Bài tập chương 4

Bài 4.1. Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$? Giải thích.

a) $f(x, y) = (xy,\ x + y)$.

b) $f(x, y) = (x + y,\ x - y)$.

c) $f(x, y) = (x,\ 0)$.

d) $f(x, y) = (x^2,\ 0)$.

Bài 4.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ 2x + 2y + z).$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Bài 4.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z).$$

Chứng minh f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.4. Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 2) = (1, 3)$, $f(1, 2, 1) = (2, -1)$.

Bài 4.5. Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-2, 3)$. Hãy xác định toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho $f(u_1) = u_2$ và $f(u_2) = -u_1$.

Bài 4.6. Hãy xây dựng một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ thỏa điều kiện

$$f(1, -1, 1) = (1, 0) \text{ và } f(1, 1, 1) = (0, 1).$$

Bài 4.7. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ xét các họ vectơ

$u_1 = (1, -1), u_2 = (-1, 2), u_3 = (0, -1)$ và

$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)$.

Tồn tại hay không một toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(u_i) = v_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Bài 4.8. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3).$$

a) Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c)$ nằm trong $\mathrm{Im} f$. Từ đó hãy tìm hạng của f.

c) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c)$ nằm trong $\ker f$. Tìm một cơ sở cho không gian con $\ker f$.

Bài 4.9. Tìm một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $\text{Im}f = \langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$.

Bài 4.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, 2x_3-x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở

$\mathcal{B} = (u_1=(1,0,-1), u_2=(1,1,0), u_3=(1,0,0))$ và

$\mathcal{B}' = (v_1=(1,1), v_2=(1,0))$.

Bài 4.11. Giả sử toán tử tuyến tính f trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một cơ sở cho $\text{Im}f$ và một cơ sở cho $\ker f$.

Bài 4.12. Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z-t, x+2y-z-2t, x+3y-3z-3t).$$

Tìm một cơ sở của $\ker f$ và một cơ sở của $\text{Im}f$.

Bài 4.13. Tìm $f\in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\ker f = \langle(1,1,1),\ (0,1,2)\rangle$ và $\text{Im}f = \langle(1,1,1)\rangle$.

Bài 4.14. Tìm $f\in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\ker f = \langle(1,1,1)\rangle$ và $\text{Im}f = \langle(1,1,1),\ (0,1,2)\rangle$.

Bài 4.15. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1,x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = (u_1=(1,1), u_2=(-1,2)).$$

Bài 4.16. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1,x_2,x_3) = (3x_2+x_1, -2x_2+x_3, -x_2+2x_3+4x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1=(-1,2,1), u_2=(0,1,1), u_3=(0,-3,-2)).$$

Bài 4.17. Cho ánh xạ tuyến tính f từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$, được xác định như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

$a)$ Tìm cơ sở và số chiều của không gian $Kerf$ và Imf.

$b)$ Cho $\mathcal{A} = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{B} = (v_1 = (1,1), v_2 = (1,2))$. Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (kí hiệu $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$).

Bài 4.18. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)).$$

Bài 4.19. Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1,2,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,-3,-2)).$$

Bài 4.20. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z,\ 2x - 4y + 5z).$$

a) Kiểm tra các vectơ $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,1,0)$, $u_3 = (0,0,0)$, $u_4 = (0,1,2)$ có thuộc $\ker f$ hay không?

b) Kiểm tra các vectơ $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (1,-1,2)$, $v_3 = (0,0,0)$, $v_4 = (1,1,1)$ có thuộc $\mathrm{Im} f$ hay không?

Bài 4.21. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z,\ 2x - 3y + z).$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.22. Cho f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x + 3y - z,\ x - 2y + 4z,\ 2x - y + 5z).$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.23. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ có dạng ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$ và $\ker(f)$.

Bài 4.24. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - 3y + z).$$

a) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{B}' = \{(1, 1),\ (2, 3)\}$ (của $\mathbb{R}^2$).

Bài 4.25. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (x - 2y,\ 2x + y)$.

a) Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$, với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$, với $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -3), u_2 = (-1, 2)\}$.

Bài 4.26. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y,\ 3y - z,\ 2x + z).$$

a) Xác định dạng ma trận của f.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$, với $u_1 = (-1, 2, 1),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (0, -3, -2)$.

Bài 4.27. Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - y + z,\ x + 2y - 2z,\ x - 3y + 3z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im} f$ và một cơ sở của $\ker f$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1),\ (1, -2, 0),\ (2, 1, 3)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.28. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

a) Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 4.29. Cho $\mathcal{B} = \{(1, -1),\ (-2, 3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.30. Cho $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.31. Cho cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(2,-1),\ (-3,2)\}$ (của $\mathbb{R}^2$). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$