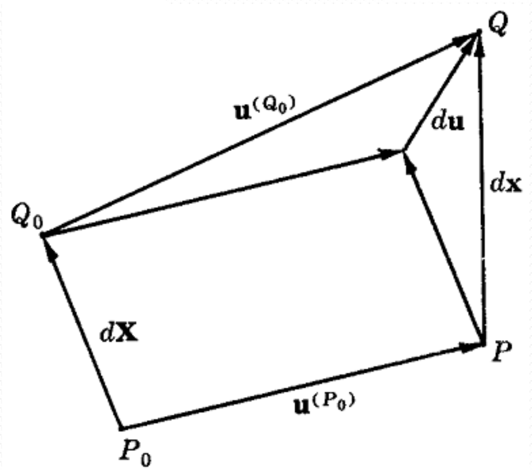
- Chuyển vị của hai chất điểm kề nhau: $u_i^{(P_0)}$ $u_i^{(Q_0)}$
- Vector chuyển vị tương đối của chất điểm ban đầu tại $Q_0$ theo chất điểm ban đầu tại $P_0$:

$$du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)} \qquad d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(Q_0)} - \mathbf{u}^{(P_0)} \tag{3.45}$$

- Giả sử trường chuyển vị liên tục, khai triển Taylor tại lân cận $P_0$ và bỏ qua các số hạng bậc cao, vector chuyển vị tương đối là

$$du_i = (\partial u_i/\partial X_j)_{P_0}\, dX_j \qquad d\mathbf{u} = (\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}})_{P_0} \cdot d\mathbf{X} \tag{3.46}$$

<ins>Lưu ý</ins>: Các đạo hàm riêng trên là thành phần của gradient chuyển vị vật chất.
(3.46) là dạng Lagrange của vector chuyển vị tương đối.



# Chuyển vị tương đối. Tensor xoay tuyến tính. Vector xoay

- Vector chuyển vị tương đối đơn vị $du_i/dX$

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{dX_j}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\nu_j \qquad \frac{d\mathbf{u}}{dX} = \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\hat{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{J}\cdot\hat{\boldsymbol{\nu}} \qquad (3.47)$$

trong đó dX là độ dài khoảng cách sai phân của vector $dX_i$. Và $v_i$ là vector đơn vị theo hướng $dX_i$, $dX_i=v_i dX$.

- Vì gradient chuyển vị vật chất có thể tách (duy nhất) thành thành phần đối xứng và phản xứng, nên

$$du_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}-\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)\right]dX_j$$

$$d\mathbf{u} = [\underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}}+\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u})}_{\text{Tensor BD Lagrange tuyến tính } l_{ij}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}}-\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u})}_{\text{Tensor xoay Lagrange tuyến tính}}]\cdot d\mathbf{X} \qquad (3.48)$$

# Chuyển vị tương đối. Tensor xoay tuyến tính. Vector xoay

- Tensor xoay Lagrange tuyến tính:

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \qquad \mathbf{W} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}) \qquad (3.49)$$

- Trong một chuyển vị mà tensor biến dạng $l_{ij}$ bằng không trong lân cận của $P_0$, chuyển vị tương đối tại điểm đó sẽ chỉ có chuyển vị xoay cứng vô cùng bé. Chuyển vị xoay vô cùng bé này được đại diện bởi vector xoay

$$w_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}W_{kj} \quad \text{or} \quad \mathbf{w} = \tfrac{1}{2}\nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{u} \qquad (3.50)$$

- Chuyển vị tương đối biểu diễn theo vector xoay như sau

$$du_i = \epsilon_{ijk}w_j\,dX_k \quad \text{or} \quad d\mathbf{u} = \mathbf{w} \times d\mathbf{X} \qquad (3.51)$$

- Bằng các biến đổi tương tự như vậy, tensor xoay và vector xoay cũng được biểu diễn bằng mô tả Euler (xem các công thức từ (3.52) đến (3.57).

# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

- Trong lý thuyết biến dạng bé, tensor biến dạng hữu hạn Lagrange $L_{ij}$ (3.36) được thay bằng tensor biến dạng tuyến tính Lagrange $l_{ij}$,

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2l_{ij}\, dX_i\, dX_j$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{L} \cdot d\mathbf{X} \qquad (3.58)$$

Vì dx ~ dX trong biến dạng bé, nên (3.58) trở thành

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} = l_{ij} \nu_i \nu_j \qquad \frac{dx - dX}{dX} = \hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} \qquad (3.59)$$

Vế trái (3.59) là sự thay đổi chiều dài trên chiều dài đơn vị của phần tử vi phân và được gọi là biến dạng pháp đối với phần tử đường ban đầu có cosine chỉ hướng là $dX_i/dX$.

# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

- Khi áp dụng (3.59) cho phần tử vi phân đường $P_0Q_0$ nằm trên hệ trục tại $P_0$ như H.3.4, thì sẽ được biến dạng pháp cho phần tử đó.
- Vì $P_0Q_0$ nằm trên trục $X_2$, nên

$$dX_1/dX = dX_3/dX = 0, \quad dX_2/dX = 1$$

(3.59) $\Rightarrow$
$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \qquad (3.60)$$

Do đó, $l_{22}$ được xem là biến dạng pháp của phần tử lúc đầu nằm dọc theo trục $X_2$. Tương tự với $l_{11}$ và $l_{33}$. Tổng quát, $l_{ii}$ (thành phần trên đường chéo của tensor biến dạng) đại diện cho biến dạng pháp theo hướng trục tọa độ.

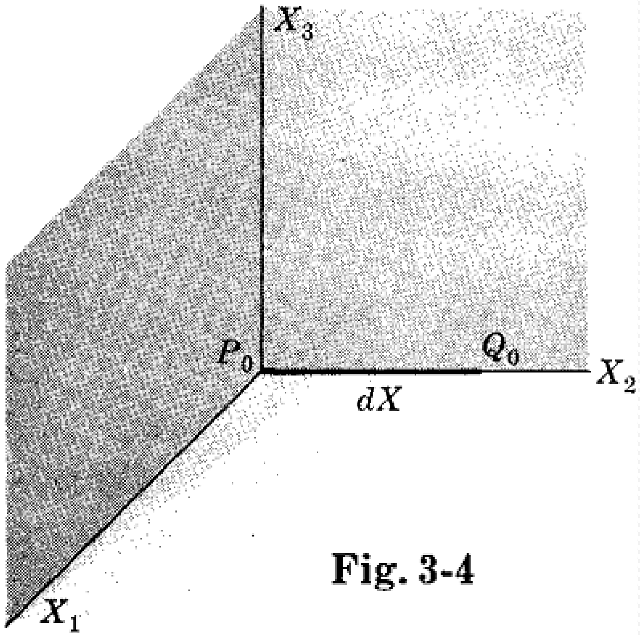
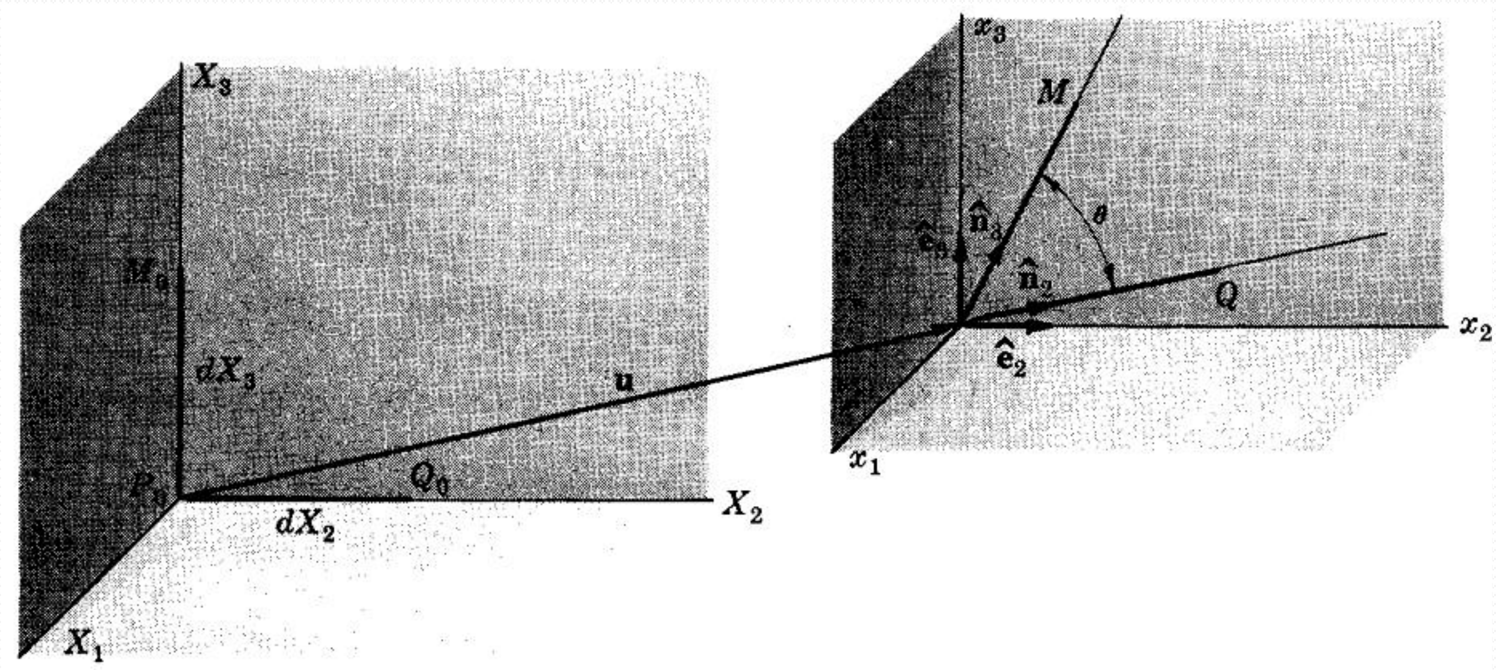


Fig. 3-4

# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

- Ý nghĩa vật lý của các thành phần ngoài đường chéo $l_{ij}$ có thể được giải thích bằng cách xem xét các phần tử lúc đầu nằm dọc theo hai trục tọa độ.
- Trong H.3.5 các phần tử đường $P_0Q_0$ và $P_0M_0$ lúc đầu nằm dọc theo hai trục $X_2$ và $X_3$. Sau biến dạng, chúng trở thành PQ và PM theo hệ trục tọa độ địa phương song xong có gốc tại P. Góc vuông giữa hai phân tử ban đầu trở thành góc θ.



# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

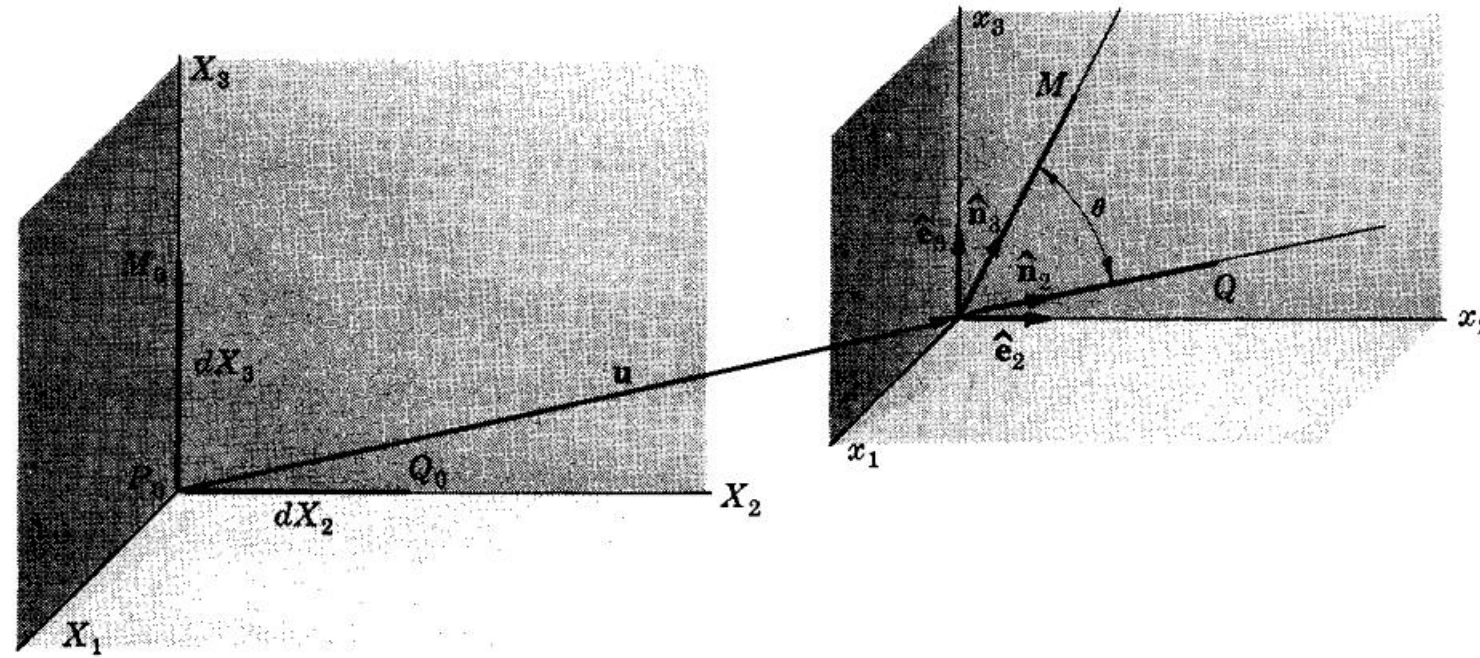
- Từ (3.46) $du_i = (\partial u_i/\partial X_j)_{P_0} dX_j$

  và giả thiết biến dạng bé, xấp xỉ bậc 1 cho vector đơn vị tại P theo hướng Q là

$$\hat{\mathbf{n}}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.61)$$

Theo hướng M

$$\hat{\mathbf{n}}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.62)$$



# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

- Do đó $$\cos\theta = \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \qquad (3.63)$$

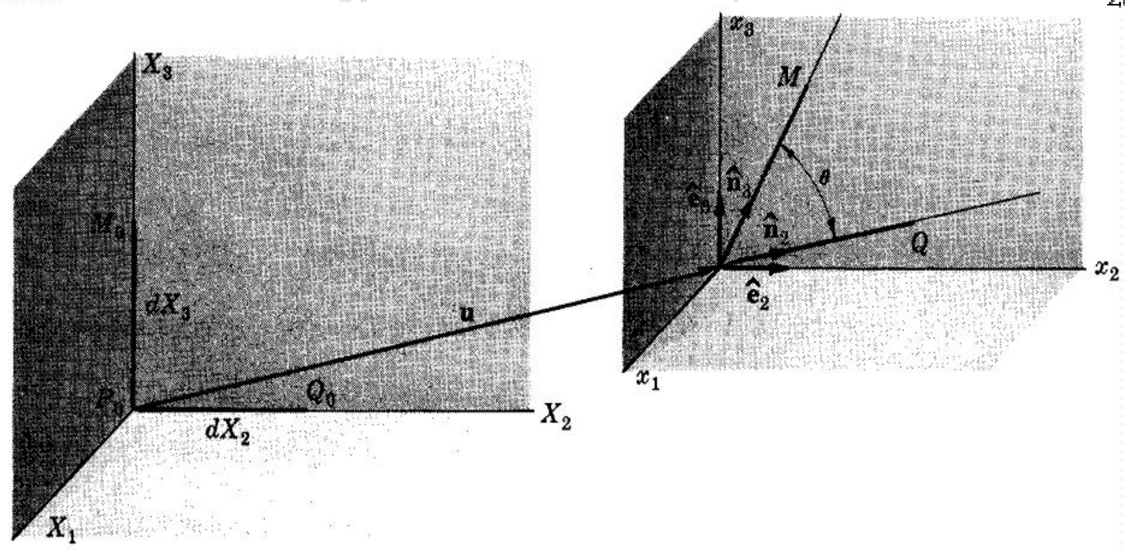
  Loại bỏ các thành phần bậc cao thì ta được

$$\cos\theta = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2l_{23} \qquad (3.64)$$

- Hơn nữa, sự thay đổi góc giữa các phần tử là $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$;

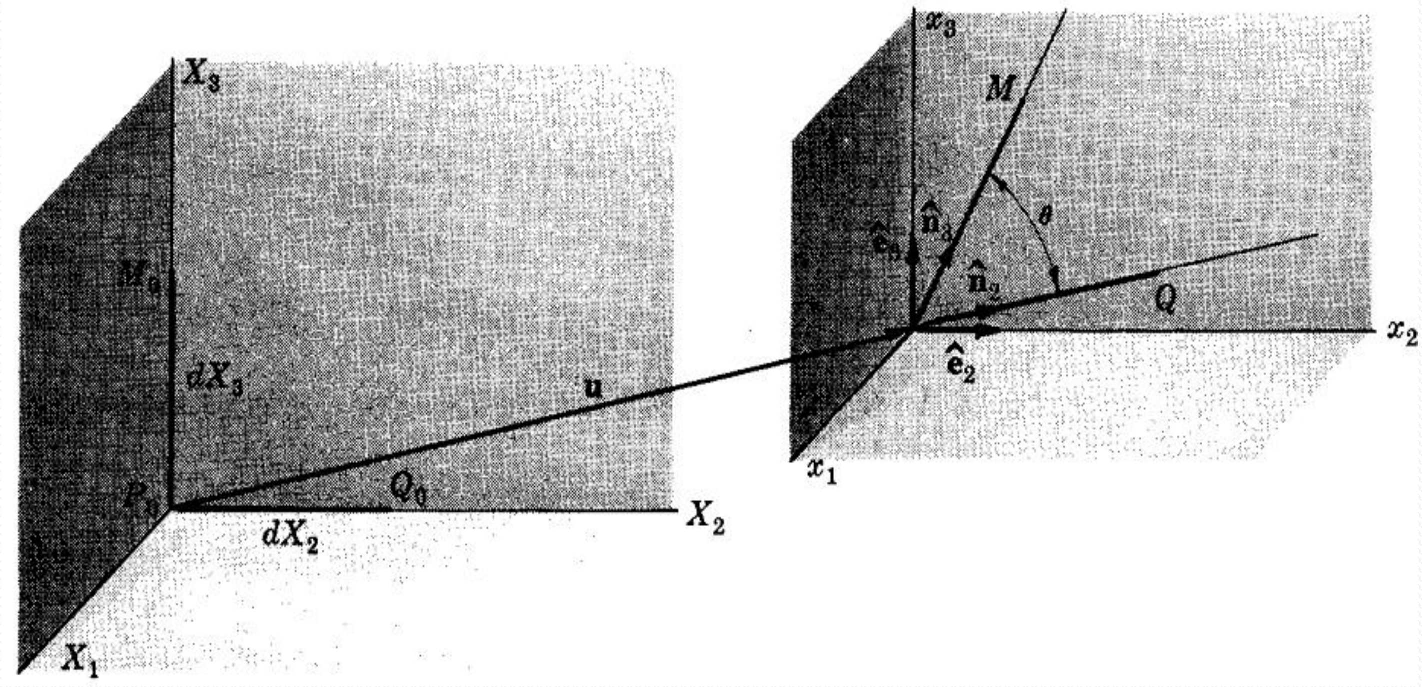
  Và do biến dạng bé, nên

$$\gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23} \qquad (3.65)$$



# Một giải thích về tensor biến dạng tuyến tính

- Do đó, các thành phần ngoài đường chéo bằng một nửa số gia của góc vuông với góc giữa hai phần tử đường (sau biến dạng).
- Các thành phần này được gọi là thành phần biến dạng cắt (trượt) – shearing strains.



# Độ giãn. Ý nghĩa của biến dạng hữu hạn

- Một độ đo quan trọng của biến dạng mở rộng của phần tử vi phân đường là tỉ số dx/dX, còn gọi là độ giãn (stretch/stretch ration).
- Đại lượng này có thể xác định tại $P_0$ (cấu hình chưa biến dạng) hoặc tại P (cấu hình sau biến dạng).
- Từ (3.34), bình phương độ giãn tại $P_0$ với phần tử nằm dọc theo vector đơn vị $\hat{\mathbf{m}} = d\mathbf{X}/dX$

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)^2_{P_0} = \Lambda^2_{(\hat{\mathbf{m}})} = G_{ij}\frac{dX_i}{dX}\frac{dX_j}{dX} \qquad \Lambda^2_{(\hat{\mathbf{m}})} = \hat{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{m}} \tag{3.66}$$

- Tương tự, từ (3.30), bình phương độ giãn tại P với phần tử nằm dọc theo vector đơn vị $\hat{\mathbf{n}} = d\mathbf{x}/dx$

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2_{P} = \frac{1}{\lambda^2_{(\hat{\mathbf{n}})}} = C_{ij}\frac{dx_i}{dx}\frac{dx_j}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2_{(\hat{\mathbf{n}})}} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{C}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{3.67}$$

# Độ giãn. Ý nghĩa của biến dạng hữu hạn

- Với phần tử ban đầu nằm dọc trục địa phương $X_2$ (H.3.4), $\hat{\mathbf{m}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_2$

$$dX_1/dX = dX_3/dX = 0, \quad dX_2/dX = 1$$

$$\Lambda^2_{(\hat{\mathbf{m}})} = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{m}} \Rightarrow \Lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_2)} = G_{22} = 1 + 2L_{22} \qquad (3.68)$$

(3.66)

Tương tự cho $\Lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_1)}$ $\Lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_3)}$

- Với phần tử ban đầu nằm dọc trục $x_2$

$$\frac{1}{\lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_2)}} = 1 - 2E_{22} \qquad (3.69)$$

Tương tự cho $1/\lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_1)}$ $1/\lambda^2_{(\hat{\mathbf{e}}_3)}$

- Nhận xét: tổng quát, $\Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$ không bằng với $\lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$

Vì phần tử ban đầu nằm dọc theo trục $X_2$ sẽ không giống với phần tử nằm dọc theo trục $x_2$ sau biến dạng.

# Độ giãn. Ý nghĩa của biến dạng hữu hạn

➢ **Ý nghĩa của biến dạng hữu hạn**

❖ Do sự thay đổi chiều dài trên đơn vị độ dài ban đầu là

$$\frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\hat{\mathbf{m}})} - 1 \qquad (3.70)$$

Hơn nữa, phần tử $P_0Q_0$ nằm trên trục $X_2$, nên độ giãn đơn vị sẽ là

$$(3.36) \Rightarrow L_{(2)} = \Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_2)} - 1 = \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1 \qquad (3.71)$$

Đối với biến dạng bé, thì (3.71) trở thành (3.60)

$$(3.71) \Rightarrow \frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \qquad (3.60)$$

❖ Đối với hai phần tử vi phân đường (H.3.5), sự thay đổi góc theo $\Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$ $\Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_3)}$

$$\sin \gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_2)}\Lambda_{(\hat{\mathbf{e}}_3)}} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1 + 2L_{22}}\sqrt{1 + 2L_{33}}}$$

Khi biến dạng bé,

$$(3.71) \Rightarrow \gamma_{23} \approx \sin \gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23} \qquad (3.65)$$

# Tensor giản nở. Tensor xoay

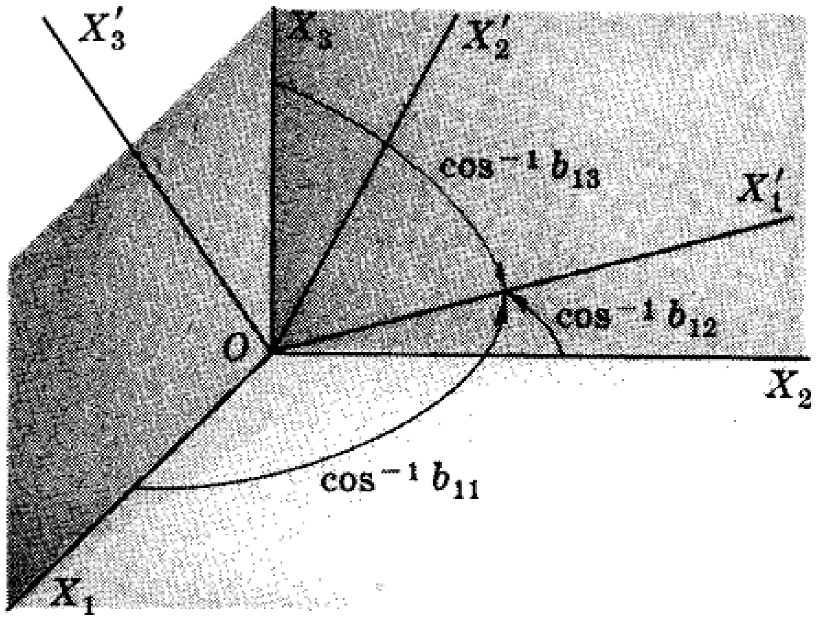
- Đọc mục 3.11/trang 87

# Biến đổi tọa độ của tensor biến dạng

- Tensor biến dạng là một tensor bậc hai, nên tensor biến dạng liên hệ giữa hai hệ tọa độ là: đối với $X_i$ và $X'_i$

$$L'_{ij} = b_{ip} b_{jq} L_{pq} \quad \text{or} \quad \mathbf{L}'_G = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_G \cdot \mathbf{B}_c \tag{3.75}$$

$$l'_{ij} = b_{ip} b_{jq} l_{pq} \quad \text{or} \quad \mathbf{L}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_c \tag{3.76}$$



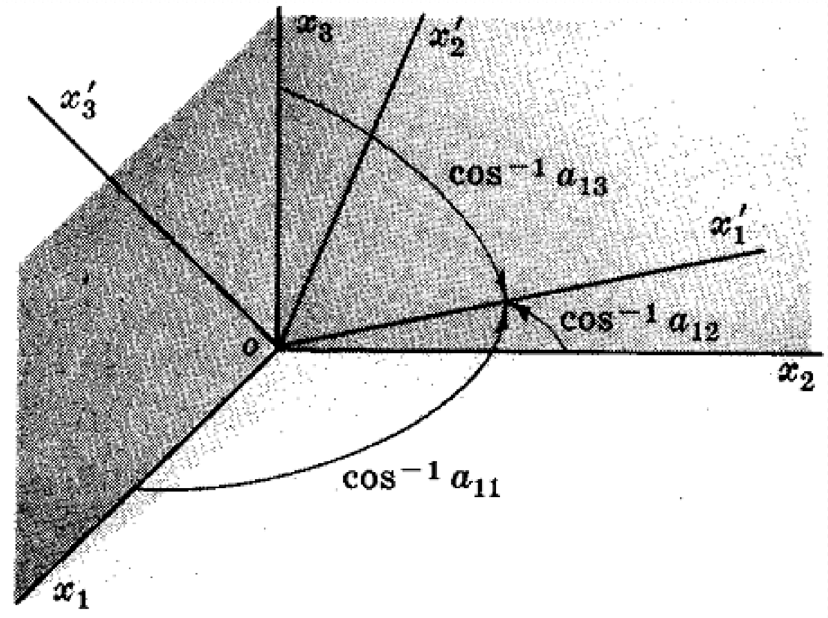

(a) **Fig. 3-6**

# Biến đổi tọa độ của tensor biến dạng

- Tensor biến dạng là một tensor bậc hai, nên tensor biến dạng liên hệ giữa hai hệ tọa độ là: đối với $x_i$ và $x'_i$

$$E'_{ij} = a_{ip} a_{jq} E_{pq} \quad \text{or} \quad \mathbf{E}'_A = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{A}_c \tag{3.77}$$

$$\epsilon'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \epsilon_{pq} \quad \text{or} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}_c \tag{3.78}$$




(b)

Fig. 3-6

# Biến dạng chính. Bất biến biến dạng.

- Hướng chính của tensor biến dạng là hướng của một phần tử tại một điểm cho trước không thay đổi do biến dạng thuần túy (biến dạng tuyến tính).
- Giá trị biến dạng chính là chuyển vị tương đối đơn vị (biến dạng pháp) xảy ra theo hướng chính.
- Với tensor biến dạng Lagrange, vector chuyển vị tương đối đơn vị cho bởi (3.47)

$$\frac{du_i}{dX} = (l_{ij} + W_{ij})\nu_j \quad \text{or} \quad \frac{d\mathbf{u}}{dX} = (\mathbf{L} + \mathbf{W}) \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} \qquad (3.85)$$

Gọi $l_i^{(\hat{n})}$ là biến dạng pháp theo hướng vector đơn vị $n_i$, với biến dạng thuần túy $(W_{ij} \equiv 0)$

$$l_i^{(\hat{n})} = l_{ij} n_j \quad \text{or} \quad \mathbf{l}^{(\hat{n})} = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (3.86)$$

Nếu $n_i$ là hướng chính với giá trị chính là l thì

$$l_i^{(\hat{n})} = l n_i = l \delta_{ij} n_j \quad \text{or} \quad \mathbf{l}^{(\hat{n})} = l \hat{\mathbf{n}} = l\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (3.87)$$

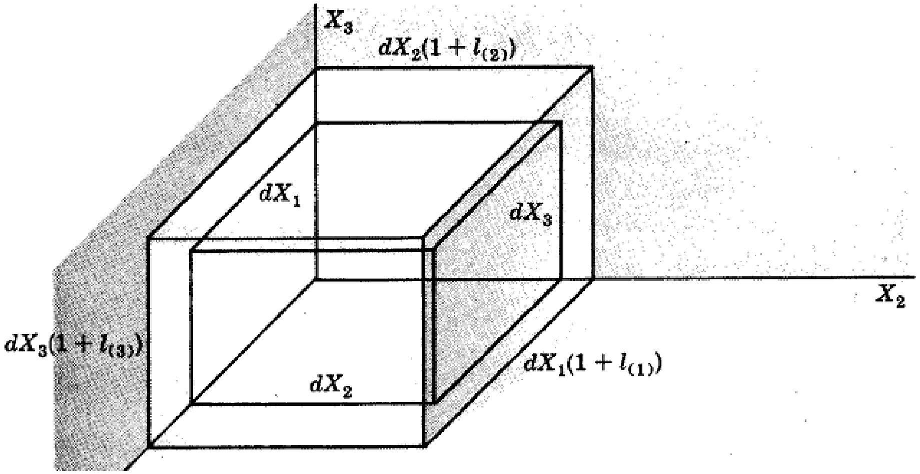
(3.86) (3.87) $\Rightarrow$ $(l_{ij} - \delta_{ij} l) n_j = 0 \quad \text{or} \quad (\mathbf{L} - \mathbf{I}l) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad (3.88)$

# Biến dạng chính. Bất biến biến dạng.

- Giải (3.88) ta tìm được hướng chính và biến dạng chính.
- *Lưu ý*: bất biến thứ nhất có ý nghĩa vật lý quan trọng.

$$I_L = l_{ii} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} \qquad (3.92)$$

- ✓ Xét một vi phân hình hộp chữ nhật có cách cạnh song song với các hướng biến dạng chính (H.3.8)




- ✓ Sự thay đổi thể tích trên đơn vị thể tích ban đầu của phần tử này được gọi là **sự giản nở cầu** (cubical dilation) cho bởi:

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1(1+l_{(1)})\,dX_2(1+l_{(2)})\,dX_3(1+l_{(3)}) - dX_1\,dX_2\,dX_3}{dX_1\,dX_2\,dX_3} \qquad (3.93)$$

# Biến dạng chính. Bất biến biến dạng.

- Đối với biến dạng bé, xấp xỉ bậc một của (3.93) là

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = \mathrm{I_L} \qquad (3.94)$$

- Tượng tự, sự giản nở cầu theo mô tả Euler

$$\Delta V/V = D = \epsilon_{(1)} + \epsilon_{(2)} + \epsilon_{(3)} \qquad (3.96)$$

# Tensor cầu và tensor lệch

- Đọc mục 3.14/trang 91.

# Biến dạng phẳng. Vòng tròn Mohr biến dạng

- Đọc mục 3.15/trang 91, 92.

# Các phương trình tương thích biến dạng tuyến tính

- Nếu các thành phần biến dạng $\varepsilon_{ij}$ là hàm hiện theo tọa độ, thì sau phương trình độc lập (3.43) là một hệ sáu phương trình vi phân xác định 3 thành phần chuyển vị $u_i$.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- Tổng quát thì hệ trên sẽ không có một nghiệm khi chọn bất kì các thành phần của $\varepsilon_{ij}$. Do đó, nếu $u_i$ đơn trị và liên tục thì các điều kiện cần phải được thêm vào cho các thành phần biến dạng.
- Điều kiện cần và đủ được biểu diễn bởi các phương trình

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \epsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \qquad (3.103)$$

# Các phương trình tương thích biến dạng tuyến tính

- Có 81 phương trình trong hệ (3.103) nhưng chỉ có 6 phương trình độc lập.

$$
\left.\begin{array}{lll}
1. & \dfrac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} & = 2\,\dfrac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} \\
2. & \dfrac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} & = 2\,\dfrac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2\,\partial x_3} \\
3. & \dfrac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} & = 2\,\dfrac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3\,\partial x_1} \\
4. & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(-\dfrac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3}\right) & = \dfrac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2\,\partial x_3} \\
5. & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3}\right) & = \dfrac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3\,\partial x_1} \\
6. & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3}\right) & = \dfrac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1\,\partial x_2}
\end{array}\right\}
\quad \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{x}} = 0 \qquad (3.104)
$$

# Các phương trình tương thích biến dạng tuyến tính

- Đối với biến dạng phẳng song song với mặt phẳng x1x2, sáu phương trình tương thích (3.104) chỉ còn 1 phương trình

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1\, \partial x_2} \quad \text{or} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{x}} = 0 \qquad (3.105)$$

- Sáu thành phần tensor biến dạng xác định bởi chuyển dịch theo công thức Cauchy, thỏa mãn phương trình tương thích.
- Về mặt toán học, các pt tương thích là điều kiện để xác định đơn trị chuyển vị theo các thành phần biến dạng đã biết, như là hàm liên tục theo tọa độ. Lưu ý, điều kiện này chỉ đúng cho miền đơn liên; đối với miền đa liên, điều kiện tương thích chưa đủ để xác định tính đơn trị của chuyển vị.
- Về mặt vật lý, các (3.105) đảm bảo tính liên tục của môi trường (không bị nứt, gãy) trong quá trình biến dạng.