CƠ HỌC VẬT RẮN

Định nghĩa:

Vật rắn là một hệ chất điểm mà *khoảng cách giữa các chất điểm luôn giữ không đổi trong quá trình chuyển động*

Có thể áp dụng các quy luật chuyển động của hệ chất điểm vào chuyển động của vật rắn!!!

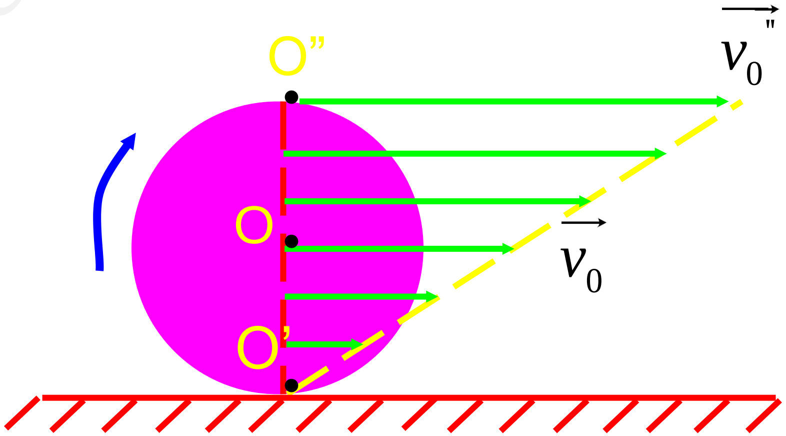
Kim cương là một loại vật rắn!

Chuyển động của vật rắn

Chuyển động tịnh tiến

Chuyển động quay

<u>Chứng minh</u>: Tổng hợp chuyển động của vật rắn được chứng minh qua chuyển động *song phẳng*, chuyển động trong đó mọi điểm của vật rắn được dịch chuyển trong những mặt phẳng song song với một mặt phẳng cố định



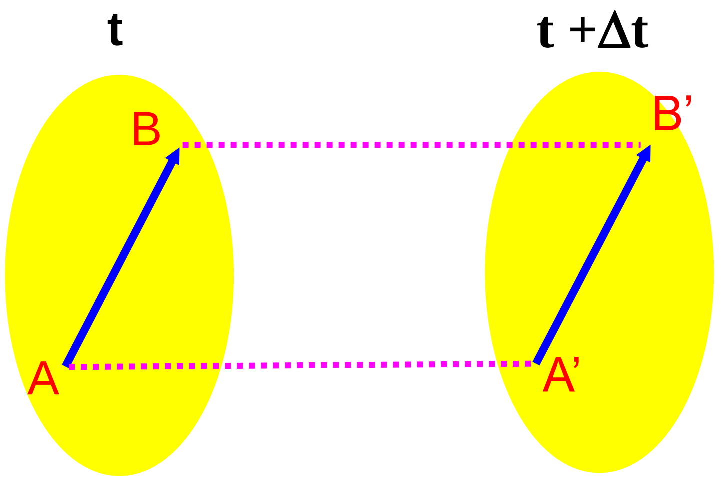
Hình 4.1: Sự lăn của hình trụ theo mặt phẳng là một chuyển động song phẳng

4.1
CÁC DẠNG CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

1) Định nghĩa:

Chuyển động tịnh tiến là chuyển động mà trong đó đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của vật rắn luôn song song với chính nó.



Hình 4.2

2) Đặc điểm:

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi chất điểm của vật rắn có cùng véctơ vận tốc và cùng véctơ gia tốc.

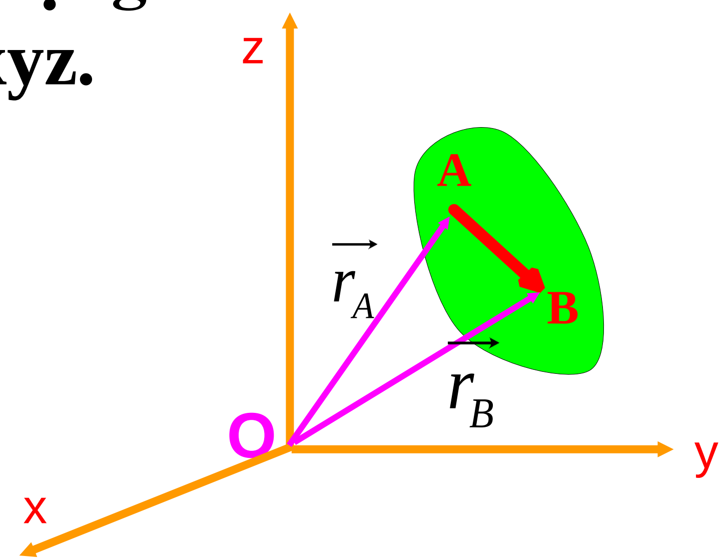
➢ Cho một vật rắn chuyển động trong hệ qui chiếu quán tính Oxyz.

Xét điểm A, B trên vật rắn:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Lấy đạo hàm hai vế biểu thức trên:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{dt}$$



Hình 4.3 Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

$\overrightarrow{AB}$ **luôn luôn song song với chính nó, nên:**

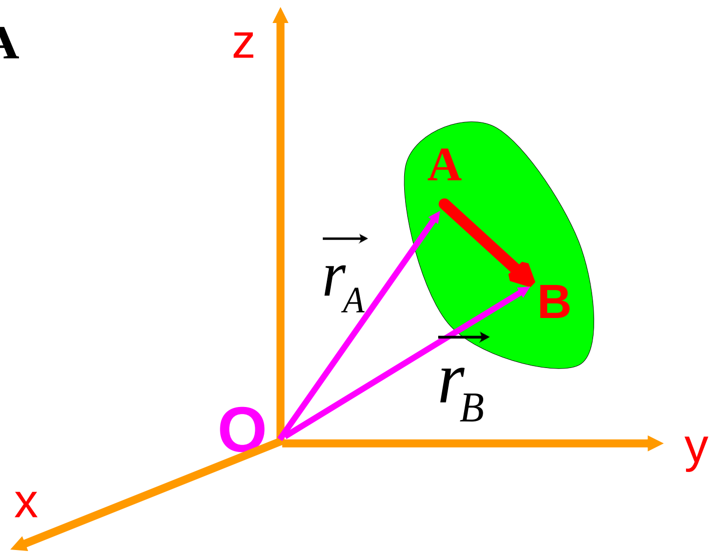
$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

Vậy: $$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Vì A, B là hai điểm bất kỳ nên có thể suy ra:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \ldots \qquad (4.1)}$$

Vậy: mọi điểm trên vật rắn đều có cùng véctơ vận tốc!!!



Hình 4.3 Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Đạo hàm (4.1):

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \ldots$$

Vậy:

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \ldots \qquad (4.2)}$$

Nghĩa là:

Mọi điểm trên vật rắn đều có cùng véctơ gia tốc!!!

3) Khối tâm vật rắn:

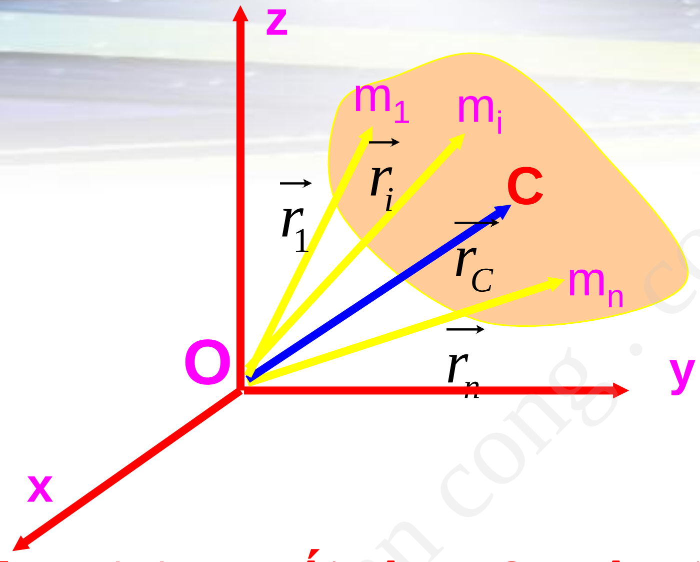
a) Định nghĩa: Xem vật rắn như một hệ gồm n chất điểm. C được gọi là khối tâm của vật rắn nếu vị trí của C thoả công thức:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (4.3)}$$

Trong đó:

- m_i và $\vec{r}_i$ lần lượt là khối lượng và véctơ vị trí của chất điểm thứ i.
- $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ là khối lượng vật rắn.



Hình 4.4: Khối tâm của vật rắn

Nếu khối lượng của vật rắn là một phân bố liên tục thì (4.3) trở thành:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_m \vec{r}dm \qquad (4.4)$$

$$x_C = \frac{1}{m}\int_m xdm \qquad y_C = \frac{1}{m}\int_m ydm \qquad z_C = \frac{1}{m}\int_m zdm$$

➢ **Nếu chọn *gốc tọa độ* trùng với khối tâm C thì $\vec{r}_C = 0$ và từ (4.3) ta suy ra:**

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0 \qquad (4.5a)$$

$$\int_m \vec{r} dm = 0 \qquad (4.5b)$$

Trong đó: $\vec{r}_i$ là bán kính vectơ nối liền khối tâm với chất điểm m_i.

b) Đặc điểm của khối tâm:

❖ Vận tốc khối tâm

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Mà động lượng vật rắn: $\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{P}$

Nên: $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C \quad \textbf{(4.6)}}$

Vậy động lượng của vật rắn bằng tích số của khối lượng của vật rắn và vận tốc của khối tâm vật rắn đó !!!

❖ Gia tốc khối tâm

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Với: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ là lực tổng hợp tác dụng lên vật rắn

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_C} \qquad (4.7)$$

Vậy phương trình chuyển động của vật rắn bằng tích số của khối lượng vật rắn với gia tốc của khối tâm vật rắn đó.

Kết luận

- ***Chuyển động tịnh tiến*** **của vật rắn tương đương với** ***chuyển động của khối tâm*** **của nó, với khối lượng bằng khối lượng của vật rắn và ngoại lực bằng hợp lực tác dụng lên vật rắn.**
- **Mặt khác khối tâm cũng là một chất điểm, do đó, có thể xem bài toán chuyển động tịnh tiến của vật rắn như bài toán chuyển động của một chất điểm đặt tại khối tâm và có khối lượng bằng khối lượng của vật rắn.**

4.1.2. Chuyển động tổng quát của vật rắn

Xét chuyển động song phẳng bất kỳ của vật rắn

Gọi C là khối tâm của vật rắn, M là một điểm bất kỳ của vật rắn nằm trong tiết diện S.

Gọi O là gốc tọa độ, $\vec{r}_C$ và $\vec{r}_M$ là hai bán kính vectơ xác định vị trí của C và M.

Theo qui tắc cộng vectơ, ta có:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}$$

$\vec{r}$ là bán kính vectơ nối từ C tới M.

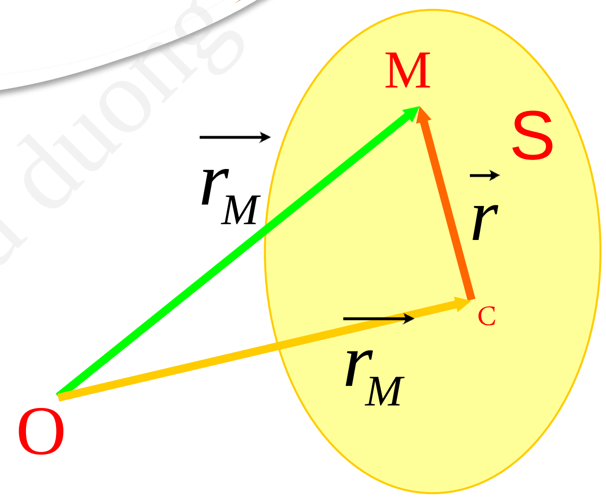
Lấy đạo hàm theo thời gian của biểu thức trên

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vận tốc điểm M — $\vec{v}_M$

Vận tốc khối tâm — $\vec{v}_G$

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ — **Vận tốc dài của điểm M**



Hình 4.5: Chuyển động song phẳng của vật rắn

Vận tốc của điểm M trong chuyển động song phẳng bất kì.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ý nghĩa

Chuyển động song phẳng bất kỳ của vật rắn bao giờ cũng có thể phân thành hai chuyển động thành phần:

- ***Chuyển động tịnh tiến của khối tâm của vật rắn.***
- ***Chuyển động quay của vật rắn quanh trục quay đi qua khối tâm.***

Lưu ý

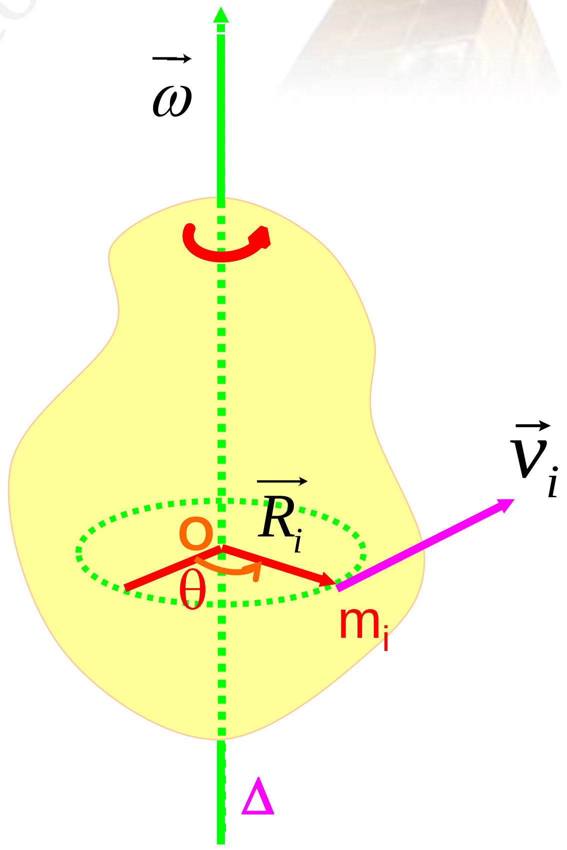
✓**Trục quay trong trường hợp này không đứng yên mà luôn tịnh tiến trong không gian giống như khối tâm. Trục quay như thế gọi là *trục quay tức thời*.**

✓**Kết luận trên không chỉ đúng với khối tâm mà còn *đúng với một điểm bất kỳ trên vật rắn*.**

4.1.3. Chuyển động quay quanh trục của vật rắn

1) Định nghĩa:

Là chuyển động mà các chất điểm của vật rắn có quĩ đạo là những vòng tròn tâm nằm trên trục quay và bán kính bằng khoảng cách từ chất điểm đến trục quay.



Hình 4.6: Chuyển động quanh trục của vật rắn

2) Đặc điểm:

Khi vật rắn quay quanh một trục thì

Sau thời gian t như nhau các chất điểm ở vật rắn quay những góc bằng nhau.

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots$

Các chất điểm có cùng vận tốc góc

Các chất điểm có cùng gia tốc góc

Do góc quay bằng nhau nên:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} = \ldots. \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots$$

Với trục quay cố định thì véctơ vận tốc góc cũng bằng nhau:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \ldots.. \quad \textbf{(4.9)}$$

***Lưu ý*: Khi quay chất điểm nào càng xa trục thì *vận tốc dài* càng lớn, chất điểm nằm trên trục thì vận tốc dài bằng không.**

$$v_i = R_i\omega_i = R_i\omega$$

Do vận tốc góc bằng nhau nên:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} = \ldots\ldots \rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots.$$

Với trục quay cố định thì:

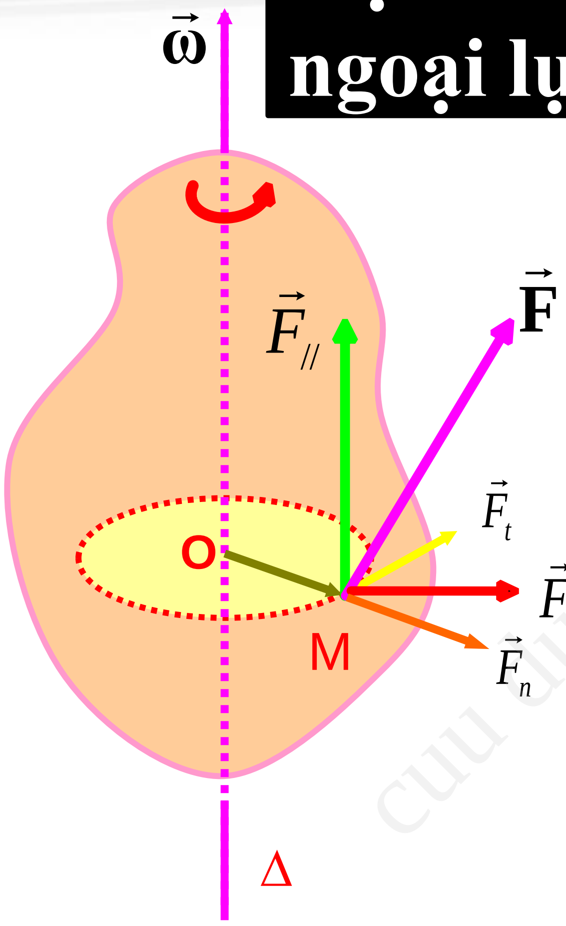
$$\boxed{\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}_3 = \ldots. \qquad \mathbf{(4.10)}}$$

<u>Lưu ý</u>**:** **Khi quay chất điểm nào càng xa trục thì *gia tốc tiếp tuyến* càng lớn, chất điểm nằm trên trục gia tốc tiếp tuyến bằng không.**

$$a_i = R_i\beta_i = R_i\beta$$

4.2
PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Xét vật rắn quay quanh một trục cố định dưới tác dụng của ngoại lực



Hình 4.7: Lực tác dụng lên vật rắn quay quanh trục

Ta có thể phân tích $\vec{F}$ thành các thành phần khác nhau:

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$$

Mà: $$\vec{F}_{\perp} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

Vậy: $$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_t + \vec{F}_n}$$

PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

$$\vec{F} = \boxed{\vec{F}_{//}} + \vec{F}_t + \boxed{\vec{F}_n}$$

Không thể **làm cho vật rắn quay, nó chỉ có tác dụng làm cho vật rắn trượt dọc theo trục quay, chuyển động này không thể có vì theo giả thiết thì vật rắn chỉ quay quanh trục quay.**

Không thể **làm cho vật rắn quay, nó chỉ có tác dụng làm vật rắn dời khỏi trục quay, điều này cũng không thể có.**

KẾT LUẬN

Trong chuyển động quay, tác dụng của lực $\vec{F}$ tương đương với tác dụng của thành phần $\vec{F}_t$ của nó.

Do đó, trong chuyển động quay quanh trục, để đơn giản ta chỉ xét đến những *lực tiếp tuyến* này !

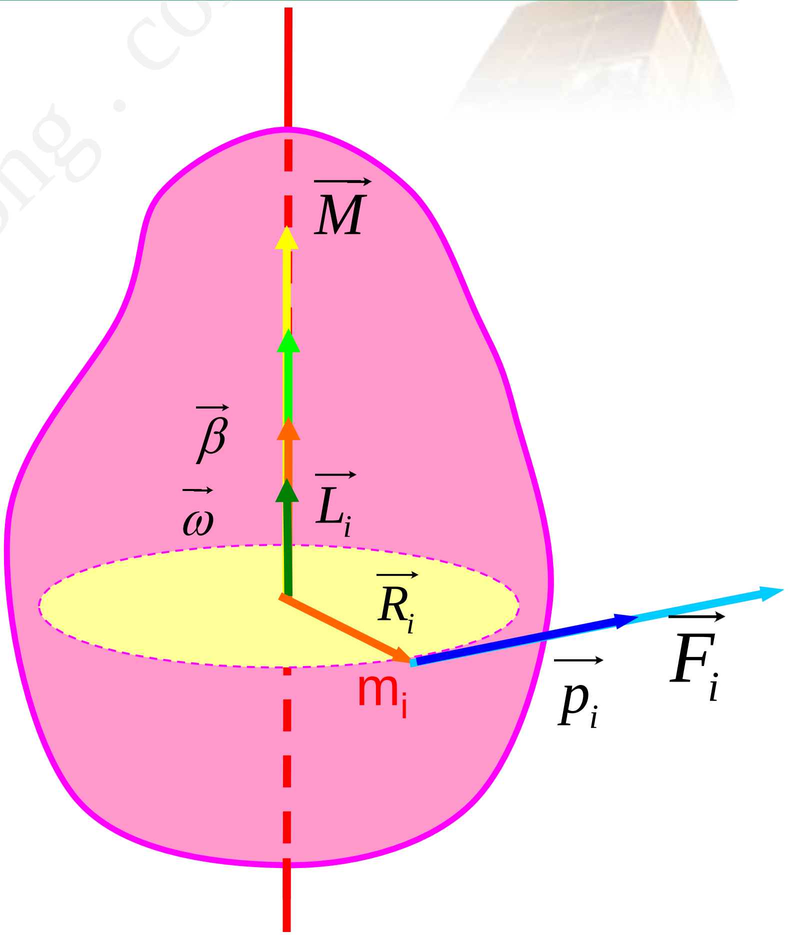
4.2.1. Mômen động lượng của vật rắn quay

➢ Mômen động lượng của chất điểm thứ i đối với trục quay là:

$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

- $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ hướng theo phương *tiếp tuyến*.
- $\vec{R}_i$ hướng theo phương *bán kính*.

➡ $\vec{L}_i$ hướng theo trục quay



Hình 4.8

➤ Véctơ mômen động lượng của vật rắn đối với trục quay:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

- $\vec{L}_i$ hướng theo trục quay nên $\vec{L}$ cũng hướng theo trục quay.

- Độ lớn: $L = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega_i$

- Nên: $L = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$

- **Đặt:** $$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \qquad (4.12)$$

Mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay

Vậy: $$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (4.13)$$

(Do $\vec{L}$ và $\vec{\omega}$ cùng phương)

4.2.2. Véctơ mômen lực đối với trục quay

➢ Véctơ mômen của lực $\vec{F}_i$ đối với trục quay

$$\vec{M}_i = \vec{R}_i \times \vec{F}_i$$

- $\vec{R}_i$: cánh tay đòn, là khoảng cách đến trục quay của véctơ lực tiếp tuyến.
- $\vec{M}_i$ hướng theo trục quay và có độ lớn:

$$M_i = R_i F_i$$

➢ Véctơ mômen lực đối với trục quay tác dụng lên vật rắn:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \times \vec{F}_i \qquad (4.14)$$

4.2.3. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định quay

- Cho vật rắn quay quanh trục, ta có:

$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

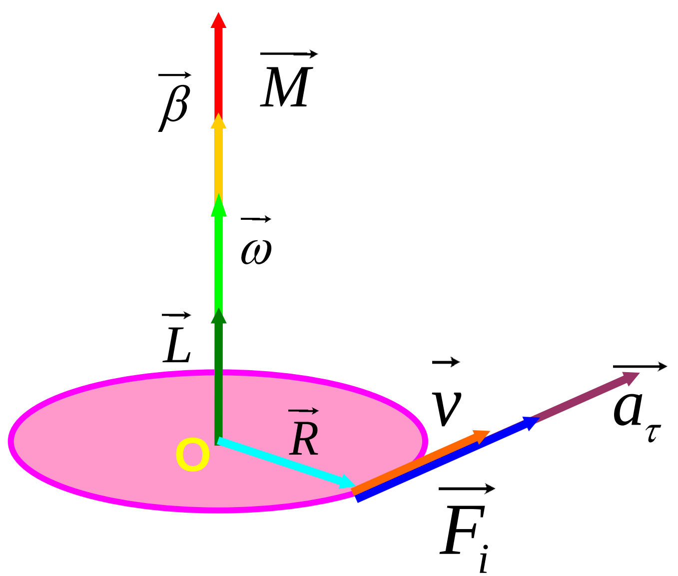
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{R}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{R}_i}{dt} \times \vec{p}_i = \vec{R}_i \times \vec{F}_i + \vec{v}_i \times m\vec{v}_i$$

- Vậy: $$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i$$

➢ **Lấy tổng hai vế biểu thức trên ta có:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

❖ **<u>Kết luận</u>: mối quan hệ giữa véctơ mômen động lượng $\vec{L}$ với véctơ mômen ngoại lực $\vec{M}$ đối với trục cũng có công thức giống như trường hợp đối với điểm.**



Hình 4.9

- Theo (4.13): $\vec{L} = I\vec{\omega}$

- Vậy: $\boxed{\vec{M} = I\vec{\beta}}$ (4.15)

Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định.

4.3
MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VÀI VẬT RẮN ĐƠN GIẢN

4.3.1. Công thức

- Mômen quán tính với một trục quay xác định cho vật rắn gồm các chất điểm phân bố rời rạc:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

- Khi vật rắn gồm các chất điểm phân bố liên tục:

$$I = \int_m R^2 dm \qquad (4.16)$$

4.3.1.1/ Mômen quán tính I của một thanh đồng chất đối với trục quay vuông góc với thanh tại trung điểm

Bài toán

Cho một thanh có chiều dài ℓ, khối lượng m, tiết diện S. Tìm mômen quán tính I đối với trục quay Δ là trung trực của thanh. Giả sử thanh nằm dọc theo trục Ox.

GIẢI

Chọn dm như hình vẽ. Gọi ρ là khối lượng riêng của thanh thì dm = ρSdx.

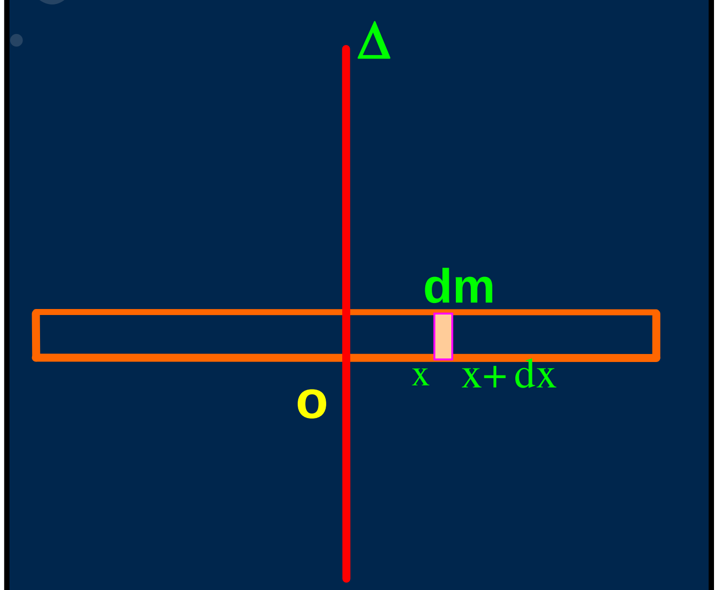
Thay vào (4.16), với R = x, ta có:

$$I = \int_m x^2 dm$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho S x^2 dx = \frac{1}{12}\rho S l^3$$

Với ρSl = m là khối lượng thanh.

Vậy: $$\boxed{I = \frac{1}{12} m l^2} \qquad (4.17)$$



Hình 4.10: Mômen quán tính của thanh

4.3.1.2/ Mômen quán tính I của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn

Bài toán

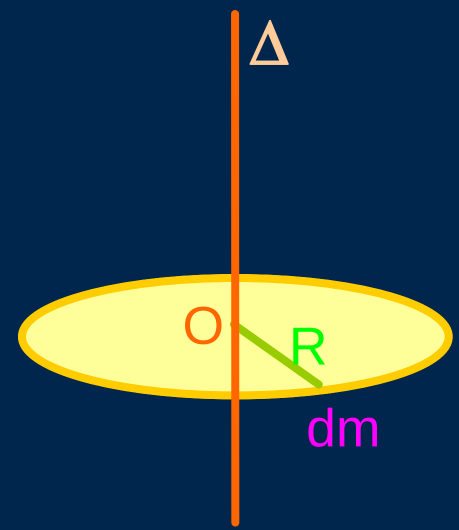
Cho vòng tròn tâm O bán kính R, khối lượng m. Tìm mômen quán tính của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn.

GIẢI

Chia vòng tròn ra làm nhiều phần nhỏ có khối lượng dm, vì ở trên vòng tròn nên dm cách tâm O một khoảng bằng bán kính R. Vậy theo (4.16) ta có:

$$I = \int_m R^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = R^2 \int_m dm = mR^2$$

Vậy: $$\boxed{\mathbf{I = mR^2}} \qquad (4.18)$$



Hình 4.11: Mômen quán tính của vòng tròn

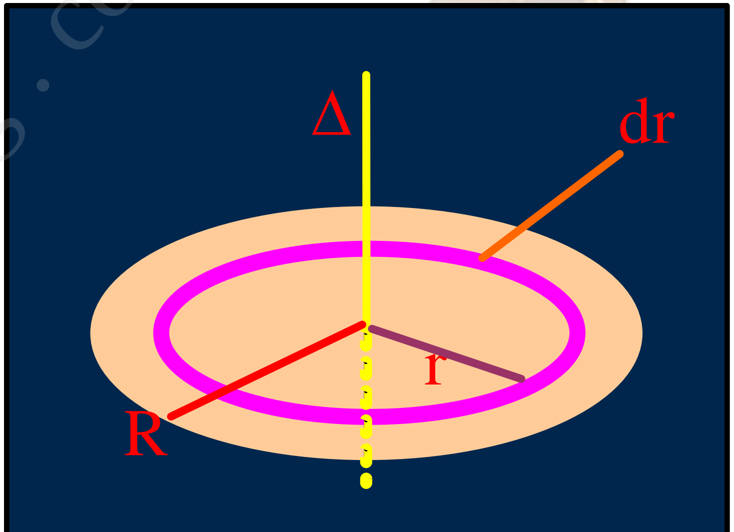
4.3.1.3/ Mômen quán tính I của một đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa

Bài toán

Cho một đĩa tròn mỏng tâm O bán kính R, khối lượng m. Tìm mômen quán tính của đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa.

GIẢI

Chia đĩa thành nhiều vành có bề rộng rất nhỏ sao cho vành tròn tương đương những vòng tròn và lấy vành bất kỳ có bán kính trong r, bán kính ngoài r + dr, diện tích của vành là $dS = 2\pi r dr$ và khối lượng của nó là $dm = \sigma dS$, với σ là khối lượng trên đơn vị diện tích.



Hình 4.13: Mômen quán tính của đĩa tròn

Theo công thức (4.18) tính mômen quán tính của vòng tròn ta được:

$$dI = r^2 dm$$

$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi . rdr \Rightarrow I = 2\sigma\pi\int_0^R r^3 dr = \frac{\sigma\pi}{2}\left[r^4\right]_0^R$$

Với m = $\sigma\pi R^2$ nên:

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2}} \qquad (4.19)$$

4.3.1.4/ Mômen quán tính của trụ rỗng, trụ đặc

Trụ rỗng

Chia trụ rỗng thành n vòng tròn, mỗi vòng có mômen quán tính

$$I_i = m_i R_i^2 = m_i R^2$$

Mômen quán tính của trụ rỗng:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{1=1}^{n} m_i R_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = mR^2$$

Vậy:

$$\boxed{I = mR^2} \qquad (4.20)$$

Trụ đặc

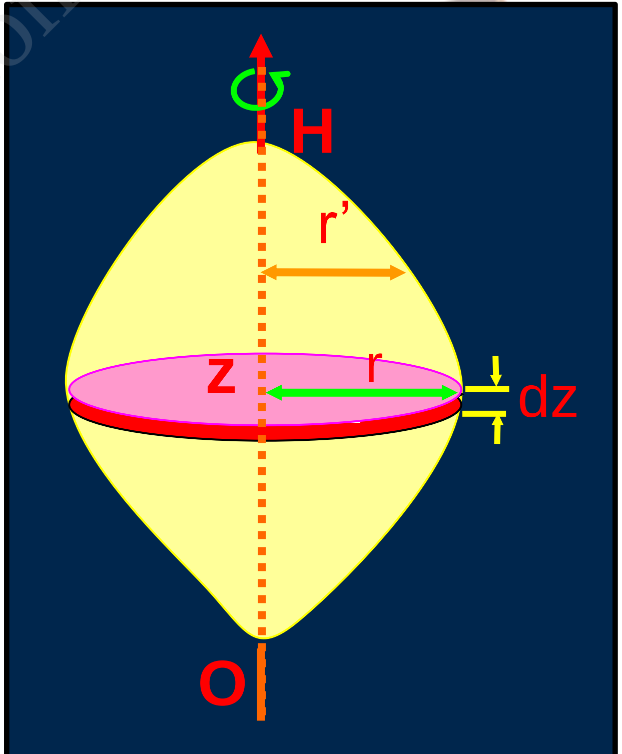
Chia hình trụ đặc thành n đĩa tròn, mỗi đĩa có mômen quán tính:

$$I_i = \frac{1}{2} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} m_i R^2$$

Mômen quán tính của hình trụ đặc:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Vậy: $$\boxed{I = \frac{1}{2} m R^2} \qquad (4.21)$$



Hình 4.13

4.3.1.5/ Mômen quán tính của các vật tròn xoay

Khái niệm: ***Vật tròn xoay*** **là những vật mà bề mặt của chúng được tạo thành bởi sự quay của một đường cong phẳng quanh một trục nằm trong mặt phẳng chứa đường cong đó.**

Bài toán

Tính mômen quán tính của vật tròn xoay đối với trục Oz khi biết sự phụ thuộc hàm r(z) và mật độ ρ.

GIẢI

- **Ta chia vật thành những đĩa mỏng có chiều cao dz. Mômen quán tính của mỗi đĩa được tính theo (4.19):**

$$dI = \frac{1}{2}dmr^2 = \frac{1}{2}\pi\rho r^4 dz$$

Với $\mathbf{dm = \rho\pi r^2 dz}$ là khối lượng của đĩa.

- **Vậy mômen quán tính của hình tròn xoay:**

$$\mathbf{I = \int_{vtx} dI = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^H r^4 dz} \qquad (4.22)$$

Áp dụng (4.22) ta tính mômen quán tính của hình nón và hình cầu.

Hình nón

➢ **Đối với hình nón thì hàm r(z) có dạng:**

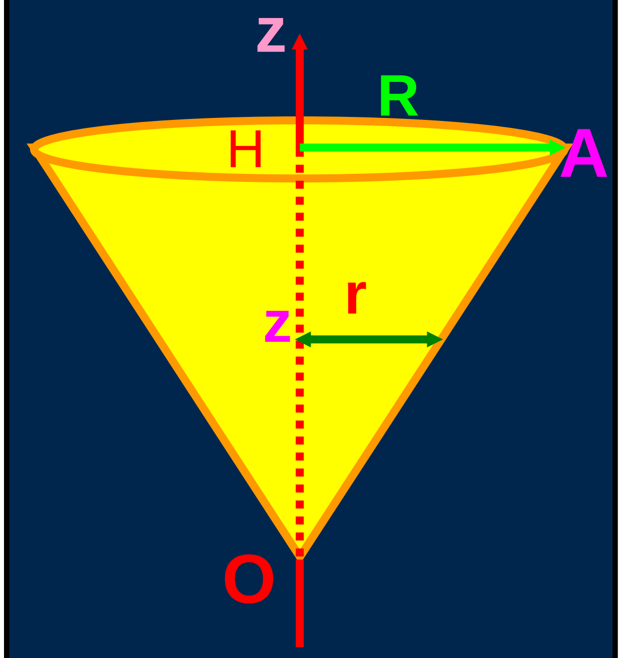
$$r = \frac{R}{H} z$$

➢ **Thay r vào (4.22), ta có:**

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{R}{H}\right)^4 \int_0^H z^4 dz = \frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{R}{H}\right)^4 \frac{H^5}{5}$$

➢ **Khối lượng hình nón: m = $\pi R^2 H\rho$**

➢ **Vậy:** $$\boxed{I = \frac{3}{10} mR^2} \qquad (4.23)$$



Hình 4.14

Hình cầu

Từ hình vẽ ta có: $r^2 = R^2 - z^2$

Thay r vào (4.22) ta được:

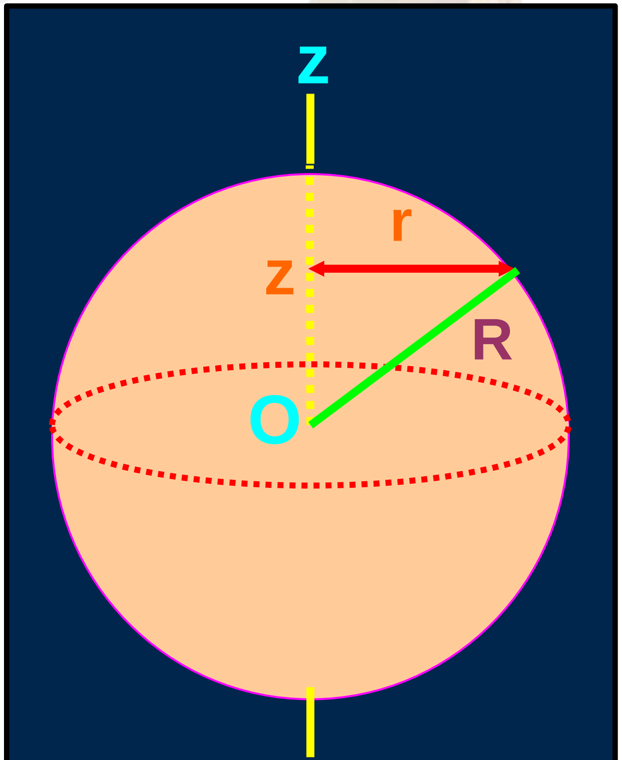
$$I = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R} r^4 dz = \pi\rho\int_{-R}^{R}\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$$= \pi\rho\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right) = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Với khối lượng quả cầu: $m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

Vậy:

$$\boxed{I = \frac{2}{5}mR^2} \qquad (4.24)$$



Hình 4.15

4.3.2. Định lý Steiner – Huyghens cho mômen quán tính I đối với một trục bất kỳ không qua khối tâm

Định lý Steiner – Huyghens

$$\boxed{I = I_C + ma^2} \qquad (4.25)$$

Với Δ : trục quay bất kỳ không qua khối tâm

Δ_c: trục quay qua khối tâm của vật và song song với Δ

I : mômen quán tính của vật rắn đối với trục Δ

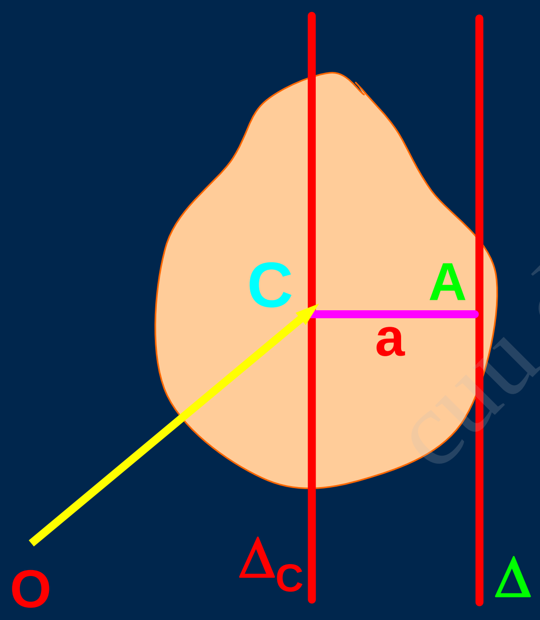
I_c: mômen quán tính của vật rắn đối với trục Δ_c

m : khối lượng của vật rắn

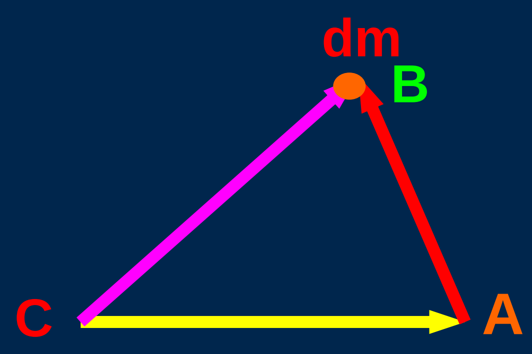
a : khoảng cách giữa hai trục Δ và Δ_c

CHỨNG MINH

- Xét tiết diện S của vật rắn vuông góc với hai trục Δ và Δ_C.
- Khoảng cách từ khối lượng vi phân dm đến các trục đi qua C và A lần lượt là $\vec{r}$ và $\vec{r}\,'$.



Hình 4.16



Hình 4.17: Tiết diện S của vật rắn vuông góc với hai trục Δ và Δ_C

Từ hình vẽ ta có: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$

Do đó: $(\vec{r}')^2 = r^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{r}$

➢ **Thay vào (4.16), ta có:**

$$I = \boxed{\int (\vec{r}')^2 dm} = \int r^2 dm + a^2 \int dm - \boxed{2\vec{a}\int \vec{r} dm}$$

Mômen quán tính của vật đối với trục đi qua A

Mômen quán tính I_C của vật đối với trục đi qua khối tâm C

$= ma^2$

$= 2\vec{a}(m\vec{r}_C)$

$\vec{r}_C$ là bán kính véctơ xác định vị trí của khối tâm C, mà gốc véctơ này chính là C, nên theo công thức (4.5b) thì:

$$\vec{r}_C = 0$$

Do đó: $$\mathbf{I = I_C + ma^2}$$

❖ Ví dụ: Tính mômen quán tính của thanh với trục quay không qua khối tâm.

$$\mathbf{I = I_C + ma^2}$$

$$\mathbf{I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2}$$

4.4
ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

Vật rắn quay quanh một trục có động năng K bằng động năng của tất cả các chất điểm tạo nên vật rắn

$$K = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

Do: $v_i = R_i \omega_i$ **nên** $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega_i^2$

Trong chuyển động quay thì mọi điểm có cùng vận tốc góc nên

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Động năng quay của vật rắn:

$$\boxed{\mathbf{K = \frac{1}{2} I \omega^2}} \qquad (4.16)$$

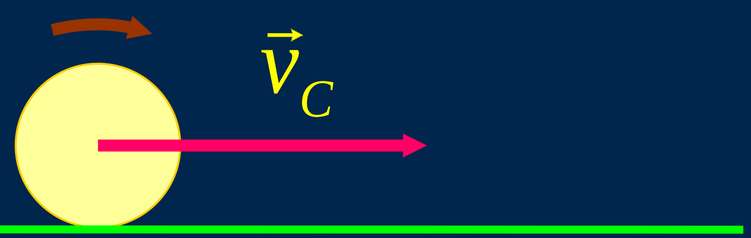
- **Động năng tịnh tiến:**

$$K = \frac{1}{2} m v_C{}^2$$

- **Nếu vật lăn: vừa tịnh tiến vừa quay thì:**

$$K = K_{tt} + K_q$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I\omega^2}$$



Hình 4.18: Chuyển động quay và tịnh tiến của vật rắn

4.5
ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA VẬT RẮN QUAY

4.5.1 Trường hợp một vật rắn

- Cho vật rắn quay quanh một trục cố định. Vật rắn cô lập thì mômen lực tác dụng lên nó bằng không nên:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$$

- Vậy

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}}$$

⇒ **Khi vật rắn không bị tác dụng của ngoại lực hay tổng mômen ngoại lực tác dụng lên nó bằng không thì mômen động lượng của nó được bảo toàn.**

Ví dụ:

Tốc độ quay của vũ công.

➢ Một vũ công quay tròn, ngoại lực tác dụng lên vũ công là trọng lực, vì trọng lực song song với trục quay nên:

$$\vec{M} = 0$$

➢ Vậy: $\vec{L} = I\vec{\omega} = const$

Một vũ công múa balê

ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA VẬT RẮN QUAY

R tăng

⬇

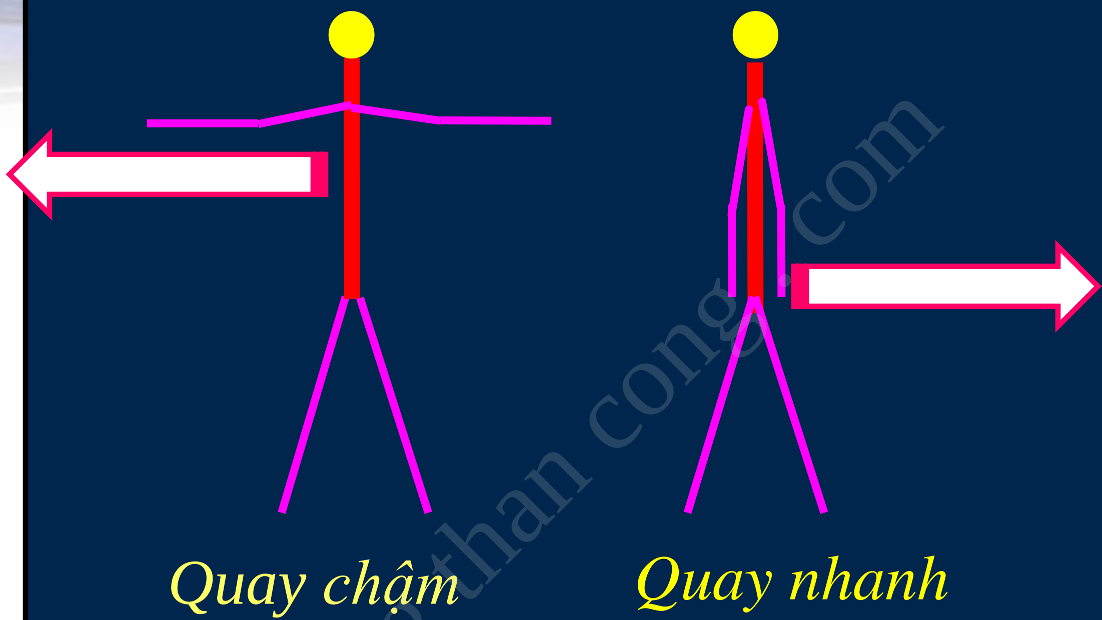
I tăng

⬇

ω giảm

⬇

quay chậm



Hình 4.19: Ví dụ định luật bảo toàn momen động lượng

R giảm

⬇

I giảm

⬇

ω tăng

⬇

quay nhanh

4.5.2. Hệ gồm nhiều vật rắn quay quanh trục

- Gọi $\vec{L}_i$ mômen động lượng của vật rắn thứ i.
- $\vec{L}$ là mômen động lượng của hệ vật rắn.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

Mà:

$$\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}_i$$

Nên:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega}_i$$

➤ Gọi $\vec{M}$ là mômen lực toàn phần tác dụng lên vật rắn.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

Ta có:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Vì: $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

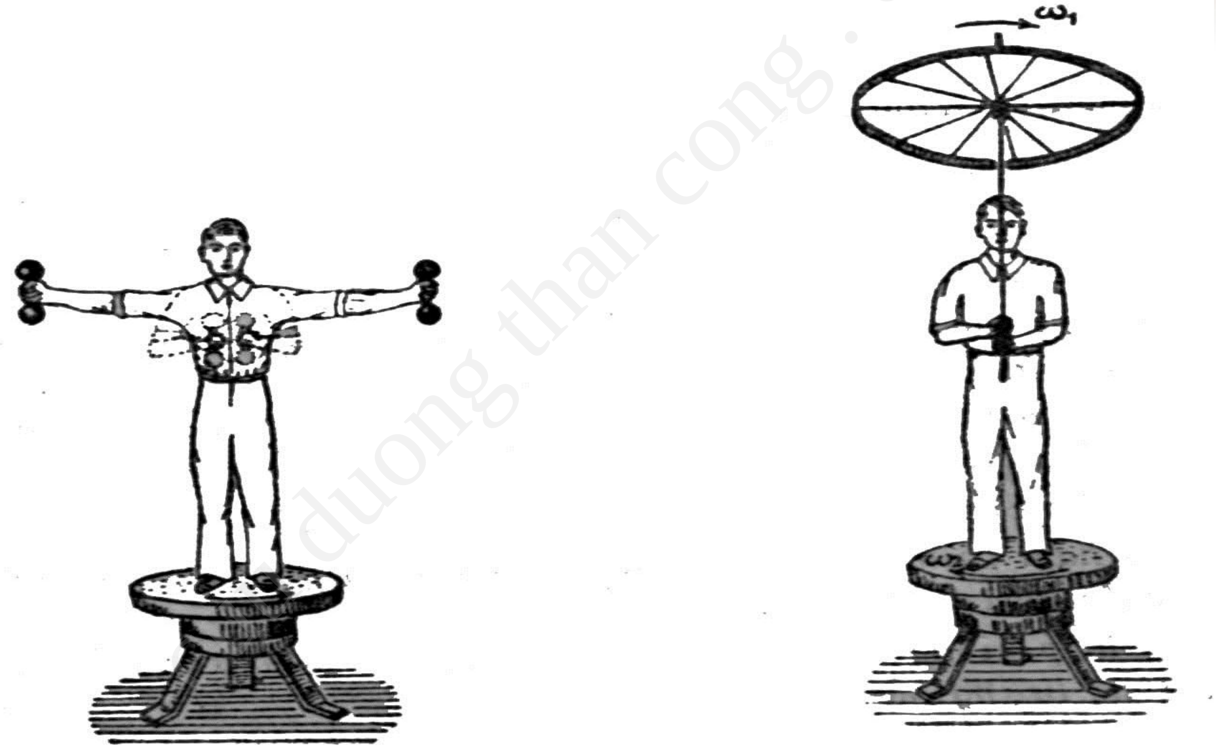
Vậy:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} I_i \vec{\omega}_i = \text{const} \qquad (4.29)$$

Nếu hệ cô lập hay mômen lực tổng hợp tác dụng lên hệ vật bằng không thì mômen động lượng của hệ được bảo toàn.

Ví dụ:

Ghế Giukopski



Hình 4.20

Giải thích

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = 0$$

I_1 là mômen quán tính của vành xe, I_2 là mômen quán tính của người và ghế.

Ta suy ra:

$$\vec{\omega}_2 = -\frac{I_1}{I_2}\vec{\omega}_1$$

Dấu trừ trong biểu thức trên chứng tỏ người và ghế quay ngược chiều so với chiều quay của vành xe như thực nghiệm đã xác nhận.

4.6
CON QUAY

4.6.1 Định nghĩa

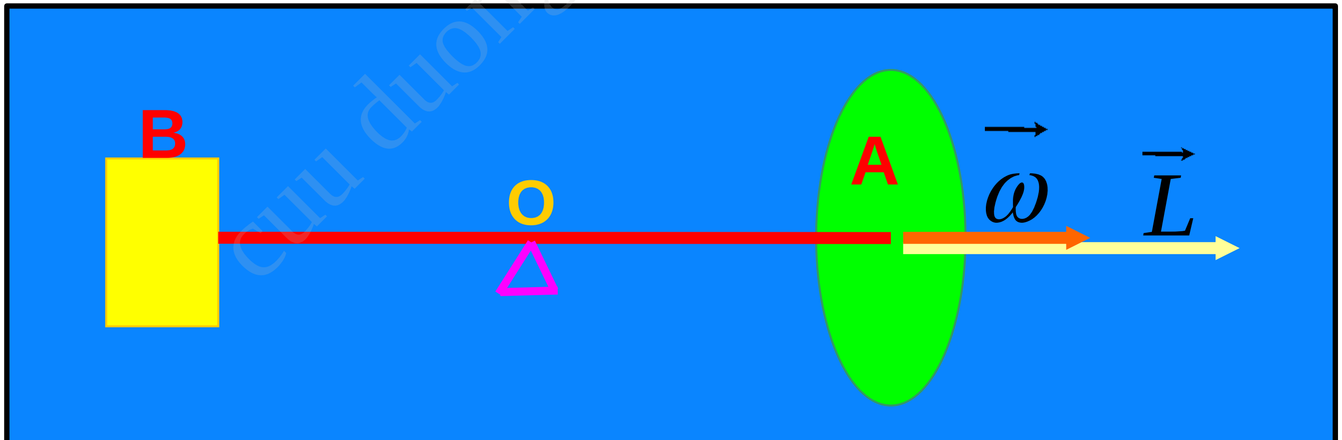
Con quay là một vật rắn đối xứng tròn xoay có thể quay nhanh chung quanh trục đối xứng của nó. Thông thường, người ta chế tạo con quay dưới dạng một cái vô lăng. Tùy theo yêu cầu sử dụng, người ta có thể làm cho trục con quay hoàn toàn cố định hoặc có một điểm cố định hoặc hoàn toàn tự do.

Một con quay Nhật Bản

4.6.2 Con quay tự do định hướng

Do có đối trọng B nên mômen trọng lực ở đầu A và B triệt tiêu nhau và con quay cân bằng, tự do. Do đó:

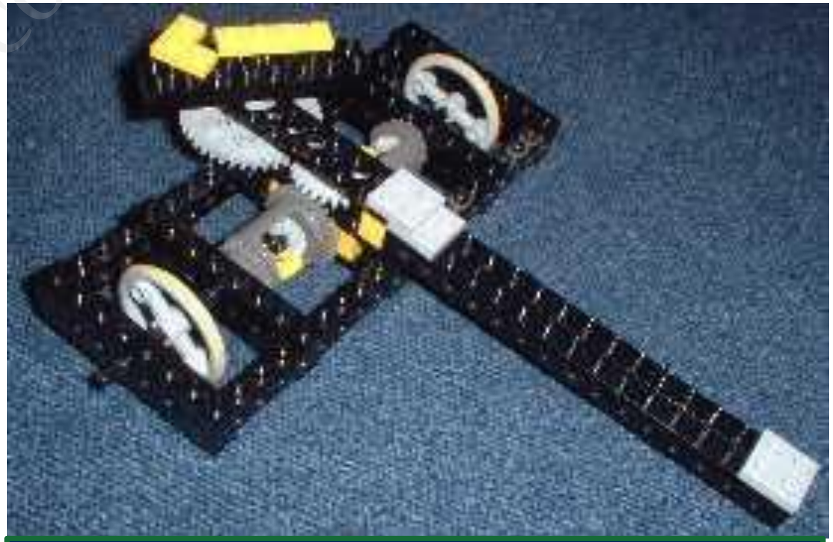
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$



Hình 4.21: Con quay tự do định hướng

Ý nghĩa: Vectơ vận tốc góc $\vec{\omega} = const$, mà $\vec{\omega}$ trùng với trục quay nên trục quay định hướng cố định trong không gian.

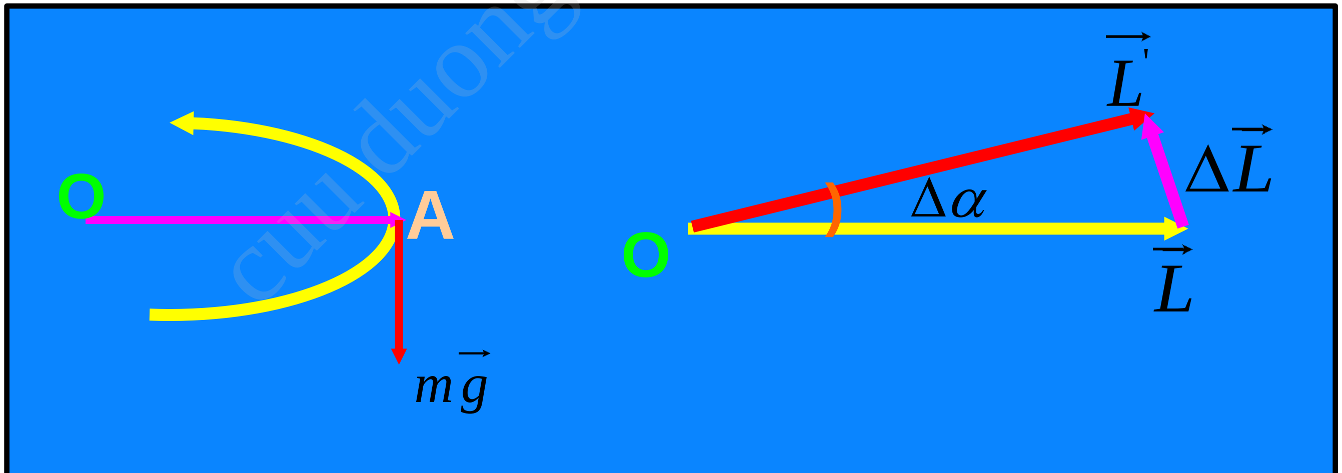
Ứng dụng: la bàn cơ học, đạn pháo xoáy, ngư lôi xoáy, máy bay trinh sát không người lái bay theo tuyến định sẵn.



La bàn cơ học

4.6.3. Con quay tiến động

Giả sử bỏ đối trọng B, ta có mômen trọng lực xuất hiện ở đầu A và có xu hướng lôi đầu A xuống. Thế nhưng, thực tế đầu A không đi xuống mà lại đi theo phương ngang vạch ra đường tròn bán kính OA.



Hình 4.22: Con quay tiến động

Chứng minh

Trong khoảng thời gian ta có:

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times m\vec{g}$$

m là khối lượng của con quay

➢ Áp dụng quy tắc vặn nút chai, ta thấy $\vec{M}$ hướng vào trong, do đó $\Delta\vec{L}$ cũng hướng vào trong. Nghĩa là đầu A gắn chặt với $\vec{L}$ sẽ quay từ từ vào trong với vận tốc góc Ω.

Theo hình vẽ: $\Delta L = L\Delta\alpha$

Chia hai vế cho Δt, ta có:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = L\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

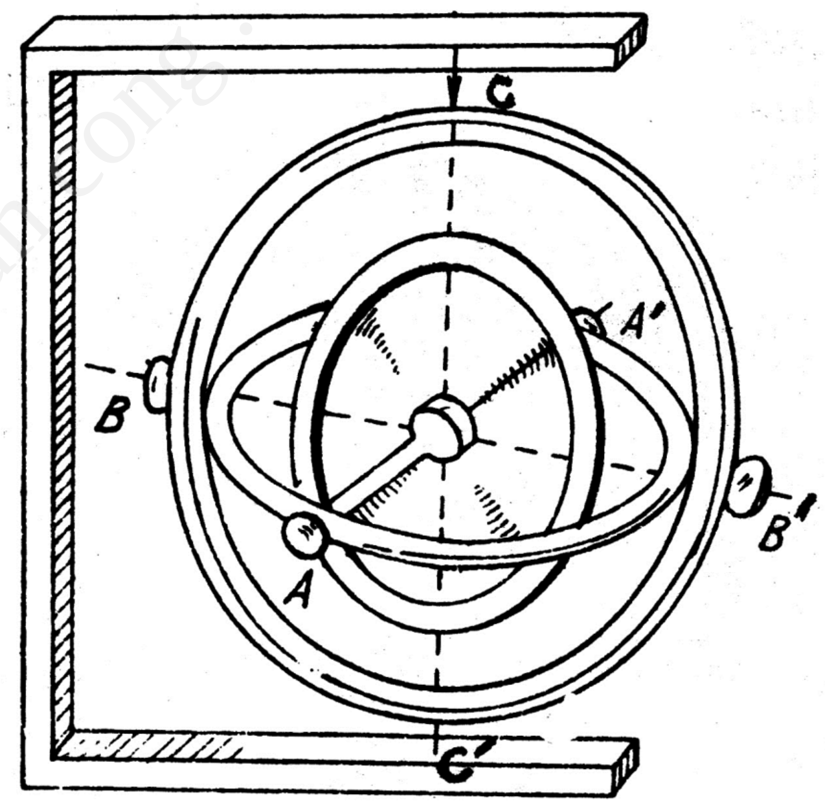
hay: $M = L\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}$

Kết luận

Vận tốc góc tiến động Ω tỉ lệ thuận với mômen lực M và tỉ lệ nghịch với ω.

4.6.4. Con quay đối xứng

Trên đây là con quay về nguyên tắc. Thực tế, để khỏi có đối trọng B làm cân bằng, người ta chế tạo con quay đối xứng nằm trong giá các đăng.



Hình 4.23

CON QUAY

Con quay là một đĩa tròn có trục đối xứng AA’ là trục quay. Để con quay có thể tự do định hướng theo phương bất kỳ, người ta chế tạo thêm hai vành tròn. Vành thứ nhất chứa trục AA’ có thể quay quanh trục BB’, làm cho trục con quay AA’ có thể tự do đổi hướng quanh trục BB’. Vành thứ hai có trục quay CC’ làm cho con quay có thể đổi hướng quanh trục CC’. Nhờ vậy con quay có thể định hướng theo hướng bất kỳ ta đặt nó. Khi quay tít (hồi chuyển) và tự do, hướng này là không đổi.

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng thì chừng nào chưa có ngoại lực tác dụng thì trục con quay AA' giữ phương không đổi trong không gian (vì phương của $\vec{L}$ hay $\vec{\omega}$ không đổi). Nếu giá đỡ lệch khỏi hướng đã định thì trục con quay vẫn giữ nguyên phương đã có. Hiệu ứng con quay hồi chuyển tự do được ứng dụng để điều chỉnh tự động đường đi của máy bay, tàu thủy, tên lửa,… theo phương đã định.