Bài tập chương 2

Bài 2.1. Tính các định thức cấp 3 sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Bài 2.2. Tính các định thức cấp 4 sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

Bài 2.3. Chứng tỏ rằng các giá trị định thức sau bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$.

Bài 2.4. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ có $\det A = 3$. Tính các định thức sau:

a) $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2a & b & -c \\ 2d & e & -f \\ 2g & h & -i \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} c & b & 3a \\ i & h & 3g \\ f & e & 3d \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+5a & e+5b & f+5c \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4a & 8b & 4c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -a & b-3a & c+2a \\ -d & e-3d & f+2d \\ -g & h-3f & i+2g \end{pmatrix}$.

Bài 2.5. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

Bài 2.6. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ rằng

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Bài 2.7. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, n lẻ. Chứng tỏ rằng, nếu A là ma trận phản xứng (nghĩa là $A^\top = -A$) thì $\det A = 0$.

Bài 2.8. Tìm ma trận phụ hợp của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.9. * Cho $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên và $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $\det A \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

Bài 2.10. Hãy tính các định thức sau và cho biết khi nào ma trận tương ứng khả nghịch?

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a-b+c & a-b & b+2c+2a \\ b-c+a & b-c & c+2a+2b \\ c-a+b & c-a & a+2b+2c \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$.

Bài 2.11. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng cách áp dụng công thức định thức:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.12. Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.13. Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1; \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

Bài 2.14. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số m $\in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + (m-1)x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 4x_2 + (4m-2)x_3 = -1; \\ 3x_1 + (m+1)x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1; \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m; \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m, \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m+2)x_1 + 2x_2 + x_3 = m; \\ (m-5)x_1 + (m-2)x_2 - 3x_3 = 2m; \\ (m+5)x_1 + 2x_2 + (m+3)x_3 = 3m, \end{cases}$

f) $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 2x_1 + mx_2 + 2x_3 = m; \\ 2x_1 + 2x_2 + mx_3 = m, \end{cases}$

g) $\begin{cases} (3m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = m; \\ (4m+5)x_1 + (m+2)x_2 + (2m+1)x_3 = m; \\ (3m+5)x_1 + (2m+1)x_2 + 2x_3 = m, \end{cases}$

h) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m; \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m; \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m, \end{cases}$

k) $\begin{cases} (2m+1)x_1 + (m-2)x_2 + (m+2)x_3 = m-1; \\ (2m-1)x_1 + (2m-5)x_2 + mx_3 = m-1; \\ (3m+4)x_1 + (m-2)x_2 + (2m+5)x_3 = m-1. \end{cases}$

Bài 2.15. Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất;
b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.