Bài tập chương 1

Bài 1.1. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tính $3A \pm 2B$.

b) Tìm ma trận C sao cho $2A + 3B - 4C = 0$.

Bài 1.2. Tính các tích sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Bài 1.3. Tính $A^\top A$ và $AA^\top$ với

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.4. Tính $AB - BA$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.5. Tìm hai ma trận A, B khác ma trận 0 sao cho AB là ma trận không.

Bài 1.6. Cho $A = \operatorname{diag}(2, 3, 1, 4)$ và $B = \operatorname{diag}(1, -1, 3, 2)$. Tính

a) $A + B$.

b) $2A - 3B$.

c) AB.

d) A^3.

Bài 1.7. Cho $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Chứng minh rằng, với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $A^k = \mathrm{diag}(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

Bài 1.8. Tính $A^k, k \in \mathbb{N}$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Bài 1.9. Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh rằng

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 1.10. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB \neq BA$. Chứng minh rằng:

a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b) $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

Bài 1.11. Tìm một ma trận A sao cho $A \neq 0$ nhưng $A^2 = 0$.

Bài 1.12. Hãy xác định $f(A)$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 5$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f(x) = 4x^2 - 3x + 4$.

Bài 1.13. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

c) Giả sử $ABA = BAB = A^4B^7 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

Bài 1.14. Một ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$.

a) Kiểm tra $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

b) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = A$ và $BA = B$ thì A và B là các ma trận lũy đẳng.

c) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A và B cùng lũy đẳng thì $A+B$ lũy đẳng khi và chỉ khi $AB = BA = 0$.

Bài 1.15. Xác định hạng của các ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Bài 1.16. Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Bài 1.17. Tìm dạng chính tắc theo dòng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Bài 1.18. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Bài 1.19. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}$.

Bài 1.20. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.21. Cho $A = \text{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Chứng minh rằng A khả nghịch khi và chỉ khi $a_1 a_2 ... a_n \neq 0$. Trong trường hợp A khả nghịch, hãy tìm A^{-1}.

Bài 1.22. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu AB khả nghịch thì A và B cùng khả nghịch.

Bài 1.23. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu $AB = A + B$ thì A và B giao hoán nhau, nghĩa là $AB = BA$.

Bài 1.24. Giải các phương trình ma trận

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.25. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tính B^2 và tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = -2I_3$.

Bài 1.26. Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $XA = B$.

Bài 1.27. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A và B khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $AXB = C$.

Bài 1.28. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA = ABA$.

Bài 1.29. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1; \\ 2y - 5z = 2; \\ 4z = 8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 11; \\ 5y + z = 2; \\ 3z = -9. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 9; \\ 5y - z + 3t = 1; \\ 7z - t = 3; \\ 2t = 8. \end{cases}$

Bài 1.30. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3; \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 6; \\ x_4 - 5x_5 = 5. \end{cases}$

Bài 1.31. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4; \\ 3x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 7. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9; \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

Bài 1.32. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

Bài 1.33. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3; \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Xác định giá trị $k \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.

Bài 1.34. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị $k \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.