CHƯƠNG 5
CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN

Nội dung

- Định luật bảo toàn khối lượng. Phương trình liên tục
- Nguyên lý động lượng tuyến tính. Phương trình chuyển động. Phương trình cân bằng
- Nguyên lý mô-men động lượng (mô-men góc)
- Định luật bảo toàn năng lượng. Nguyên lý thứ nhất của nhiệt động lực học
- Phương trình trạng thái. Nguyên lý thứ hai của nhiệt độn lực học
- Bất đẳng thức Clasius-Duhem. Hàm tiêu tán
- Các phương trình cơ bản.

Định luật bảo toàn khối lượng. Phương trình liên tục

- Khối lượng của MTLT chiếm thể tích V trong không gian tại thời điểm t

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\, dV \qquad (5.1)$$

$\rho(\mathbf{x}, t)$: là mật độ khối lượng.

- **Định luật bảo toàn khối lượng:** khối lượng của môi trường liên tục không thay đổi trong quá trình biến dạng, và do đó đạo hàm vật chất của (5.1) bằng không.

$$(4.52)\quad \frac{d}{dt}\int_V P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_V \left[\frac{dP^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)}{dt} + P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial v_p}{\partial x_p}\right] dV$$

$$P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right] dV = 0 \quad (5.2)$$

V: bất kỳ

$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Định luật bảo toàn khối lượng. Phương trình liên tục

- **Phương trình liên tục:**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{5.3}$$

Hoặc từ công thức đạo hàm vật chất

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{5.4}$$

- **Đối với MTLT không nén (incompressible)** thì mật độ khối lượng không phụ thuộc vào thời gian $d\rho/dt = 0$

$$v_{k,k} = 0 \quad \text{or} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{5.5}$$

Định luật bảo toàn khối lượng. Phương trình liên tục

❖ Phương trình liên tục dạng Lagrange

➢ Định luật bảo toàn khối lượng theo biến Lagrange

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0)\, dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\, dV \qquad (5.7)$$

trong đó tích phân được lấy trên cùng các hạt (chất điểm), điều đó có nghĩa là V là thể tích hiện tại bị chiếm chỗ bởi các hạt mà tại thời điểm ban đầu t=0 chúng chiếm thể tích V_0.

$$\left.\begin{aligned} &(4.1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ &(4.38) \quad dV = J\, dV_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, 0)\, dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J\, dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{X}, t) J\, dV_0 \qquad (5.8)$$

V_0: bất kỳ

$\Rightarrow \rho_0 = \rho J \quad (5.9) \quad \Rightarrow$ ρJ độc lập theo thời gian vì V là bất kỳ, nên

- Dạng vi phân theo biến Lagrange của phương trình liên tục

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0 \qquad (5.10)$$

Nguyên lý động lượng tuyến tính. Phương trình chuyển động. Phương trình cân bằng

- Tổng động lượng tuyến tính của hệ (H.5.1) có khối lượng trong thể tích V

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i \, dV \qquad (5.11)$$

Theo định luật II Newtor, nguyên lý động lượng tuyến tính: sự thay đổi theo thời gian của động lượng của MTLT bất kỳ thì bằng với hợp lực tác dụng.

$$\int_S \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} \, dS + \int_V \rho \mathbf{b} \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV$$

hoặc

$$\int_S t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \, dS + \int_V \rho b_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i \, dV \qquad (5.12)$$

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ji} n_j$$

Gauss-Ostrograski

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i \, dV$$

hoặc

$$\int_V (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Sigma} + \rho \mathbf{b}) \, dV = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} \, dV \qquad (5.13)$$

Đạo hàm vật chất vế phải của (5.13) và sử dụng phương trình liên tục (5.10)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v_i J \, dV_0 = \int_{V_0} \left[v_i \frac{d(\rho J)}{dt} + \rho J \frac{dv_i}{dt} \right] dV_0 = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho \, dV \qquad (5.14)$$

Nguyên lý động lượng tuyến tính. Phương trình chuyển động. Phương trình cân bằng

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i)\, dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho v_i\, dV$$

$$\int_V \frac{dv_i}{dt}\rho\, dV$$

- **Nguyên lý động lượng tuyến tính dạng tích phân**

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i)\, dV = 0 \quad \text{or} \quad \int_V (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}})\, dV = 0 \qquad (5.15)$$

- **Phương trình chuyển động**

V: bất kỳ

$$(5.15) \Rightarrow \quad \sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{or} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \qquad (5.16)$$

- **Phương trình cân bằng tĩnh học**

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{or} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \qquad (5.17)$$

Nguyên lý mô-men động lượng (động lượng góc)

- Mô-men động lượng là mô-men động lượng tuyến tính đối với một điểm
- Cho MTLT như (H.5.1), mô-men động lượng tổng đối với gốc tọa độ là

$$N_i(t) = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dV \quad \text{or} \quad \mathbf{N} = \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) \, dV \qquad (5.18)$$

- **Nguyên lý mô-men động lượng:** Sự thay đổi theo thời gian của mô-men động lượng của môi trường liên tục đối với một điểm bất kỳ bằng với mô-men tổng của các lực mặt và lực thể tích (đối với điểm đó) .

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{\mathbf{n}})} \, dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dV \qquad (5.19)$$

hoặc $$\int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})}) \, dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) \, dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) \, dV$$

Phương trình (5.19) thỏa với những MTLT trong đó các lực giữa các chất điểm là có cùng độ lớn, trái dấu và cộng tuyến, và trong đó mô-men phân bố bị triệt tiêu.

Phương trình (5.19) có thể được sử dụng để chứng minh tính đối xứng của ten-xơ ứng suất.

Định luật bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất của nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng

- Định luật bảo toàn năng lượng cho MTLT chịu các lực mặt và lực khối được xây dựng từ phương trình (5.16).
- Tích vô hướng (5.16) với vận tốc v_i và lấy tích phân trên thể tích V

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i \, dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} \, dV + \int_V \rho v_i b_i \, dV \qquad (5.22)$$

Mà
$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i \, dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} \, dV = \frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho v^2}{2} \, dV = \frac{dK}{dt} \qquad (5.23)$$

trong đó K là động năng. Do

$$v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_{i,j}\sigma_{ji}$$

$$(4.19) \qquad v_{i,j} = D_{ij} + V_{ij}$$

$$V_{ij}\sigma_{ji} = 0$$

(5.22)

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij}\sigma_{ji} \, dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} \, dV + \int_V \rho v_i b_i \, dV \qquad (5.24)$$

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j$$

Gauss-Ostrogradski

- **Phương trình năng lượng**

$$\underbrace{\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij}\sigma_{ji} \, dV}_{\text{Năng lượng toàn phần}} = \underbrace{\int_S v_i t_i^{(\hat{n})} \, dS + \int_V \rho b_i v_i \, dV}_{\text{Công suất của lực}} \qquad (5.25)$$

Định luật bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất của nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng

- Phương trình năng lượng (5.25) liên hệ tốc độ biến thiên theo thời gian của cơ năng toàn phần (vế trái) với công suất sinh ra bởi các lực mặt và lực khối (vế phải)
- Tích phân trong vế trái của (5.25) chính là tốc độ biến thiên theo thời gian của nội năng cơ học, ký hiệu là dU/dt.
- Phương trình năng lượng (5.25) có thể được viết ngắn gọn là

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{đW}{dt} \qquad (5.26)$$

trong đó đW/dt là công suất, ký hiệu đ để chỉ đại lượng này không phải là vi phân.

Định luật bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất của nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng

- Trong trường hợp, nếu cả cơ năng lẫn năng lượng không phải là cơ học được xem xét thì định luật bảo toàn năng lượng ở dạng tổng quát sẽ được áp dụng.
- **Định luật bảo toàn năng lượng tổng quát**: tốc độ biến thiên theo thời gian của động năng cộng với nội năng bằng với công suất cộng với tất cả các năng lượng khác được cung cấp, hoặc thoát ra khỏi MTLT trong một đơn vị thời gian.
- Các năng lượng kể trên bao gồm: nhiệt năng, hóa năng, hoặc năng lượng điện từ. Tuy nhiên trong phần tiếp theo, ta chỉ xem xét cơ năng và nhiệt năng, và nguyên lý năng lượng trong trường hợp này được biết đến như là ***định luật thứ nhất của nhiệt động lực học***.

Định luật bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất của nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng

- Đối với hệ cơ-nhiệt, tốc độ biến thiên theo thời gian của nội năng cho bởi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho u \, dV = \int_V \rho \dot{u} \, dV \qquad (5.27)$$

trong đó u là nội năng riêng hay mật độ nội năng (trong trường hợp này không phải là độ lớn của vec-tơ v_i)

- Nếu vec-tơ c_i là thông lượng nhiệt trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian, và z là hằng số bức xạ nhiệt trên một đơn vị khối lượng trong một đơn vị thời gian, thì tốc độ tăng của nhiệt tổng trong MTLT cho bởi

$$\frac{đQ}{dt} = -\int_S c_i n_i \, dS + \int_V \rho z \, dV \qquad (5.28)$$

- **Nguyên lý năng lượng cho hệ cơ-nhiệt**

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{đW}{dt} + \frac{đQ}{dt} \qquad (5.29)$$

Hoặc

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \rho \dot{u} \, dV = \int_S t_i^{(\hat{n})} v_i \, dS + \int_V \rho v_i b_i \, dV + \int_V \rho z \, dV - \int_S c_i n_i \, dS \qquad (5.30)$$

Định luật bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất của nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng

- Thay tích phân mặt trong (5.30) thành tích phân thể tích bằng công thức Gauss-Ostrogradski và do V là bất kỳ, ta có dạng địa phương của phương trình năng lượng.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right) = \frac{1}{\rho}(\sigma_{ij}v_i)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho}c_{i,i} + z \qquad (5.31)$$

- Trong thể tích nhỏ bất kỳ, phương trình năng lượng địa phương (5.31) và phương trình cân bằng động lượng (5.16) đều thỏa mãn. Tích vô hướng (5.16) và vận tốc ta được

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho\dot{v}_i \Longrightarrow \rho\dot{v}_i v_i = v_i\sigma_{ji,j} + \rho v_i b_i \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{\rho}v_i\sigma_{ji,j} + v_i b_i$$

$$(5.31) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{\rho}v_i\sigma_{ji,j} + v_i b_i \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}c_{i,i} + z \qquad (5.32)$$

- Phương trình (5.32): tốc độ biến thiên theo thời gian của nội bằng tổng năng lượng ứng suất với lượng nhiệt thêm vào MTLT.

Phương trình trạng thái. Entropy. Định luật thứ hai của nhiệt động lực học

- Trạng thái của một hệ được mô tả bởi nhiều đại lượng động lực học và động năng, được gọi là các ***biến trạng thái***.

  o Sự thay đổi theo thời gian của các biến trạng thái mô tả một quá trình động lực học.

  o Không phải tất cả các biến trạng thái đều độc lập. Và mối liên hệ giữa các biến trạng thái được biểu diễn thông qua các phương trình trạng thái.

  o Biến trạng thái bất kỳ được biểu diễn như là một hàm đơn trị của tập các biến trạng thái khác gọi là ***hàm trạng thái***.

- Định luật thứ nhất thừa nhận sự chuyển đổi vào bên trong MTLT của nhiệt năng và cơ năng. Tuy nhiên, nó không cho biết được quá trình chuyển đổi là thuận nghịch (reversible) hay không thuận nghịch (irreversible). Tiêu chuẩn cơ bản cho sự không thuận nghịch chính là định luật thứ hai của nhiệt động lực học, dựa trên giới hạn sản sinh entropy.

Phương trình trạng thái. Entropy. Định luật thứ hai của nhiệt động lực học

- Định luật thứ hai của nhiệt động lực học thừa nhận sự tồn tại của hai hàm trạng thái phân biệt; T: nhiệt độ tuyệt đối và S: entropy.

  ○ T là đại lượng dương và chỉ là một hàm nhiệt độ thực nghiệm θ

  ○ Entropy là một đại lượng rộng, nghĩa là tổng entropy trong hệ là tổng của các entropy thành phần.

  ○ Trong cơ học MTLT, mật độ entropy, ký hiệu là s, và tổng entropy L là

$$L = \int_V \rho s \, dV.$$

- Entropy của hệ có thể thay đổi bởi cả tương tác với môi trường xung quanh lẫn sự thay đổi diễn ra bên trong hệ. Do đó

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)} \qquad (5.33)$$

  ○ $ds^{(i)}>0$: quá trình không thuận nghịch

  ○ $ds^{(i)}=0$: quá trình thuận nghịch

- Trong quá trình thuận nghịch

$$ds^{(e)} = \frac{dq_{(R)}}{T} \qquad (5.36)$$

  dq(R): nhiệt trên đơn vị khối lượng cung cấp cho hệ.

Bất đẳng thức Clausius-Duhem. Hàm tiêu tán

- Theo định luật thứ hai, tốc độ biến thiên theo thời gian của tổng entropy L không bé hơn tổng entropy đi qua bề mặt với entropy sinh ra bên trong.
- Về mặt toán học, nguyên lý entropy được biểu diễn bằng bất đẳng thức Clausius-Duhem:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s\, dV \geq \int_V \rho e\, dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T}\, dS$$

trong đó e là mật độ entropy địa phương trên đơn vị khối lượng.

○ Đẳng thức trong (5.37) xảy ra khi quá trình là thuận nghịch; bất đẳng thức áp dụng cho quá trình không thuận nghịch

- Dạng địa phương của tốc độ sản sinh entropy nội trên đơn vị khối lượng cho bởi

$$(5.37) \quad \xrightarrow[\text{Gauss-Ostrogradski}]{\text{V bất kỳ}} \quad \gamma \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho}\left(\frac{c_i}{T}\right)_{,i} \geq 0 \qquad (5.38)$$

Bất đẳng thức Clausius-Duhem. Hàm tiêu tán

- Giả sử (trong quá trình không thuận nghịch) ten-xơ ứng suất tách được thành hai phần

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)} \qquad (5.39)$$

Ten-xơ ứng suất bảo toàn

Ten-xơ ứng suất tiêu tán

(5.32)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}c_{i,i} + z \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt} \qquad (5.40)$$

$$(4.25) \quad d\epsilon_{ij} = D_{ij}\,dt$$

$\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\epsilon}_{ij}$ Là tốc độ tiêu tán năng lượng trên đơn vị khối lượng do ứng suất gây ra

dq/dt là tốc độ truyền nhiệt trên đơn vị khối lượng vào trong MTLT.

- Nếu quá trình là thuận nghịch

$dq/dt = dq_{(R)}/dt$

$$ds^{(e)} = \frac{dq_{(R)}}{T} \qquad (5.40) \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\epsilon}_{ij} + T\frac{ds}{dt} \qquad (5.41)$$

Bất đẳng thức Clausius-Duhem. Hàm tiêu tán

- Như vậy, trong quá trình không thuận nghịch, tốc độ sản sinh entropy biểu diễn theo (5.40) bằng cách thay (5.41) vào

$$(5.40)\quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (5.42)$$

$$(5.41)\quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\epsilon}_{ij} + T\frac{ds}{dt}$$

$\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\epsilon}_{ij}$ hàm tiêu tán. Hàm này luôn dương vì trong quá trình đoạn nhiệt dq=0 nên ds/dt>0 nên được suy ra từ (5.42).

Các phương trình cơ bản.

- Đối với hệ cơ nhiệt trong đó hiện tượng cơ và nhiệt được ghép đôi, các phương trình cơ bản bao gồm
  - Phương trình liên tục, (5.4)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{5.43}$$

  - Phương trình chuyển động, (5.16)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho\dot{v}_i \quad \text{or} \quad \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{\Sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}} \tag{5.44}$$

  - Phương trình năng lượng, (5.32)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}c_{i,i} + z \quad \text{or} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\mathbf{\Sigma}:\mathbf{D} - \rho\nabla\cdot\mathbf{c} + z \tag{5.45}$$

- Năm phương trình trên chứa 14 ẩn hàm theo thời gian và vị trí (1 hàm mật độ ρ, 3 thành phần vận tốc v_i hoặc chuyển vị u_i, 6 thành phần ứng suất, 3 thành phần của vec-tơ thông lượng nhiệt c_i, và 1 hàm mật độ năng lượng u)
- Với bất đẳng thức Clausius-Duhem, thêm 2 ẩn hàm là mật độ entropy s và nhiệt độ tuyệt đối T

Các phương trình cơ bản.

- Như vậy, tổng cộng có 16 ẩn hàm và 5 phương trình. Do đó cần thêm 11 phương trình đủ để hệ xác định.
  - 6 phương trình cấu thành, mô tả các tính chất vật lý cụ thể của MTLT
  - 3 phương trình thể hiện mối liên hệ nhiệt độ - dẫn nhiệt
  - 2 phương trình trạng thái nhiệt động lực học; ví dụ như phương trình trạng thái calo và phương trình trạng thái entropy chẳng hạn.
- Lưu ý: các phương trình cụ thể sẽ tùy thuộc vào từng bài toán.