Bài tập chương 3

Bài 3.3. Thực hiện các phép tính:

a) $(3, -4, 5, -6) + (1, 1, -2, 4)$.

b) $-3(4, -5, -6) + 2(1, 3, 2)$.

Bài 3.4. Cho $u = (3, -2, 1, 4)$ và $v = (7, 1, -3, 6)$. Tính:

a) $u + v$.

b) $4u$.

c) $2u - 3v$.

Bài 3.5. Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (1, 3, 2)$, $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

b) $u = (1, 4, -3)$, $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (1, 1, -2)$.

c) $u = (4, 1, 2)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, -1)$.

d) $u = (1, 3, 5)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (2, 1, 0)$.

Bài 3.6. Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (10, 6, 5, 3)$, $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (3, 1, 2, 1), u_3 = (2, 1, 3, 1)$.

b) $u = (1, 1, 1, 0)$, $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 1)$.

c) $u = (1, 3, 7, 2)$, $u_1 = (1, 2, 1, -2)$, $u_2 = (3, 5, 1, -6), u_3 = (1, 1, -3, -4)$.

Bài 3.7. Trong các câu sau, hãy tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3.

a) $u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 1, 2)$.

b) $u_1 = (1, 1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 0, 1), u_3 = (1, 0, 1, 1)$.

c) $u_1 = (1, -2, 0, 3), u_2 = (2, 3, 0, -1), u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

Bài 3.8. Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, -1)$;

b) $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 5, 3)$;

c) $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$, $u_3 = (0, 1, -2, 2)$.

d) $u_1 = (1, 2, 3, -4)$, $u_2 = (3, 5, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, -5, 9)$.

e) $u_1 = (1, 3, 1, -1)$, $u_2 = (2, 5, 1, 1)$ $u_3 = (1, 1, -3, 13)$, $u_4 = (1, 3, 2, -5)$.

Bài 3.9. Xét xem các đa thức sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2$, $f_2 = -4 - t + 6t^2$, $f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

b) $f_1 = 1 - 2t$, $f_2 = 1 - t + t^2$, $f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2$, $f_2 = 1 + t + 4t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3$, $f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3$, $f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

Bài 3.10. Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Bài 3.11. Cho V là một không gian vectơ và $u, v, w \in V$. Chứng minh rằng, $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u+v, v+w, w+u\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 3.12. Trong các tập hợp W sau đây thì tập hợp nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$?

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 0\}$.

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$.

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 3x_2 = 1\}$.

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$.

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 = x_2 x_3\}$.

f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 x_2 = 0\}$.

Bài 3.13. Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n?

a) Tập các ma trận đường chéo cấp n.

b) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 0$.

c) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 1$.

d) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A khả nghịch.

e) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^\top = A$.

Bài 3.14. Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $\mathbb{P}[t]$?

a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$.

b) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$.

c) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $f(0) = f(1) + f(2)$.

d) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{P}[t]$ sao cho $(f(t))^2 = f(t)$.

Bài 3.15. Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $W_1 \cup W_2$ là không gian con của V khi và chỉ khi $W_1 \subseteq W_2$ hoặc $W_2 \subseteq W_1$.

Bài 3.16. Chứng minh rằng:

a) $\mathcal{S} = \{(1,\ -1), (-2,\ 3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{S} = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ -1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{S} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Bài 3.17. Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1 + 2t - 7t^2$, $f_2 = 3 + t + t^2$, $f_3 = 7 + 2t + 4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{P}_2[t]$.

Bài 3.18. Cho S_1, S_2 là các tập hợp con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng, nếu mọi phần tử thuộc S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Bài 3.19. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ Chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính dạng $AX = B$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $B = 0$.

Bài 3.20. Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (2,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (1,1,2)\}$.

b) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}$.

c) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,1,-1)\}$.

d) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (1,5,3)\}$.

Bài 3.21. Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ t-1,\ (t-1)^2,\ \ldots,\ (t-1)^n\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$.

Bài 3.22. Kiểm tra tập hợp $\{1+t,\ t+t^2, t^2+t^3,\ \dots, t^{n-1}+t^n\}$ có là cơ sở của $\mathbb{P}_n[t]$ hay không?

Bài 3.23. Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 2, 1, -1)$. Kiểm tra tập hợp $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ có là cơ sở của W hay không? Hãy xác định $\dim W$.

Bài 3.24. Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1, 1, 2),\ u_2 = (1, 2, 5),\ u_3 = (5, 3, 4)\}$ và $W = \langle \mathcal{S} \rangle$.

a) Chứng minh $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.

b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của W sao cho $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ và xác định $\dim W$.

Bài 3.25. Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1, 1, 2),\ u_2 = (1, 2, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh $\mathcal{S}$ độc lập tuyến tính.

b) Cho $u = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm điều kiện của $a,\ b,\ c$ sao cho $\mathcal{S} \cup \{u\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 3.26. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các vectơ sau:

a) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 3, 4)$, $u_3 = (3, 4, 5)$.

b) $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

c) $u_1 = (1, 2, 3, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1, -2)$, $u_3 = (1, 3, 2, 1)$, $u_4 = (2, 1, 3, -7)$.

d) $u_1 = (1, 1, -1, 2)$, $u_2 = (1, -1, -2, 1)$, $u_3 = (1, 3, 2, 1)$; $u_4 = (2, 1, 2, -1)$.

Bài 3.27. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2$, $f_2 = -4 - t + 6t^2$, $f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

b) $f_1 = 1 - 2t$, $f_2 = 1 - t + t^2$, $f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2$, $f_2 = 1 + t + 4t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3$, $f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3$, $f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

Bài 3.28. Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các ma trận sau:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Bài 3.29. Cho $S = \{(1,1,2,4), (2,-1,-5,2), (1,-1,4,0), (2,1,1,6)\}$.

a) Chứng tỏ rằng S phụ thuộc tuyến tính.

b) Tìm một cơ sở cho không gian $W = \langle S \rangle$.

Bài 3.30. Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$

Bài 3.31. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của vectơ $u = (3,1,4)$ theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)\}$.

Bài 3.32. Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức

$$f_1(t) = 1 + t - t^2, f_2(t) = t + t^2, f_3(t) = 3 + 4t - t^2.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.

b) Cho $f(t) = 3 + t - 2t^2$. Hãy tìm tọa độ của f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.33. Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.34. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (1, 1, -1).$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$, biết rằng $u = (1, 3, -2)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bài 3.35. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, -2)$, $u_3 = (0, -3, 2)$ và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ và $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.36. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, -1)$, $u_1' = (1, 1, 2)$, $u_2' = (1, -2, 1)$ $u_3' = (2, 1, 4)$.

a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ biết rằng $u = (1, 2, 3)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$ biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Tìm $[w]_{\mathcal{B}'}$ biết rằng $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Bài 3.37. Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho các đa thức $f_1(t) = 1+t+t^2$, $f_2(t) = 2+2t+t^2$, $f_3(t) = 2 + 3t + t^2$, $g_1(t) = 1 + 2t$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = 1 + t^2$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{P}_2[t]$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Bài 3.38. Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u_1' = (0, 1, 2, -3), u_2' = (2, 0, 1, 3), u_3' = (0, 1, -2, 1)\}$. Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Bài 3.39. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$ và $u_3 = (2, 3, 1, 1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u_1' = (1, 1, -1, 2)$, $u_2' = (2, 4, 1, -2)$, $u_3' = (1, 0, 0, 5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

Bài 3.40. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 2, -2, 2)$ và $W = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u_1' = (2, 1, 0, 1)$, $u_2' = (2, 3, -3, 4)$, $u_3' = (3, 3, -2, 3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

d) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bài 3.41. Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vectơ $u = (2, 1, -1)$.

b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.

Bài 3.42. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (3, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -5)$, $u_3 = (-3, -1, 15)$. Đặt

$$\begin{cases} v_1 & = & u_1 - u_2 - u_3, \\ v_2 & = & -2u_1 + 5u_2 + 3u_3, \\ v_3 & = & u_1 - 2u_2 - u_3. \end{cases}$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.