CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

§1. Khái niệm về vành

1.1. Định nghĩa

Vành là một tập hợp R cùng với hai phép toán cộng và nhân thỏa các tính chất sau:

(R_1) $(R, +)$ là nhóm Abel;

(R_2) $(R, .)$ là nửa nhóm;

(R_3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng, nghĩa là với mọi $x, y, z \in R$, ta có

$$x(y+z) = xy + xz;$$

$$(y+z)x = yx + zx.$$

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

Phần tử trung hòa của phép cộng được gọi là *phần tử không*, ký hiệu là 0; phần tử đối xứng của phần tử $x \in R$ là *phần tử đối* của x ký hiệu là $-x$. Nếu phép nhân giao hoán thì ta nói vành R *giao hoán*; nếu phép nhân có phần tử đơn vị thì vành R được gọi là *vành có đơn vị*. Phần tử đơn vị được ký hiệu là e hay 1.

1.2. Nhận xét

Cho R là vành có đơn vị e. Phần tử $x \in R$ được gọi là khả nghịch nếu x khả đối xứng với phép nhân, nghĩa là tồn tại $y \in R$ sao cho $xy = yx = e$. Ký hiệu

$$R^* = \{x \in R |\ x \text{ khả nghịch}\}.$$

Khi đó R^* là một nhóm đối với phép nhân, gọi là *nhóm các phần tử khả nghịch* của R.

1.3. Ví dụ

1) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép cộng và phép nhân thông thường là vành giao hoán, có đơn vị, gọi là *vành các số nguyên*. Tương tự ta cũng có *vành các số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$, *vành các số thực* $\mathbb{R}$, *vành các số phức* $\mathbb{C}$.

2) Trên nhóm cộng $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên modulo n, ta định nghĩa phép toán nhân như sau: với mọi $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$. Khi đó $\mathbb{Z}_n$ trở thành vành giao hoán có đơn vị $\overline{1}$.

3) Tập $M(n, \mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n với hệ số thực cùng với phép cộng và nhân ma trận thông thường là vành có đơn vị. Vành này không giao hoán nếu $n \geq 2$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4) Cho $(G, +)$ là một nhóm Abel. Tập hợp $End(G)$ các tự đồng cấu của nhóm G là vành có đơn vị với phép cộng định bởi:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall f,\ g \in End(G), \forall x \in G,$$

và phép nhân là phép hợp nối ánh xạ. Vành này không giao hoán nếu $|G| \geq 2$.

5) Giả sử $R_1,\ R_2, \cdots, R_n$ là các vành. Khi đó tích Descartes

$$\prod_{i=1}^{n} R_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, \cdots, x_n \in R_n\}$$

cùng với phép cộng $(x_i)+(y_i) = (x_i+y_i)$ và phép nhân $(x_i)(y_i) = (x_i y_i)$, là một vành, gọi là *vành tích trực tiếp* của $R_1, R_2, \cdots, R_n$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

1.4. Mệnh đề. *Cho R là một vành. Khi đó với mọi $x, y, z \in R$ và $n \in \mathbb{Z}$ ta có*

(i) $x(y - z) = xy - xz$ *và* $(y - z)x = yx - zx$.

(ii) $0x = x0 = 0$.

(iii) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ *và* $(-x)(-y) = xy$.

(iv) $(nx)y = x(ny) = n(xy)$. *Đặc biệt, nếu R có đơn vị e thì* $nx = (ne)x = x(ne)$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

§2. Vành con, Ideal và vành thương

2.1. Định nghĩa

Cho R là một vành.

(i) Tập con A khác rỗng của R được gọi là một *vành con* của R nếu A ổn định đối với hai phép toán trong vành R và A cùng với hai phép toán cảm sinh là một vành.

(ii) Vành con I của R được gọi là một *ideal trái* (tương ứng, *ideal phải*) của R nếu với mọi $r \in R$ và $x \in I$ ta có $rx \in I$ (tương ứng, $xr \in I$). Ta nói I là một *ideal* của R nếu I vừa là ideal trái vừa là ideal phải của R.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

2.2. Định lý (Đặc trưng của vành con). *Cho A là một tập con khác rỗng của vành R. Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) A là một vành con của R;

(ii) Với mọi $x, y \in A$, $x + y \in A$, $xy \in A$, $-x \in A$;

(iii) Với mọi $x, y \in A$, $x - y \in A$ và $xy \in A$.

2.3. Định lý (Đặc trưng của ideal). *Cho I là một tập con khác rỗng của vành R. Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) I là một ideal của R;

(ii) Với mọi $x, y \in I$ và $r \in R, x + y \in I$, $-x \in I$, $rx \in I$ và $xr \in I$;

(iii) Với mọi $x, y \in I$ và $r \in R$, $x - y \in I, xr \in I$ và $rx \in I$.

2.4. Nhận xét

1) Các tập con $\{0\}$ và R đều là các ideal của R, gọi là các *ideal tầm thường*.

2) Nếu vành R giao hoán thì các khái niệm ideal trái, ideal phải và ideal là trùng nhau.

3) Giả sử R là vành có đơn vị và I là một ideal trái hay phải của R. Khi đó $I = R \Leftrightarrow I$ chứa ít nhất một phần tử khả nghịch $\Leftrightarrow I$ chứa phần tử đơn vị.

4) Với I, J là hai ideal của R, đặt

$$I + J = \{x + y | x \in I,\ y \in J\};$$

$$IJ = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i | x_i \in I,\ y_i \in J,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Khi đó $I + J$ và IJ cũng là các ideal của R, gọi là *tổng* và *tích* của các ideal I và J.

2.5. Ví dụ

1) I là ideal của $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi I có dạng $n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{Z}$.

2) $M(n, \mathbb{Z})$ là vành con của $M(n, \mathbb{Q})$ nhưng không là ideal.

3) $M(n, 2\mathbb{Z})$ là ideal của $M(n, \mathbb{Z})$.

Nhận Xét:

Từ Định nghĩa 2.1 ta thấy giao của một họ khác rỗng các vành con (tương ứng, ideal) của một vành R cũng là một vành con (tương ứng, ideal) của vành R.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

2.6. Định nghĩa

Cho S là một tập con khác rỗng của vành R. Ta định nghĩa:

(i) Giao của tất cả các vành con của R có chứa S là vành con *sinh bởi* S.

(ii) Giao của tất cả các ideal của R có chứa S là *ideal sinh bởi* S, ký hiệu là $\langle S \rangle$.

Từ định nghĩa ta thấy vành con (tương ứng, ideal) của R sinh bởi tập hợp S chính là vành con (tương ứng, ideal) nhỏ nhất của R có chứa S.

Đặc biệt $\{0\}$ là vành con và cũng là ideal sinh bởi tập rỗng.

2.7. Định lý. *Cho S là một tập con khác rỗng của vành R. Khi đó*

(i) Vành con của R sinh bởi S là tập hợp

$$\Big\{ \sum_{\text{hữu hạn}} s_1 s_2 \cdots s_n | s_i \in S \text{ hay } -s_i \in S,\ n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

(ii) Nếu R có đơn vị thì ideal sinh bởi S là tập hợp

$$\langle S \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i y_i | x_i,\ y_i \in R, s_i \in S, n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

(iii) Nếu R giao hoán có đơn vị thì

$$\langle S \rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i | x_i \in R,\ s_i \in S,\ n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

2.8. Định nghĩa

Cho S là một tập con của vành R và $I = \langle S \rangle$. Ta nói I *được sinh ra bởi* S và S là *tập sinh* của I. Nếu S hữu hạn thì ta nói I *hữu hạn sinh*. Đặc biệt, nếu $S = \{a\}$ thì ta viết $I = \langle a \rangle$, gọi là *ideal chính sinh bởi* a.

2.9. Nhận xét

Nếu vành R giao hoán, có đơn vị thì ideal chính sinh bởi a là:

$$\langle a \rangle = \{xa | x \in R\}.$$

Ta còn ký hiệu tập hợp trên là Ra.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

2.10. Định lý. *Giả sử I là một ideal của vành $(R, +, .)$. Trên nhóm thương $(R/I, +)$ ta định nghĩa phép toán nhân như sau:*

$$(x + I)(y + I) = xy + I.$$

Khi đó $(R/I, +, .)$ là một vành, gọi là vành thương của R trên ideal I.

2.11. Nhận xét

1) Nếu vành R giao hoán thì vành thương R/I cũng giao hoán. Chiều đảo lại không đúng.

2) Nếu vành R có đơn vị e thì vành thương R/I có đơn vị là $e + I$. Chiều đảo lại không đúng.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

2.12. Ví dụ

Vành thương của vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ trên ideal $n\mathbb{Z}$ chính là vành $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên modulo n, trong đó ngoài phép cộng đã biết, ta có phép toán nhân định bởi

$$(x + n\mathbb{Z})(y + n\mathbb{Z}) = xy + n\mathbb{Z}.$$

§3. Đồng cấu

3.1. Định nghĩa

Một ánh xạ f từ vành R vào vành R' được gọi là một *đồng cấu vành* nếu f bảo toàn các phép toán, nghĩa là với mọi $x, y \in R$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Một đồng cấu từ R vào R được gọi là một *tự đồng cấu* của R. Một đồng cấu đồng thời là đơn ánh, toàn ánh, song ánh được gọi lần lượt là *đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu*. Một tự đồng cấu song ánh được gọi là một *tự đẳng cấu*. Nếu tồn tại một đẳng cấu từ R vào R' thì ta nói R đẳng cấu với R', ký hiệu là $R \simeq R'$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

3.2. Ví dụ

1) Ánh xạ đồng nhất id_R của vành R là một tự đẳng cấu, gọi là *tự đẳng cấu đồng nhất* của R.

2) Giả sử A là một vành con của vành R. Khi đó ánh xạ bao hàm: $i_A : A \longrightarrow R$ định bởi $i_A(x) = x$ là một đơn cấu, gọi là *đơn cấu chính tắc*.

3) Giả sử I là một ideal của vành R. Khi đó ánh xạ $\pi : R \longrightarrow R/I$ định bởi $\pi(x) = x + I$ là một toàn cấu, gọi là *toàn cấu chính tắc*.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4) Giả sử R, R' là hai vành. Khi đó ánh xạ $f : R \longrightarrow R'$ định bởi $f(x) = 0_{R'}$ ($0_{R'}$ là phần tử không của vành R') là một đồng cấu, gọi là *đồng cấu tầm thường.*

5) Cho R là một vành có đơn vị và $a \in R$ khả nghịch. Khi đó ánh xạ $f : R \longrightarrow R$ định bởi $f(x) = axa^{-1}$ là một tự đẳng cấu của R. Thật vậy, dễ thấy f là một song ánh, hơn nữa f là đồng cấu vì

$$f(x+y) = a(x+y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1} = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f(x)f(y);$$

vậy f là đẳng cấu.

6) Xét ánh xạ $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ định bởi $f(\overline{x}) = 4\overline{x}$. Khi đó f là đồng cấu vành vì

$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x+y}) = 4(\overline{x+y}) = 4\overline{x} + 4\overline{y} = f(\overline{x}) + f(\overline{y}),$$

$$f(\overline{x}\,\overline{y}) = f(\overline{xy}) = 4\overline{xy} = 4\overline{x}\,\overline{y} + 12\overline{x}\,\overline{y} = 16\overline{x}\,\overline{y} = (4\overline{x})(4\overline{y}) = f(\overline{x})f(\overline{y}).$$

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

3.3. Mệnh đề. *Nếu* $f : R \longrightarrow R'$ *là một đồng cấu vành thì* $f(0_R) = 0_{R'}$ *và* $f(-x) = -f(x)$ *với mọi* $x \in R$.

3.4. Mệnh đề. *Tích của hai đồng cấu vành là một đồng cấu vành. Đặc biệt, tích của hai đơn cấu (tương ứng, toàn cấu, đẳng cấu) vành cũng là đơn cấu (tương ứng, toàn cấu, đẳng cấu) vành.*

3.5. Mệnh đề. *Ánh xạ ngược của một đẳng cấu vành cũng là đẳng cấu vành.*

3.6. Chú ý

Do các mệnh đề 3.4 và 3.5 ta thấy quan hệ đẳng cấu $\simeq$ giữa các vành là một quan hệ tương đương, nghĩa là thỏa ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

3.7. Định lý. *Cho đồng cấu vành* $f : R \to R'$ *và* A *là một vành con của* R, A' *là một vành con của* R'. *Khi đó*

(i) $f(A)$ *là một vành con của* R'.

(ii) $f^{-1}(A')$ *là một vành con của* R. *Hơn nữa, nếu* A' *là một ideal của* R' *thì* $f^{-1}(A')$ *cũng là ideal của* R.

Đặc biệt, $\mathrm{Im} f = f(R)$ *là vành con của* R' *và* $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0_{R'})$ *là ideal của* R. *Ta gọi* $\mathrm{Im} f$ *là ảnh của* f *và* $\mathrm{Ker} f$ *là hạt nhân của* f.

3.8. Định lý. *Đồng cấu vành* $f : R \longrightarrow R'$ *là đơn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker} f = \{0_R\}$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

3.9. Định lý đẳng cấu 1. *Cho đồng cấu vành* $f : R \longrightarrow R'$. *Khi đó ánh xạ* $\overline{f} : R/\mathrm{Ker} f \longrightarrow R'$ *định bởi* $\overline{f}(x + \mathrm{Ker} f) = f(x)$ *là đơn cấu vành. Đặc biệt,* $R/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f$.

3.10. Định lý đẳng cấu 2. *Cho* R *là một vành và* I *là một ideal,* A *là một vành con của* R. *Khi đó* $I + A$ *là vành con của* R; I *là ideal của* $I + A$; $I \cap A$ *là ideal của* A *và* $A/I \cap A \simeq (I + A)/I$ *qua đẳng cấu vành* $x + I \cap A \mapsto x + I$.

3.11. Định lý đẳng cấu 3. *Cho R là một vành và I là một ideal của R. Khi đó*

(i) $\mathcal{A}$ là một vành con của vành thương R/I khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ có dạng A/I với A là một vành con của R và A chứa I.

(ii) $\mathcal{A}$ là một ideal của vành thươngR/I khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ có dạng A/I với A là một ideal của R và A chứa I. Hơn nữa, ta có

$$(R/I)/(A/I) \simeq R/A$$

qua đẳng cấu

$$(x+I)+(A/I) \mapsto x+A.$$

3.12. Ví dụ

Xét đồng cấu vành $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ định bởi $f(\overline{x}) = 4\overline{x}$ (xem Ví dụ 3.2), ta có

$\mathrm{Im} f = 4\mathbb{Z}_6 = 2\mathbb{Z}_6 = \{2\overline{x} | \overline{x} \in \mathbb{Z}_6\}$;

$\mathrm{Ker} f = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_6 | 4\overline{x} = \overline{0}\} = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_6 | 4x \equiv 0 \pmod 6\}$ $= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_6 | x \equiv 0 \pmod 3\} = 3\mathbb{Z}_6$. Theo Định lý đẳng cấu 3.9 ta có

$$\mathbb{Z}_6 / 3\mathbb{Z}_6 \simeq 2\mathbb{Z}_6.$$

3.13. Bổ đề *Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và I, J là hai ideal của R sao cho $I+J=R$. Khi đó $I\cap J=IJ$ và $R/I\cap J \simeq (R/I)\times(R/J)$ qua đẳng cấu $x+I\cap J \mapsto (x+I, x+J)$.*

3.14. Định lý Dư số Trung hoa. *Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và $I_1, I_2, \cdots, I_n$ là các ideal của R sao cho $I_i+I_j=R$ với mọi $i\neq j$.*

Khi đó

$$R/I_1I_2\cdots I_n \simeq \prod_{i=1}^{n}(R/I_i)$$

qua đẳng cấu $x+I_1I_2\cdots I_n \mapsto (x+I_i)$.

3.15. Áp dụng

1) Nếu m, n là các số nguyên tố cùng nhau thì ta có đẳng cấu vành

$$\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n.$$

Từ đó ta có đẳng cấu nhóm

$$\mathbb{Z}^*_{mn} \simeq \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n.$$

2) Nếu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ là sự phân tích chính tắc của n thành các thừa số nguyên tố thì ta có đẳng cấu vành

$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \cdots \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Từ đó ta có đẳng cấu nhóm

$$\mathbb{Z}^*_n \simeq \mathbb{Z}^*_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}^*_{p_2^{\alpha_2}} \times \cdots \mathbb{Z}^*_{p_k^{\alpha_k}}.$$

§4. Miền nguyên và trường

4.1 Định nghĩa

(i) Cho R là một vành giao hoán. Phần tử $x \in R \setminus \{0\}$ được gọi là *ước của* 0 nếu tồn tại $y \in R \setminus \{0\}$ sao cho $xy = 0$.

(ii) Một vành giao hoán, có đơn vị, có nhiều hơn một phần tử và không có ước của không được gọi là *miền nguyên*.

(iii) Một vành giao hoán, có đơn vị, có nhiều hơn một phần tử trong đó mọi phần tử khác 0 đều khả nghịch được gọi là một *trường*.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4.2. Nhận xét

1) Trong miền nguyên R, phép nhân có tính giản ước cho các phần tử khác không nghĩa là nếu $xy = xz$ và $x \neq 0$ thì $y = z$.

2) Mọi trường R chỉ có hai ideal là $\{0\}$ và R.

3) $(R, +, .)$ là một trường khi và chỉ khi các tính chất sau đây được thỏa:

i) $(R, +)$ là nhóm Abel;

ii) $R \setminus \{0\}$ là nhóm Abel;

iii) Phép nhân phân phối với phép cộng.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4.3. Ví dụ

1) Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép cộng và nhân thông thường là miền nguyên nhưng không là trường.

2) Tập hợp các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với phép cộng và nhân thông thường là trường. Ta gọi đó là *trường các số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$. Tương tự, ta có *trường các số thực* $\mathbb{R}$ và *trường các số phức* $\mathbb{C}$.

3) Vành $\mathbb{Z}_n$ các số nguyên modulo n là trường khi và chỉ khi $n = p$ nguyên tố (Bài tập 2.25).

4.4. Định lý. *(i) Mọi trường đều là miền nguyên.*

(ii) Mọi miền nguyên hữu hạn đều là trường.

4.5. Nhận xét

Giả thiết hữu hạn trong (ii) của Định lý 4.4 không thể bỏ được. Chẳng hạn $\mathbb{Z}$ là miền nguyên vô hạn nhưng không phải là trường.

4.6. Định nghĩa

Cho R là một trường và I là một tập con khác rỗng của R ổn định đối với hai phép toán trong R. Ta nói I là một *trường con* của R nếu I với hai phép toán cảm sinh từ R cũng là một trường.

4.7. Ví dụ

Trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là trường con của trường các số thực $\mathbb{R}$. Tương tự, $\mathbb{R}$ là trường con của $\mathbb{C}$.

4.8. Định lý (Đặc trưng của trường con). *Cho R là một trường và I là tập con của R có chứa ít nhất hai phần tử. Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) I là một trường con của R;

(ii) Với mọi $x, y \in I$, $x + y \in I$, $xy \in I$, $-x \in I$ và hơn nữa, nếu $x \neq 0$ thì $x^{-1} \in I$;

(iii) Với mọi $x, y \in I$, $x - y \in I$ và hơn nữa, nếu $x \neq 0$ thì $x^{-1}y \in I$.

■

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

Xét R là một trường với phần tử đơn vị e. Trong nhóm cộng R, phần tử đơn vị e hoặc có cấp hữu hạn hoặc có cấp vô hạn. Giả sử e có cấp hữu hạn là n. Khi đó n phải là số nguyên tố, vì nếu không thì có $1 < m,\ k < n$ sao cho $n = mk$ dẫn đến $0 = ne = (mk)e = (me)(ke)$, suy ra $me = 0$ hoặc $ke = 0$, mâu thuẫn với tính chất của cấp n. Vậy nếu e có cấp hữu hạn thì cấp đó phải là số nguyên tố. Trường hợp e có cấp vô hạn, ta nói R là trường có *đặc số* (hoặc *đặc trưng*) 0, ký hiệu là $\mathrm{char} R = 0$. Trường hợp e có cấp hữu hạn p, ta nói trường R có *đặc số* (hoặc *đặc trưng*) p, ký hiệu là $\mathrm{char} R = p$.

4.9. Ví dụ

1) Các trường số $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ đều có đặc số 0;

2) Với p nguyên tố, trường $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên modulo p có đặc số p.

Các định lý sau nêu lên tính chất của đặc số của các trường:

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4.10. Định lý. *Cho R là một trường. Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $\operatorname{char} R = 0$;

(ii) Với mọi $x \in R \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{Z}$, nếu $nx = 0$ thì $n = 0$;

(iii) R chứa một trường con đẳng cấu (vành) với $\mathbb{Q}$.

4.11. Định lý. *Cho R là một trường và p là một số nguyên tố. Các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $\operatorname{char} R = p$;

(ii) Với mọi $x \in R \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{Z}$, $nx = 0$ khi và chỉ khi $p | n$;

(iii) R chứa một trường con đẳng cấu (vành) với $\mathbb{Z}_p$.

CHƯƠNG 2. VÀNH VÀ TRƯỜNG

4.13. Định nghĩa

Cho R là một miền nguyên và $\overline{R}$ là một trường. Ta nói $\overline{R}$ là *trường các thương* của miền nguyên R nếu tồn tại một đơn cấu (vành) $f : R \longrightarrow \overline{R}$ sao cho mọi phần tử của $\overline{R}$ đều có dạng $f(a)f(b)^{-1}$ với $a, b \in R, b \neq 0$.

4.14. Định lý. *Cho R là một miền nguyên. Khi đó trường các thương $\overline{R}$ của R luôn luôn tồn tại và duy nhất (sai khác một đẳng cấu).*

4.15. Nhận xét

Vì ánh xạ $f : R \longrightarrow \overline{R}$ định bởi $f(a) = \dfrac{a}{e}$ là đơn cấu vành nên ta có thể đồng nhất $a \in R$ với $\dfrac{a}{e} \in \overline{R}$. Do đó có thể xem $\overline{R}$ như là một trường chứa miền nguyên R và mọi phần tử thuộc $\overline{R}$ đều có dạng $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{e}\left(\dfrac{b}{e}\right)^{-1} = ab^{-1}$ với $a,\ b \in R$ và $b \neq 0$. Rõ ràng mọi trường chứa miền nguyên R đều phải chứa các phần tử có dạng ab^{-1} như thế nên $\overline{R}$ là trường nhỏ nhất chứa R.

4.16. Ví dụ

Trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ chính là trường các thương của miền nguyên $\mathbb{Z}$ vì $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} | a,\ b \in \mathbb{Z}\right\} = \{ab^{-1} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.