Chương 3
CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN TRONG CƠ HỌC

3.1. ĐỊNH LUẬT BIẾN THIÊN VÀ BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

3.1.1. Cho một chất điểm

Động lượng p của một chất điểm khối lượng m, chuyển động với vận tốc v là

$$\vec{p} = m.\vec{v} \qquad (***)$$

ta lấy đạo hàm theo biến t

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \qquad \textbf{(*)}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

Đại lượng Fdt gọi là xung lượng của lực F tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian dt (cũng còn gọi là xung lực)

Định luật biến thiên của động lượng (định lý về động lượng) : **Độ biến thiên của động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian dt bằng xung lượng của ngoại lực tác dụng lên chất điểm trong thời gian đó.**

Dạng (*) là dạng tổng quát của định luật hai Newton. Mặc dù chúng ta suy ra (*) từ định luật hai Newton, nhưng vật lý học hiện đại chứng tỏ rằng đó chính là phương trình chuyển động của chất điểm trong cơ học tương đối của Einstein, khi đó khối lượng m của vật không phải là một hằng số mà phụ thuộc vào vận tốc của vật theo công thức:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Trong trường hợp ngoại lực tác động lên chất điểm trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 , ta chia khoảng thời gian (t_2 - t_1) thành những khoảng thời gian rất nhỏ dt, cộng các xung lực trong những khoảng thời gian lại với nhau, để tìm sự biến thiên của động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian (t_2 -t_1),ta lấy tích phân hai vế công thức (*):

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt \qquad (**)$$

Nếu F không đổi trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 , (**) trở thành:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t$$

Định luật biến thiên của động lượng: **_Độ biến thiên của động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ bằng xung lượng của ngoại lực tác dụng lên chất điểm trong thời gian đó._**

Nếu chất điểm không chịu tác dụng của ngoại lực (gọi là chất điểm cô lập) hoặc hợp lực tác dụng lên chất điểm bằng không, từ (***) ta suy ra:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}}$$

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}}$$

Định luật bảo toàn động lượng: *Một chất điểm cô lập hoặc hợp lực tác dụng lên nó bằng không thì động lượng của nó được bảo toàn.*

3.1.2. Cho hệ nhiều chất điểm

- Giả sử có một hệ gồm n chất điểm, các lực đặt vào chất điểm có hai loại: nội lực F_I và ngoại lực F_E.
- Xét chất điểm thứ i nào đó trong hệ, ta có phương trình của định luật 2 Newton đối với chất điểm này là:

$$\boxed{\vec{F}_i = \vec{F}_{Ii} + \overrightarrow{F_{Ei}} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}}$$

vậy đối với cả hệ :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{I_i} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{E_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Tổng nội lực của một hệ bao giờ cũng bằng không:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{I_i} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}}$$

Định luật biến thiên động lượng toàn phần của một hệ chất điểm như sau: ***Độ biến thiên động lượng toàn phần của một hệ chất điểm trong khoảng thời gian dt bằng xung lượng của ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.***

Khi hợp lực tác dụng lên hệ chất điểm bằng không thì:

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const}}$$

Định luật bảo toàn động lượng toàn phần của một hệ chất điểm: *Một hệ cô lập hoặc khi hợp lực tác dụng lên hệ bằng không thì động lượng toàn phần của hệ được bảo toàn.*

3.1.3. <u>Ví dụ về định luật bảo toàn động lượng</u>

<u>Ví dụ 1</u>**:** ***Sự giật lùi của súng***

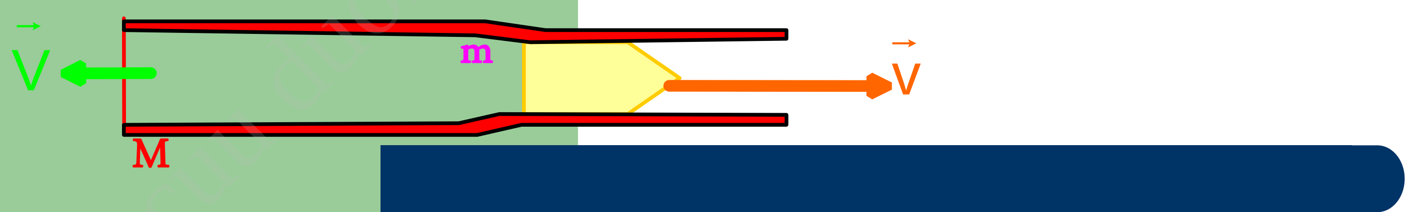
Một khẩu pháo nhả đạn theo phương nằm ngang. Khẩu pháo có khối lượng là M, viên đạn có khối lượng m, vận tốc ra khỏi nòng của viên đạn là v. Tìm vận tốc V giật lùi của khẩu pháo.

Theo định luật bảo toàn động lượng :

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0$$

Suy ra: $\vec{V} = -\dfrac{m}{M}\vec{v}$

Dấu trừ chứng tỏ rằng sau khi bắn, khẩu pháo bị giật lùi về phía sau, vận tốc giật lùi càng nhỏ nếu khẩu pháo có khối lượng M càng lớn.



Hình 3.1:

Phaùo giaät luøi khi baén

Kể thêm khối lượng và vận tốc của khí thoát ra phía sau là m_1 và v_1 thì động lượng toàn phần của hệ:

$$M\vec{V} + m\vec{v} + m_1\vec{v}_1 = 0 \qquad (*)$$

Chọn chiều dương là chiều giật lùi của pháo,chiếu (*) lên chiều dương:

$$MV - mv + m_1v_1 = 0$$

$$\longrightarrow \quad V = \frac{mv - m_1v_1}{M}$$

Điều này có nghĩa là ngoài việc tăng khối lượng của pháo, một giải pháp thứ hai để giảm vận tốc giật lùi của pháo là tăng vận tốc và lượng khí thoát ra phía sau.

Sự bảo toàn động lượng của hệ cũng chính là nguyên tắc chuyển động phản lực của tên lửa, của máy bay phản lực và của tàu vũ trụ.

Ví dụ 2: Chuyển động của vật có khối lượng thay đổi: Chuyển động của con tàu vũ trụ

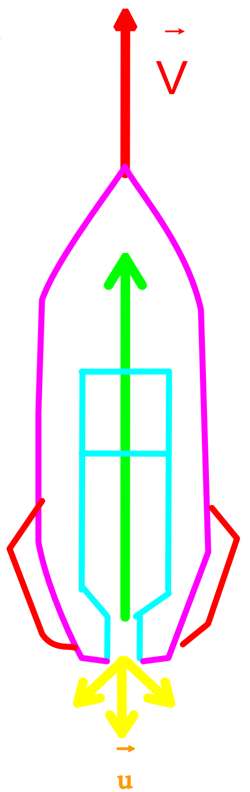
Ta giả sử chuyển động của tên lửa là một chuyển động tịnh tiến, vào thời điểm t thì tên lửa có vận tốc và khối lượng lần lượt là V và m.

Áp dụng phương trình (*) cho trường hợp khối lượng thay đổi:

$$\vec{F} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

Cụ thể là chuyển động của tên lửa khối lượng m (bao gồm cả khối lượng nhiên liệu mang theo) có vận tốc V so với mặt đất. Ta có:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{V}$$



Hình 3.2: **Tên lửa**

dm/dt là độ giảm nhiên liệu (bị đốt cháy thoát ra) trong một giây của tên lửa và được gọi là lưu lượng khí thoát (dm < 0).

Đối với nhiên liệu thoát ra dm, với vận tốc tương đối (so với tên lửa) là , thì vận tốc là vận tốc lôi theo. Vận tốc tuyệt đối của dm là $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

Vì u và V ngược chiều nhau, trừ khử nhau nên v có giá trị bé. Ta có:

$$F = m\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{dt}$$

Ta có thể bỏ qua vdm, vậy:

$$\vec{F} = \frac{md\vec{V}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

hay

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Ngoài ngoại lực F tác dụng còn có lực nữa là lực đẩy của khí thoát ra:

$$\boxed{\vec{f} = \vec{u}\frac{dm}{dt}}$$

Lưu lượng thoát khí trong 1 giây không đổi nên ta viết dm/dt = –μ hay dm = –μdt (μ: hằng số dương)
Sau khi tích phân ta có:

$$m = m_0 - \mu t$$

Trong đó m_0 là khối lượng của tên lửa lúc ban đầu.
Bỏ qua sức cản không khí gần mặt đất và chỉ tính đến trọng lực:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}}$$

ta có:

$$\boxed{m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - \mu\vec{u}}$$

Chiếu phương trình này lên chiều dương (hướng lên):

$$\boxed{dV = -gdt + \frac{\mu u dt}{m_0 - \mu t}}$$

17/09/2017 9:55:32 CH

Với điều kiện ban đầu t = 0, V_0 = 0, tích phân biểu thức trên:

$$V(t) = -gt + u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$

Khi thoát khỏi trường trọng lực g = 0, ta có vận tốc tên lửa:

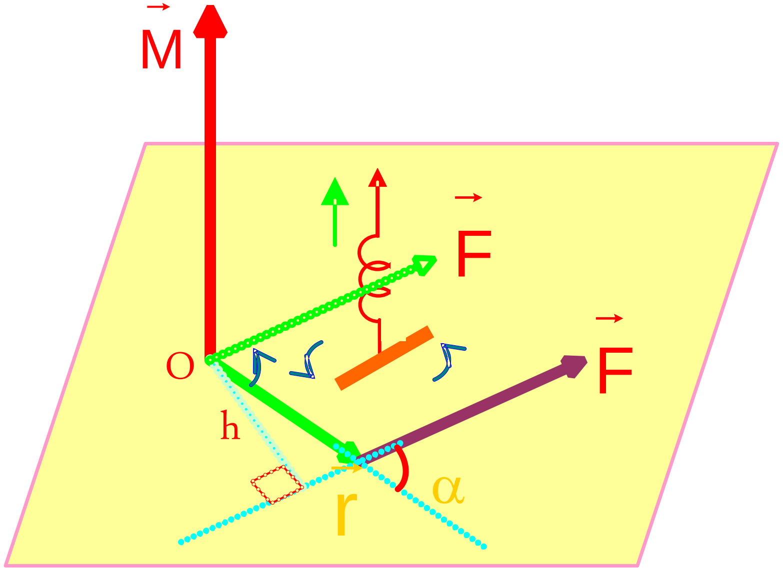
$$\boxed{V = u\ln\frac{m_0}{m}}$$

3.2. ĐỊNH LUẬT BIẾN THIÊN VÀ BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

3.2.1. Mômen lực

Theo định nghĩa, *mômen của lực F đối với một điểm 0 nào đó chọn trước là một vectơ gốc O, được xác định bởi tích hữu hướng của r và F* :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Hình 3.3: Bieåu dieãn veùctô moâmen löïc

Chiều của M được xác định bởi qui tắc vặn nút chai: Quay cái vặn cái nút chai sao cho nó quay từ r tới F thì chiều tiến của cái mũi vặn chính là chiều của vectơ M.

Độ lớn của M được xác định bởi:

$$M = rF\sin\alpha$$

trong đó α là góc hợp bởi hai vectơ r và F

Trên hình 3.3, h là hình chiếu của r lên phương vuông góc với lực F và h = rsinα.

Vậy: $$M = Fh$$

3.2.2. Mômen động lượng của một chất điểm

Tương tự như mômen của lực, *mômen của động lượng p đối với điểm O nào đó cho trước là một véctơ gốc O được xác định bởi tích hữu hướng của r và p*:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}} \qquad (*)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

3.2.3. Định luật biến thiên và bảo toàn mômen động lượng của chất điểm

Xét sự biến thiên theo thời gian của mômen động lượng chất điểm. Đạo hàm (*) theo t ta có:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}\right) + \left(\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Thay $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ và $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ vào biểu thức trên ta có:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{v}\times\vec{p}) + (\vec{r}\times\vec{F}) = \vec{M}$$

Tóm lại:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (\&\&)$$

Độ biến thiên của mômen động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian dt bằng xung lượng của mômen lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian đó.

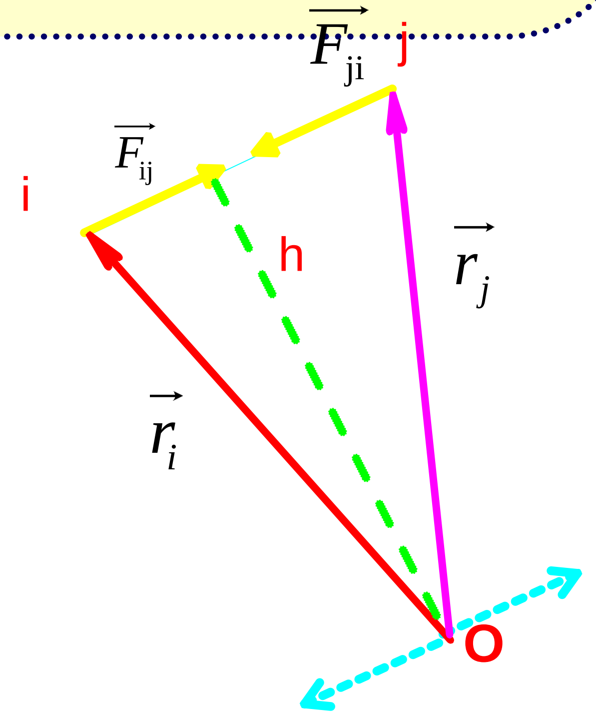
$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Định luật bảo toàn mômen động lượng được phát biểu: *Một chất điểm cô lập hoặc mômen lực tác dụng lên nó bằng không thì mômen động lượng của nó được bảo toàn.*

3.2.4. Mômen động lượng của một hệ các chất điểm

Cho một hệ gồm n chất điểm tương tác nhau và hệ còn chịu tác dụng bởi ngoại lực. Xét chất điểm thứ i nào đó trong hệ, theo công thức (&&)

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$



Tổng các lực tác dụng lên n chất điểm này là:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Hình 3.4

Chất điểm thứ i chịu tác dụng của lực tổng hợp F_{Ei} của các ngoại lực tác dụng lên nó và của các nội lực do (n – 1) chất điểm còn lại trong hệ là

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij}$$

nên:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{E_i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij}$$

ta có

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{E_i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij} \right) = \vec{r}_i \times \vec{F}_{E_i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij})$$

Đối với hệ n chất điểm ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times \vec{F}_{E_i}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Xét một cặp lực và giữa hai chất điểm thứ i và thứ j. Hãy tính mômen tổng hợp của hai lực này đối với O.

Ta có :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_{ij}}$$

nhưng $\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j}$

nên: $\boxed{\Delta\vec{r} \,//\, \vec{F}_{ij}} \rightarrow \boxed{\vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = 0}$

Vậy $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{E_i}) = \vec{M}$$

M là mômen tổng hợp của các ngoại lực.

$$\boxed{\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const}$$

Định luật bảo toàn mômen động lượng như sau: *Mômen động lượng của một hệ nhiều chất điểm được bảo toàn khi mômen tổng hợp của các ngoại lực bằng không.*

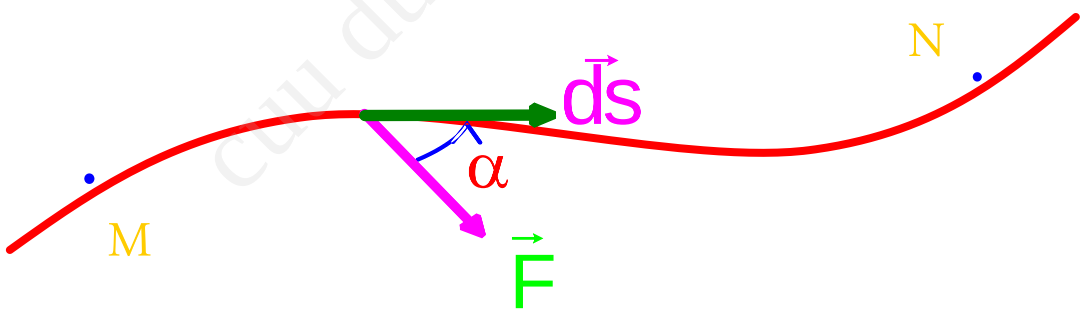
3.3. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

3.3.1. Công cơ học

Giả sử dưới tác dụng của lực F chất điểm m dịch chuyển được một đoạn đường vi phân ds. Người ta định nghĩa *công vi phân* δA mà lực F thực hiện được trên đoạn đường ds là *tích vô hướng* của hai vectơ:

$$\delta A = d\vec{s}\,\vec{F} \qquad (3.23)$$

Hay $\delta A = F ds\cos\alpha = F_s\, ds$



Hình 3.5: Coâng cô hoïc

17/09/2017 9:55:32 CH

Lấy tích phân, ta có:

$$A_{MN} = \int_{M}^{N} \delta A = \int_{M}^{N} \vec{F} d\vec{s}$$

3.3.2. Động năng, định lý về động năng

1) Động năng

Ta gọi *động năng của một chất điểm khối lượng m có vận tốc là đại lượng vô hướng*:

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

gọi K_i là động năng của chất điểm thứ i trong hệ.

Vậy động năng của hệ là:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

2) Định lý về động năng

Xét một chất điểm có khối lượng m, dưới tác dụng của hợp lực thì nó sẽ chuyển động với vận tốc gia tốc . Theo định luật 2 Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Giả sử dưới tác dụng của lực F, chất điểm di chuyển từ vị trí 1 có vận tốc v_1 (tại thời điểm t_1) đến vị trí 2 có vận tốc v_2 (tại thời điểm t_2). Ta hãy tìm công của lực trong sự di chuyển này.

Gọi là véctơ dịch chuyển của chất điểm m trong khoảng thời gian dt, vậy công của lực F trong dt là:

$$\delta A = \vec{F}.d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = m\frac{d\vec{s}}{dt}d\vec{v}$$

$$\delta A = m\vec{v}d\vec{v}$$

$$A_{12} = \int_{1}^{2} \delta A = \int_{v1}^{v2} m\vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

Vậy có thể phát biểu định lý về động năng như sau: Độ biến thiên của động năng trong một khoảng thời gian bằng công của tất cả các lực đặt vào hệ thực hiện được trong khoảng thời gian đó.

3.3.3. Trường lực thế, thế năng trong trường lực thế

1) Khái niệm về trường lực thế

Một lực được gọi là lực thế (còn gọi là lực bảo toàn) nếu công do nó thực hiện trong sự chuyển dời một chất điểm chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối mà không phụ thuộc dạng quỹ đạo giữa hai điểm này.

Công toàn phần của một lực thế tác dụng lên chất điểm sẽ bằng không khi chất điểm di chuyển trên quỹ đạo kín, trở về vị trí ban đầu.

$$\oint_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = 0$$

2) Thế năng trong trường lực thế

a) Định nghĩa thế năng

Xét một trường thế. Trong trường thế ta chọn một điểm O có tọa độ (xo, yo, zo) làm gốc để tính thế năng (tức là qui ước thế năng tại O bằng không). Ta hãy tính công AMO khi làm dịch chuyển chất điểm từ vị trí M có tọa độ (x, y, z) đến vị trí O.

Từ những điều đã trình bày ở trên, ta biết rằng công AMO chỉ là hàm của tọa độ (xo, yo, zo) và (x, y, z) :

$$A_{MO} = \int_M^O \vec{F}d\vec{s} = U(x, y, z) - U(x_o, y_o, z_o)$$

Trong đó ta ký hiệu U là một hàm nào đó của tọa độ điểm quan sát M, O là một điểm chọn trước mà U(xo, yo, zo) = 0, vậy:

$$U(x, y, z) = A_{MO} = \int_M^O \vec{F}d\vec{s}$$

U được gọi là *hàm thế năng* (gọi tắt là *thế năng*) của chất điểm tại vị trí M(x, y, z) trong trường thế.

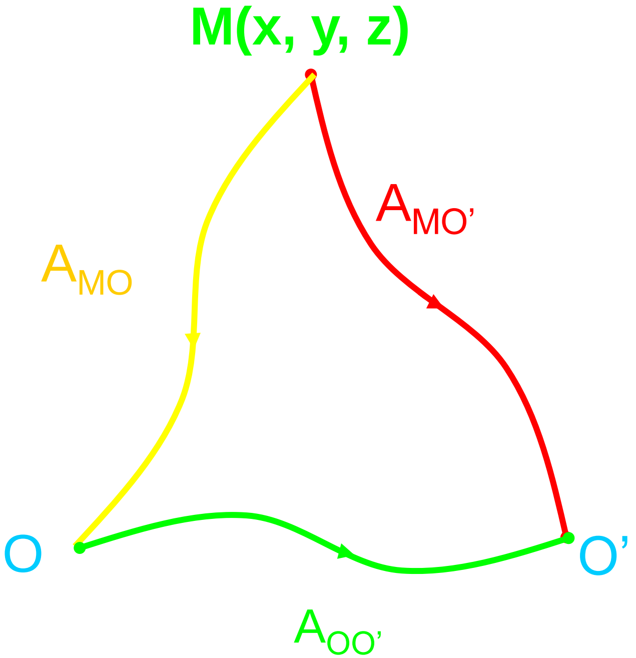
Vậy ta có thể định nghĩa thế năng:

Thế năng tại điểm M(x, y, z) trong trường lực thế là công làm dịch chuyển chất điểm từ vị trí M đến điểm gốc của thế năng.

Việc chọn điểm gốc để tính thế năng là hoàn toàn tùy ý.

Thật vậy, nếu ta chọn một điểm O' khác làm gốc thì theo (3.28), thế năng tại điểm M(x, y, z) đối với gốc O' là:

U'(x, y, z) = AMO' = AMO + AOO' = U(x, y, z) + AOO'



Hình 3.6

Biểu thức trên chứng tỏ thế năng tại điểm M lấy đối với gốc O' là U'(x, y, z) chỉ khác với thế năng tại điểm đó nhưng lấy đối với gốc O là U(x, y, z) một *hằng số là* AOO' = C, không phụ thuộc vị trí của chất điểm. Vì vậy người ta nói rằng *hàm thế năng được xác định sai kém một hằng số.*

$$U'(x, y, z) = U(x, y, z) + C$$

C được xác định bởi gốc thế năng.

Việc thế năng xác định không đơn trị mà sai kém nhau một hằng số C. Thật vậy:

$$U'(M)–U'(N) = [U(M)+C]–[U(N)+C]=U(M)–U(N)$$

b) Định lý về thế năng

Ta hãy tính công làm dịch chuyển chất điểm từ M đến N là hai điểm khác nhau trong trường thế.

Vì công thực hiện trong trường thế chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và cuối mà không phụ thuộc vào dạng đường đi nên :

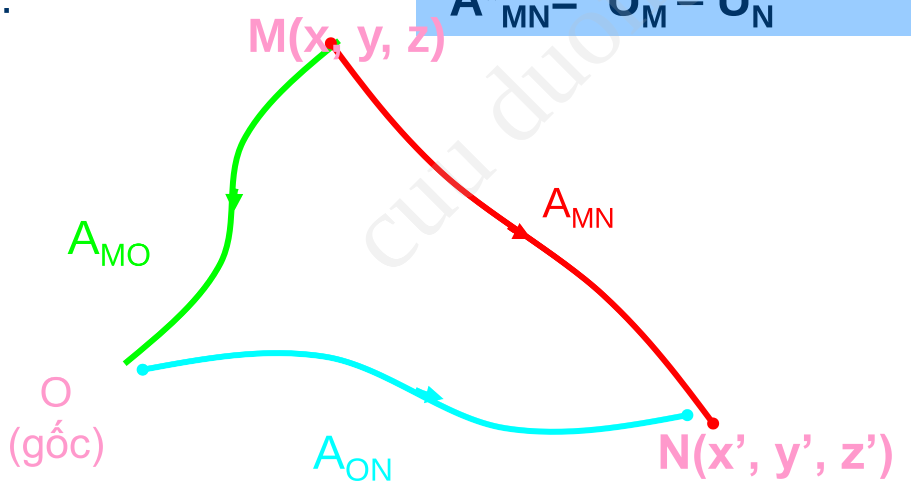
$$A_{MN} = A_{MO} + A_{ON} = U(M) + A_{ON} = U_M + A_{ON}$$

nhưng:

$$A_{ON} = -A_{NO} = -U(N) = -U_N$$

nên:

$$A^*_{MN} = U_M - U_N$$



*Ký hiệu * để chỉ công của lực trường thế.*

Hình 3.7

Công làm dịch chuyển chất điểm giữa hai điểm của trường thế bằng hiệu của thế năng giữa điểm đầu và cuối của quá trình chuyển động

$$A^{*}_{MN} = \int_{M}^{N} \vec{F}d\vec{s} = U_M - U_N$$

$$\int_{M}^{N} dU = U_N - U_M \quad \vec{F}d\vec{s} \rightarrow \quad = -\ dU$$

mà $d\vec{s} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$ $\quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

Suy ra $\vec{F}ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

mà

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

nên

$$Fx = -\frac{\partial U}{\partial x}; Fy = -\frac{\partial U}{\partial y}; Fz = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Trong giải tích véctơ người ta định nghĩa toán tử như sau: là một véctơ có ba thành phần

$$\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla U = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})U$$

$$= \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z} = -\vec{F}$$

Tóm lại: $$\vec{F} = -\nabla U$$

3.3.4. Các lực bảo toàn và phi bảo toàn

Quá trình chuyển đổi qua lại giữa thế năng và động năng là một quá trình chuyển đổi theo hai chiều hay là quá trình chuyển đổi *thuận nghịch* (bỏ qua tác dụng của ma sát) đồng thời trong quá trình chuyển đổi đó thì cơ năng của vật luôn không đổi. Trong các quá trình này vật chịu tác dụng của các lực mà nó có khả năng tạo cơ hội cho sự chuyển đổi qua lại giữa động năng và thế năng của vật. Các lực có tính chất như vậy gọi là *các lực bảo toàn* .

Một lực không có tính chất bảo toàn được gọi là lực phi bảo toàn*, ví dụ lực kéo của máy cày, của ngựa*. Một lực không bảo toàn không thể được biểu diễn bởi một hàm thế năng. Một số lực không bảo toàn như lực ma sát, lực nhớt của chất lưu làm tiêu tán một phần cơ năng của vật hay ta nói rằng làm tiêu tốn cơ năng, do đó các lực này còn được gọi là lực tiêu tán.

3.3.5. Định luật biến thiên và bảo toàn cơ năng

- Giả sử chất điểm chuyển động dưới tác dụng của lực bảo toàn Fbt và lực phi bảo toàn Fpbt

$$\vec{F} = \vec{F}_{BT} + \vec{F}_{PBT}$$

Theo định lý động năng (dạng vi phân): dK = δA

$$dK = \vec{F}d\vec{s} = \vec{F}_{BT}d\vec{s} + \vec{F}_{PBT}d\vec{s}$$

theo định lý thế năng:

$$\vec{F}_{BT}d\vec{s} = \delta A_{BT} = -dU$$

do đó:

$$dK = -dU + \vec{F}_{PBT}d\vec{s}$$

$$dK + dU = d(K + U) = dE = \vec{F}_{PBT}d\vec{s}$$

sau khi lấy tích phân $dE = \overline{F}_{PBT}d\vec{s}$, ta có

$$E_2 - E_1 = A_{PBT}$$

Vậy: *Độ biến thiên của cơ năng chất điểm bằng công của lực phi bảo toàn*

Khi lực phi bảo toàn $\vec{F}_{PBT} = 0$ thì ta có:

$$A_{PBT} = 0 \text{ và } E_2 = E_1$$

$$E = U + K = const$$

Vậy trong trường hợp không có lực phi bảo toàn: thế năng và động năng chất điểm sẽ biến đổi qua lại sao cho tổng thế năng và động năng là hằng:

$$U + K = const$$

- Xét trường hợp hệ gồm n chất điểm. Giả sử các chất điểm trong hệ tương tác với nhau bằng lực trường thế. Xét chất điểm thứ i, chịu tác dụng của các lực F_{ij} từ phía các chất điểm khác và cả ngoại lực F_{Ei} là lực phi bảo toàn.
Trong một chuyển dời dsi, công của tất cả các lực tác dụng lên chất điểm thứ i bằng:

$$dA_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij}.d\vec{s}_i + \vec{F}_{Ei}.d\vec{s}_i \qquad (*)$$

Đối với cả hệ ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} dA_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij} d\vec{s}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ei} d\vec{s}_i \qquad (**)$$

Xét từng thành phần trong (**): $\sum_{i=1}^{n} dA_i = dA = dK$

độ biến thiên động năng của hệ (theo định lý động năng)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij} d\vec{s}_i = -dU$$

độ giảm thế năng của hệ (theo định lý thế năng)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ei} d\vec{s}_i = dA_E$$

công của ngoại lực phi bảo toàn tác dụng lên hệ

Vậy: $dK = -\,dU + dA_E$

hay: $d(K+U) = dA_E$

Lấy tích phân:

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_E}$$

Độ biến thiên cơ năng của hệ bằng công của ngoại lực phi bảo toàn tác dụng lên hệ. Khi hệ cô lập (F_E = 0) thì E= const, cơ năng của hệ bảo toàn.

Nếu ngoại lực là lực trường thế (lực bảo toàn), ta có:

$dA^*_E = -\,dU_E$ (theo định lý thế năng)

Vậy: $dK = -\,dU - dU_E$

hay: $d(K + U + U_E) = 0$

Cơ năng của hệ bảo toàn khi ngoại lực là lực bảo toàn

3.4. TRƯỜNG HẤP DẪN

3.4.1. Lực hấp dẫn

Lực hấp dẫn giữa hai chất điểm có khối lượng m_1, m_2 đặt cách nhau một khoảng r có độ lớn

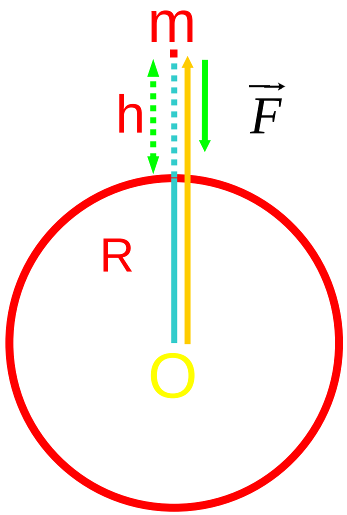
$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

G: hằng số hấp dẫn, trong hệ SI
G = 6,673.10–11 Nm²/kg²

3.4.2. Trường hấp dẫn.

Lực hấp dẫn giữa hai khối lượng là một lực tương tác từ xa, có nghĩa là hai vật tương tác không tiếp xúc. Trường hấp dẫn tác dụng lên tất cả các chất điểm trong không gian bao chung quanh Trái đất là hình ảnh của hiện tượng tương tác hấp dẫn. Khi một chất điểm khối lượng m nằm trong trọng trường (hình 3.8), nó sẽ chịu tác dụng của một lực:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Hình 3.8

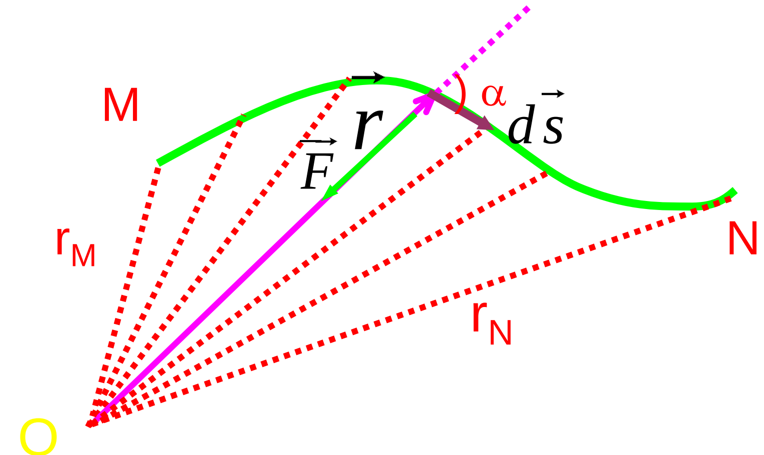
3.4.3. Thế năng trong trường hấp dẫn

Giả sử lực hấp dẫn tác dụng lên chất điểm làm cho nó chuyển dời từ M đến N (hình 3.9).
Công trên một chuyển dời được tính:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{s} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}d\vec{s}$$

Theo hình 3.9 ta thấy:

$$\vec{r}d\vec{s} = r ds \cos\alpha = r dr$$



Hình 3.9

Vậy công toàn phần thực hiện bởi F sẽ là

$$A = \int_{r_M}^{r_N} F(r)dr$$

Công do lực hấp dẫn thực hiện chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối. Do đó, lực hấp dẫn là lực thế. Với lực thế, ta có độ biến thiên của thế năng được viết như sau:

$$-dU = \delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$U_M - U_N = -\int_{r_M}^{r_N} G\frac{Mm}{r^2}dr = \left(-G\frac{Mm}{r_M}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_N}\right) \qquad (3.38)$$

Từ phương trình (3.38), thế năng của chất điểm có thể được viết:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + const$$

Tìm hằng số C

+ Nếu ta qui ước thế năng của chất điểm ở vô cùng bằng không (U(∞) = 0) thì:

$$U(\infty) = -G\frac{Mm}{\infty} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Với sự lựa chọn trên, U(r) luôn luôn âm và đại lượng cực đại U(r) = 0 khi chất điểm ở xa Trái đất vô cùng, công thức thế năng trở thành:

$$\boxed{U(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

+ Nếu qui ước thế năng trên mặt đất (r = R) bằng không (U(R) = 0) thì:

$$\boxed{U(r) = -G\frac{Mm}{r} + C = 0 \Rightarrow C = G\frac{Mm}{r}}$$

Công thức thế năng lúc này là:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{R+h} + G\frac{Mm}{R}$$

$$U(r) = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = G\frac{Mmh}{R(R+h)}$$

nếu $h << R$ $\quad U(r) = U(h) \approx G\frac{Mmh}{r^2}$

Tính gần đúng $g = G\frac{M}{r^2}$ là gia tốc trọng trường,

nên thế năng của vật thể ở gần mặt đất là:

$$\boxed{U(r) = mgh}$$

3.5. BÀI TOÁN VA CHẠM GIỮA HAI VẬT

3.5.1 <u>Định nghĩa:</u> Là hiện tượng hai vật tiếp xúc với nhau trong một thời gian cực ngắn rồi tách rời nhau. Sự va chạm làm các vật thay đổi vận tốc trong một thời gian ngắn, sự thay đổi có thể chia làm hai giai đoạn:

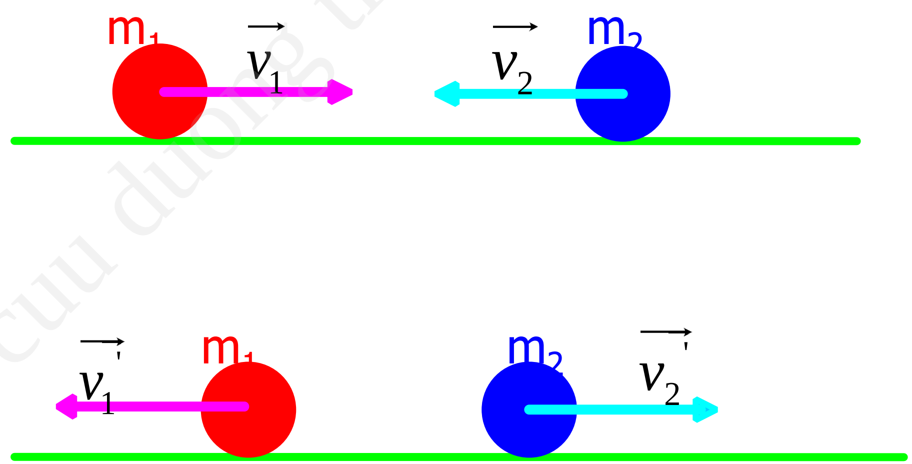
- Các vật va chạm bị biến dạng và ngừng lại, động năng giảm đi để cung cấp công làm vật va chạm biến dạng.
- Các vật va chạm có thể trở lại dạng cũ và được hoàn lại động năng một phần hay tất cả.

3.5.2. Các loại va chạm

- Va chạm đàn hồi là va chạm trong đó các vật va chạm bị biến dạng, động năng lúc đó chuyển hoàn toàn thành thế năng đàn hồi (như lò xo bị nén), thế năng này liền chuyển trở lại thành động năng và các quả cầu bật lìa xa nhau. Sau đó hình dạng của chúng được phục hồi như cũ. Trong va chạm này động lượng và cơ năng được bảo toàn.
- Va chạm hoàn toàn không đàn hồi (va chạm mềm): các vật sau va chạm dính vào nhau và chuyển động cùng vận tốc: động lượng bảo toàn, cơ năng không bảo toàn (một phần biến thành nhiệt lượng hoặc dạng năng lượng khác).

1) Va chạm đàn hồi giữa hai quả cầu

Xét hai quả cầu chuyển động có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 trên mặt phẳng ngang với vận tốc v_1, v_2 theo hướng trùng với đường nối tâm của chúng (chuyển động xuyên tâm). Biết m_1, m_2, v_1, v_2 . Tính v'_1, v'_2



Hình 3.10: Va chaïm ñaøn hoài

Vì va chạm đàn hồi nên động lượng và cơ năng được bảo toàn (hai quả cầu chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang nên thế năng không đổi, vậy bảo toàn cơ năng có nghĩa là bảo toàn động năng):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$\frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 = \frac{m_1}{2}v'^2_1 + \frac{m_2}{2}v'^2_2$$

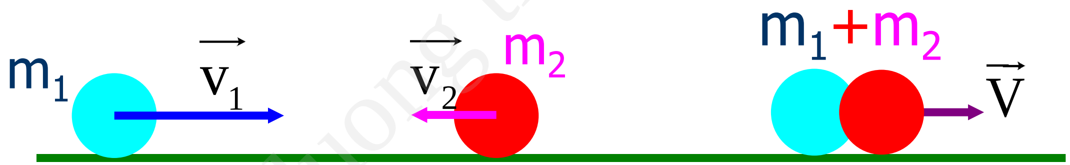
$$m_1(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v'_1}) = m_2(\overrightarrow{v'_2} - \overrightarrow{v_2})$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 v_1^{'2} = m_2 v'^2_2 - m_2 v_1^2$$

$$m_1(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v'_1})(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v'_1}) = m_2(\overrightarrow{v'_2} - \overrightarrow{v_2})(\overrightarrow{v'_2} + \overrightarrow{v_2})$$

2) Va chạm hoàn toàn không đàn hồi (va chạm mềm)

Trong va chạm này một phần cơ năng biến thành nhiệt năng toả ra hay biến thành công làm vật bị biến dạng còn cơ năng không bảo toàn (chỉ bảo toàn động lượng toàn phần và bảo toàn năng lượng toàn phần bao gồm cơ năng và nội năng). Cho m_1, m_2, v_1, v_2 .Tính và nhiệt lượng toả ra Q.



Hình 3.11: Va chaïm meàm

Theo định luật bảo toàn động lượng

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Động năng trước va chạm:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Động năng sau va chạm:

$$K' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

Theo định luật bảo toàn và chuyển hoá năng lượng:

$K = K' + Q \quad \rightarrow \quad Q = K - K'$

$$Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

Ta được năng lượng tiêu hao sau va chạm

$$\boxed{Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}$$

Với $M = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$: khối lượng rút gọn, ta có $Q = \dfrac{1}{2}M\Delta\vec{v}^2$

Vậy năng lượng tiêu hao giống động năng của khối lượng rút gọn chuyển động với vận tốc bằng vận tốc tương đối giữa hai vật.