CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

§1. Vành đa thức một ẩn

1.1. Định nghĩa

Giả sử R là một vành giao hoán và có đơn vị 1. Gọi A là tập hợp tất cả các dãy

$$(a_0, a_1, ..., a_n, ...),$$

trong đó các $a_i \in R, \forall i \in \mathbb{N}$ và bằng 0 tất cả trừ một số hữu hạn. Như vậy A là một bộ phận của lũy thừa Descartes $R^{\mathbb{N}}$.

Giả sử $f = (a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ và $g = (b_0, b_1, ..., b_n, ...)$ là các phần tử tùy ý của A. Khi đó

$$\begin{aligned} f + g &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...), \\ fg &= (c_0, c_1, ..., c_n, ...), \end{aligned}$$

trong đó

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \ k = 0, 1, 2, ...$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Dễ dàng kiểm tra lại rằng A cùng với hai phép toán đó lập nên một vành giao hoán, có đơn vị là $(1, 0, 0, \ldots)$, phần tử không của vành này là $(0, 0, 0, \ldots)$. Ta sẽ ký hiệu phần tử đơn vị của A là 1 và phần tử không của A là 0.

Đặt $x = (0, 1, 0, 0, \ldots)$. Dễ thấy rằng

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (0, 0, 1, 0, \ldots); \\
x^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots); \\
x^n &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ phần tử } 0}, 1, 0, \ldots).
\end{aligned}
$$

Ta quy ước $x^0 = (1, 0, 0, \ldots)$ và mỗi phần tử $a \in R$ có thể đồng nhất với dãy $(a, 0, 0, \ldots)$ nhờ đơn cấu vành

$$
\begin{aligned}
R &\longrightarrow A \\
a &\longmapsto (a, 0, 0, \ldots).
\end{aligned}
$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Như vậy

$$ax^n = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \text{ phần tử } 0}, a, 0, ...), \forall a \in R.$$

Do đó

$$f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

và thường được viết là

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0.$$

Vành A nói trên được gọi là *vành đa thức* của ẩn x (hoặc biến x) với các hệ số trong R, và được ký hiệu là $R[x]$. Mỗi phần tử của $R[x]$ được gọi là một *đa thức của ẩn* x trên R. Đa thức dạng ax^n $(a \in R)$ được gọi là một *đơn thức*.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

với $a_n \neq 0$. Khi đó ta nói đa thức $f(x)$ có *bậc* là n và ký hiệu $\deg f = n$ hay $\deg f(x) = n$. Phần tử a_i được gọi là *hệ số thứ* i của $f(x)$, phần tử a_n được gọi là *hệ số cao nhất*, còn phần tử a_0 được gọi là *hệ số tự do*. Bậc của đa thức 0 được quy ước là $-\infty$.

Dễ dàng thấy rằng:

i) $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

ii) $\deg(f(x)g(x)) \leq \deg f(x) + \deg g(x)$

với $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức bất kỳ trên R.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

1.2. Định lý. *Nếu D là một miền nguyên thì $D[x]$ cũng là một miền nguyên.*

1.3. Định lý (Phép chia Euclide). *Giả sử K là một trường và $f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $q(x), r(x) \in K[x]$ sao cho*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \text{ với } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Các đa thức $q(x)$ và $r(x)$ được gọi tương ứng là *thương* và *dư* trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

1.4. Ví dụ

Trong thực hành, để thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ ta sắp đặt như việc chia số nguyên. Chẳng hạn trong $\mathbb{Z}_{11}[x]$, để tìm thương và dư trong phép chia đa thức

$f(x) = -\overline{1}x^3 - \overline{7}x^2 + \overline{3}x - \overline{5}$ cho $g(x) = -\overline{2}x^2 + \overline{2}x - \overline{1}$,

$$
\begin{array}{r|l}
-\overline{1}x^3 - \overline{7}x^2 + \overline{3}x - \overline{5} & -\overline{2}x^2 + \overline{2}x - \overline{1} \\
\cline{2-2}
-\overline{1}x^3 + \overline{1}x^2 - \overline{6}x \phantom{{}-\overline{5}} & \\
\cline{1-1}
 & \overline{6}x + \overline{4} \\
-\overline{8}x^2 + \overline{9}x - \overline{5} & \\
-\overline{8}x^2 + \overline{8}x - \overline{4} & \\
\cline{1-1}
\overline{1}x - \overline{1} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad -\overline{1}x^3 - \overline{7}x^2 + \overline{3}x - \overline{5} = (-\overline{2}x^2 + \overline{2}x - \overline{1})(\overline{6}x + \overline{4}) + \overline{1}x - \overline{1}.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

1.5. Định nghĩa

Cho các đa thức $f(x), g(x) \in K[x]$, ở đây K là một trường và $g(x) \neq 0$. Nếu tồn tại $q(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = q(x)g(x)$ thì ta nói $f(x)$ *chia hết cho* $g(x)$ (hay $g(x)$ là *ước* của $f(x)$) trong $K[x]$. Một đa thức $d(x) \in K[x]$ là ước của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là *ước chung* của $f(x)$ và $g(x)$. Nếu $d(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$, đồng thời $d(x)$ chia hết cho mọi ước chung khác của $f(x)$ và $g(x)$ thì $d(x)$ được gọi là *ước chung lớn nhất* của $f(x)$ và $g(x)$, viết tắt là UCLN, ký hiệu là $d(x) = (f(x), g(x))$. Để đảm bảo tính duy nhất của UCLN, ta quy ước rằng hệ số cao nhất của UCLN bao giờ cũng lấy bằng 1.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

1.6. Thuật chia Euclide

Để tìm UCLN của hai đa thức $f(x), g(x) \in K[x]$ ta dùng thuật chia Euclide bằng cách thực hiện một số hữu hạn phép chia liên tiếp như sau:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x)q(x) + r(x), && \deg r(x) < \deg g(x)\\
&g(x) = r(x)q_1(x) + r_1(x), && \deg r_1(x) < \deg r(x)\\
&\ldots\ldots\\
&r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x)\\
&r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned}
$$

$$UCLN = \frac{r_k(x)}{\text{hệ số cao nhất của } r_k(x)}.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Từ thuật toán Euclide ta thấy rằng nếu $d(x) = (f(x), g(x))$ thì ta có thể tìm được hai đa thức $u(x), v(x) \in K[x]$ sao cho

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

1.7. Ví dụ

Trong $\mathbb{R}[x]$ cho các đa thức

$$f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$$

và

$$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$$

Tìm $d(x) = (f(x), g(x))$ và tìm các đa thức $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

1.8. Đa thức bất khả quy trên miền nguyên

Nếu D là miền nguyên thì $D[x]$ cũng là miền nguyên (Định lý 1.2). Đa thức $f(x) \in D[x]$ khác không, không khả nghịch gọi là *bất khả quy* trong $D[x]$ (hay còn gọi là bất khả quy trên D) nếu nó không có ước thực sự trong $D[x]$, tức là nếu $f(x) = g(x)h(x)$ $(g(x), h(x) \in D[x])$ thì $g(x)$ hay $h(x)$ phải là phần tử khả nghịch của D.

Nói riêng, nếu K là một trường thì các phần tử khả nghịch trong $K[x]$ chính là các phần tử khác không của K. Đa thức $f(x) \in K[x]$, khác không, không khả nghịch là bất khả quy trên K khi và chỉ khi nếu $f(x) = g(x)h(x), (g(x), h(x) \in K[x])$ thì $g(x)$ hay $h(x)$ là phần tử khác không của K. Số các đa thức bất khả quy trên một trường là vô hạn.

1.9 Định lý. *Có vô số đa thức với hệ số cao nhất là* 1 *bất khả quy trên trường* K.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

§2. Nghiệm của đa thức

Giả sử $c \in R$ và

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in R[x].$$

Phần tử $f(c) = a_n c^n + ... + a_1 c + a_0$ được gọi là *giá trị* của $f(x)$ tại c. Nếu $f(c) = 0$ thì c được gọi là *nghiệm* của $f(x)$.

2.2. Định lý Bezout. *Phần tử c của trường K là nghiệm của đa thức $f(x) \in K[x]$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x - c$.*

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.3. Sơ đồ Horner

Cho $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in K[x]$ và $c \in K$. Ta dùng sơ đồ Horner dưới đây để tìm $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ và $r = f(c)$ trong thuật chia Euclide $f(x) = (x - c)q(x) + r$.

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\dots$	$b_0 =$ $a_1 + cb_1$	$r =$ $a_0 + cb_0$

2.4. Ví dụ

a) Trong $\mathbb{Q}[x]$ cho

$$f(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 6$$

và $c = 4 \in \mathbb{Q}$. Ta có sơ đồ Horner như sau:

	3	4	-2	5	-1	6
4	3	16	62	253	1011	4050

Vậy

$$f(x) = (x - 4)q(x) + r$$

với

$$q(x) = 3x^4 + 16x^3 + 62x^2 + 253x + 1011 \text{ và } r = f(4) = 4050.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

b) Trong $\mathbb{Z}_7[x]$ cho $f(x) = \overline{2}x^5 - x^3 + \overline{3}x^2 - \overline{2}$ và $c = -\overline{3} \in \mathbb{Z}_7$. Ta có sơ đồ Horner như sau:

	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$-\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$-\overline{2}$
$-\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$-\overline{3}$	$\overline{0}$

Vậy $f(x) = (x + \overline{3})q(x)$ với $q(x) = \overline{2}x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + x - \overline{3}, r = 0$. Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x + \overline{3}$ nên $c = -\overline{3}$ là một nghiệm của $f(x)$.

2.5. Định lý. *Cho đa thức $f(x)$ trên trường K, $\deg f(x) = n \geq 0$. Khi đó $f(x)$ có nhiều nhất n nghiệm trên K.*

2.6. Hệ quả. *Nếu hai đa thức trên trường K có cùng bậc n và lấy những giá trị bằng nhau tại $n + 1$ phần tử khác nhau của K thì chúng bằng nhau.*

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.8. Định nghĩa

Cho đa thức $f(x)$ trên trường K.

a) Nếu $f(x) = a_0 \in K$, đặt $f'(x) = 0$. Nếu $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ với $n \geq 1$, đặt $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Ta gọi $f'(x)$ là *đạo hàm* của $f(x)$.

b) Đặt $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = (f^{(1)}(x))'$, ..., $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))', \forall k \in \mathbb{N}^*$. Ta nói $f^{(m)}(x)$ là *đạo hàm cấp* m của $f(x), \forall m \in \mathbb{N}$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.9. Khai triển Taylor

Cho đa thức $f(x)$ trên trường K và $\deg f(x) = n$. Khi đó với mỗi $c \in K$ đa thức $f(x)$ có thể khai triển duy nhất dưới dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - c)^k.$$

Thật vậy, thực hiện phép chia $f(x)$ cho $x - c$ ta có

$$f(x) = (x - c)g(x) + c_0,$$

trong đó $c_0 \in K$ và $g(x) \in K[x]$ $(\deg g(x) = n - 1)$ xác định duy nhất theo Định lý 1.3. Lại tiếp tục thực hiện phép chia $g(x)$ cho $x - c$ ta có duy nhất $c_1 \in K$ và $g_1(x) \in K[x]$ sao cho

$$g(x) = (x - c)g_1(x) + c_1, \quad \deg g_1(x) = n - 2.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Khi đó ta có

$$f(x) = (x - c)^2 g_1(x) + c_1(x - c) + c_0.$$

Lặp lại quá trình trên, cuối cùng ta được

$$f(x) = c_n(x - c)^n + c_{n-1}(x - c)^{n-1} + \cdots + c_1(x - c) + c_0.$$

Nhờ sơ đồ Horner ta dễ dàng thu được các hệ số $c_0, \ldots, c_n$ như bảng sau:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c	a_n	$*$	$\ldots$	$*$	$\boxed{c_0}$
c	a_n	$*$	$\ldots$	$\boxed{c_1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
c	a_n	$\boxed{c_{n-1}}$			
c	$\boxed{c_n = a_n}$				

2.10. Ví dụ

Trong vành $\mathbb{Q}[x]$, để phân tích đa thức $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ theo các lũy thừa của $x - 3$ ta lập sơ đồ Horner

	1	-1	0	0	1
3	1	2	6	18	$\boxed{55}$
3	1	5	21	$\boxed{81}$	
3	1	8	$\boxed{45}$		
3	1	$\boxed{11}$			
3	$\boxed{1}$				

Từ đó

$$f(x) = (x-3)^4 + 11(x-3)^3 + 45(x-3)^2 + 81(x-3) + 55.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.11. Nhận xét

Trong trường hợp K là trường có đặc số 0 thì các hệ số c_k trong khai triển Taylor có thể tính theo các đạo hàm của đa thức $f(x)$ như sau:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!},$$

nghĩa là

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.12. Định nghĩa

Giả sử k là một số tự nhiên khác không, R là miền nguyên. Phần tử $c \in R$ được gọi là *nghiệm bội k* của đa thức $f(x) \in R[x]$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-c)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-c)^{k+1}$, nghĩa là $f(x)$ có thể phân tích thành

$$f(x) = (x-c)^k g(x)$$

với $g(x) \in R[x]$ và $g(c) \neq 0$.

2.13. Nhận xét

i) Nếu $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-c)^k$ là khai triển Taylor của đa thức $f(x)$ thì c là nghiệm bội m khi và chỉ khi $c_m \neq 0$ và $c_i = 0, \forall i < m$.

ii) Nói riêng, nếu $f(x) \in K[x]$ với $\mathrm{char} K = 0$ thì $c \in K$ là nghiệm bội m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f^{(m)}(c) \neq 0$ và $f^{(i)}(c) = 0, \forall i < m$.

2.14. Ví dụ

Trong $\mathbb{Z}_7[x]$, cho $f(x) = \overline{2}x^4 - \overline{3}x^3 + \overline{2}x - \overline{3}$ và $c = -\overline{2} \in \mathbb{Z}_7$. Để kiểm tra xem c có là nghiệm của $f(x)$ hay không, nếu có thì là nghiệm bội bao nhiêu, ta sẽ dùng sơ đồ Horner một số lần liên tiếp như sau:

	$\overline{2}$	$-\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$-\overline{3}$
$-\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\boxed{\overline{0}}$
$-\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\boxed{\overline{0}}$	
$-\overline{2}$	$\overline{2}$	$-\overline{1}$	$\boxed{\overline{3}}$		

Căn cứ vào sơ đồ Horner ta thấy $c = -\overline{2}$ là một nghiệm kép của $f(x)$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.15. Định nghĩa (Phần tử đại số và phần tử siêu việt)

Giả sử R là vành con chứa đơn vị của miền nguyên D. Phần tử $\alpha \in D$ được gọi là *đại số* trên R nếu α là nghiệm của một đa thức khác không với hệ số trong R. Nếu $\alpha \in D$ không đại số trên R thì α được gọi là phần tử *siêu việt*.

Một phần tử đại số (siêu việt) trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ gọi tắt là phần tử đại số (siêu việt).

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Với mỗi $\alpha \in D$, ký hiệu $R[\alpha] = \{f(\alpha) | f(x) \in R[x]\}$. Dễ dàng thấy rằng $R[\alpha]$ là vành con của vành D. Để đo *độ lệch* của vành $R[\alpha]$ so với vành $R[x]$ ta xét toàn cấu vành

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R[x] & \longrightarrow & R[\alpha] \\ & f(x) & \longmapsto & f(\alpha). \end{array}$$

Theo Định lý 3.9, chương II, ta có $R[x]/\mathrm{Ker}\varphi \simeq R[\alpha]$. Trong trường hợp α là phần tử siêu việt trên R thì $f(\alpha) = 0$ khi và chỉ khi $f(x)$ là đa thức không, tức là $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. Khi đó $R[\alpha] \simeq R[x]$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.16. Công thức Viète

Cho đa thức $f(x) \in K[x]$,

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Giả sử $f(x)$ có n nghiệm (kể cả số bội) là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$. Khi đó ta có

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

Khai triển vế phải và so sánh các hệ số của các lũy thừa giống nhau ta sẽ được công thức sau gọi là *công thức Viète*, chúng biểu thị các hệ số của đa thức theo các nghiệm của nó:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i; \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j; \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{a_{n-k}}{a_n} &= (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}; \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.
\end{aligned}
$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

2.17. Ví dụ

a) Nếu x_1 và x_2 là các nghiệm của một phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

thì ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

b) Nếu x_1, x_2 và x_3 là các nghiệm của một phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$$

thì ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

§3. Đa thức nội suy Lagrange

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ là các phần tử của trường K, trong đó $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$. Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in K[x]$ sao cho $f(x_i) = c_i, \forall i$.

Đặt

$$\psi_i(x) = \prod_{1 = j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$f_0(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x).$$

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

3.2. Mệnh đề. *Với giả thiết và ký hiệu như trên, đa thức* $f(x) \in K[x]$ *thỏa mãn điều kiện* $f(x_i) = c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *khi và chỉ khi* $f(x)$ *có dạng*

$$f(x) = f_0(x) + g(x)\varphi(x) \tag{1}$$

với $g(x)$ *là đa thức nào đó của* $K[x]$.

3.3. Nhận xét

Trong (1), lấy $g(x)$ là đa thức không thì ta có $f(x) = f_0(x)$ cũng là đa thức thỏa điều kiện $f(x_i) = c_i$, hơn nữa $\deg f(x) \leq n - 1$.

3.4. Ví dụ

Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $f(-4) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(5) = -6$ và $f(7) = 9$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

4.2. Hệ quả. *Các đa thức bất khả quy của vành* $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}$ *là trường số phức, là các đa thức bậc nhất.*

4.3. Mệnh đề. *Nếu một số phức* α *là nghiệm của đa thức* $f(x)$ *với hệ số thực thì số phức liên hợp* $\overline{\alpha}$ *cũng là một nghiệm của* $f(x)$.

4.4. Định lý (Các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$). *Các đa thức bất khả quy trong* $\mathbb{R}[x]$ *là các đa thức bậc nhất và các đa thức bậc hai* $ax^2 + bx + c$ *với biệt số* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

§5. Đa thức trên trường số hữu tỷ

5.1. Nghiệm hữu tỷ của một đa thức với hệ số hữu tỷ

Để dễ dàng tìm nghiệm hữu tỷ của các đa thức với hệ số nguyên ta chú ý đến một số tính chất sau đây:

a) Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, n \geq 1$ là một đa thức với hệ số nguyên và $\alpha = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$ là nghiệm hữu tỷ của $f(x)$.

Khi đó p là ước của a_0 còn q là ước của a_n.

b) Mọi nghiệm hữu tỷ của đa thức với hệ số nguyên

$$g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, n \geq 1$$

đều là số nguyên và là ước của a_0. Nếu α là nghiệm nguyên của $g(x)$ thì $1-\alpha$ là ước của $g(1)$, còn $1+\alpha$ là ước của $g(-1)$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

5.2. Ví dụ

Tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 20x^2 + 19x - 12.$$

5.3. Đa thức bất khả quy của vành $\mathbb{Q}[x]$

Trong §4 ta đã mô tả được tất cả các đa thức bất khả quy trên trường số thực và phức. Trong vành $\mathbb{Q}[x]$ các đa thức trên trường hữu tỷ thì vấn đề phức tạp hơn nhiều. Dưới đây ta sẽ trình bày tiêu chuẩn Eisenstein là một điều kiện đủ để nhận biết một đa thức là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

5.4. Định nghĩa

Một đa thức với hệ số nguyên được gọi là *đa thức nguyên bản* nếu ước chung lớn nhất của các hệ số là 1.

5.5. Nhận xét

i) Nếu $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ký hiệu a là ước chung lớn nhất của các hệ số thì $f(x) = af^*(x)$, với $f^*(x)$ là một đa thức nguyên bản.

ii) Nếu $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ thì $f(x)$ được viết dưới dạng

$$f(x) = \frac{a}{b} f^*(x),$$

trong đó $(a, b) = 1$ và $f^*(x)$ là một đa thức nguyên bản.

5.6. Bổ đề. *Tích của hai đa thức nguyên bản lại là một đa thức nguyên bản.*

5.8. Tiêu chuẩn Eisenstein

Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (n > 1)$$

là đa thức với hệ số nguyên và giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

i) hệ số cao nhất a_n không chia hết cho p, tất cả các hệ số còn lại đều chia hết cho p;

ii) hệ số tự do a_0 không chia hết cho p^2.

Khi đó $f(x)$ là một đa thức bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

CHƯƠNG 3. VÀNH ĐA THỨC

5.9. Ví dụ

Dùng tiêu chuẩn Eisenstein để chứng minh các đa thức sau đây bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

b) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.