ĐỀ THI HỌC KÌ I Khóa 2010: Môn Toán B1
Khoa Vật Lý – Trường ĐHKHTN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày thi 24/01/2011
(Được phép sử dụng tài liệu)

1. Cho dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \sqrt[n]{n^2}$. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giá trị giới hạn của nó.

2. Cho dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+30}}}}_{\text{n dấu căn}}$.. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giá trị giới hạn của nó.

3. Hãy xác định giới hạn $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Cho $f(x) = x^2 ch(x)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

5. Hãy triển khai hàm số $f(x) = e^{x-2x^2}$ theo các lũy thừa nguyên dương của x đến số hạng chứa x^5.

6. Chứng minh rằng tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{1+\sin^2 x}}\,dx$ hội tụ.

--- HẾT ---

1. Xét dãy $\{b_n\}$, $b_n = \sqrt[n]{n} \geq 1$. Đặt $c_n = b_n - 1 \geq 0$.

$\Rightarrow b_n = 1 + c_n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + c_n \Rightarrow n = (1 + c_n)^n = 1 + nc_n + \frac{n(n-1)}{2}c_n^2 + \ldots + c_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}c_n^2$.

$\Rightarrow 0 \leq c_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Mà $b_n = 1 + c_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(1 + c_n) = 1$.

Ta có: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \,.\, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \,.\, 1 = 1$.

Vậy: Dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 1.

2. Dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \ldots + \sqrt{30 + \sqrt{30}}}}$.

Ta có: $5 \leq a_n \leq 6 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{30 + a_n} \leq 6$.

$\Rightarrow 30 + a_n = a_{n+1}^2 = a_{n+1} \,.\, a_{n+1} \leq 30 + a_{n+1} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ 5 \leq a_n \leq 6 \end{array}\right\}$ Theo Weierstrass về sự hội tụ của dãy đơn điệu bị chặn thì $\{a_n\}$ hội tụ

$\Rightarrow \exists A = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$.

Mặt khác: $30 + a_n = a_{n+1}^2 \Rightarrow A^2 - A - 30 = 0 \Leftrightarrow A = -5$ (loại) hay $A = 6$ (nhận).

Vậy: Dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 6.

3. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left\{\left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 3x} - 1}}\right\}^{\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x} - 1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x} - 1\right)} = e^A.$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\cos x - \cos 3x}{\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\cos x - (4\cos^3 x - 3\cos x)}{\cos 3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{4\cos x(1 - \cos^2 x)}{\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{4\cos x \sin^2 x}{\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos x}{\cos 3x} = 4.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^4.$$

4. $f(x) = x^2 ch(x)$.

Áp dụng công thức Leibniz ta có: $(uv)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k . u^{(k)} v^{(100-k)}$. Trong đó: $u = x^2$ và $v = chx$.

Ta có: $(x^2)^{(3)} = 0 \Rightarrow k = 0, 1, 2$.

Khi đó: $f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{2} C_{100}^k . u^{(k)} v^{(100-k)} = C_{100}^0 x^2 chx + C_{100}^1 2x.shx + C_{100}^2 2.chx$.

Suy ra: $f^{(100)}(x) = x^2 chx + 200x.shx + 9900chx$.

5. $f(x) = e^{x-2x^2}$. Đặt $X = x - 2x^2$. Áp dụng công thức Maclaurin với phần dư dạng Peano:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!} + o(X^5).$$

$$\Rightarrow e^{x-2x^2} = 1 + (x - 2x^2) + \frac{1}{2}(x - 2x^2)^2 + \frac{1}{6}(x - 2x^2)^3 + \frac{1}{24}(x - 2x^2)^4 + \frac{1}{120}(x - 2x^2)^5 + o(x^5).$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x-2x^2} = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + \frac{67}{40}x^5 + o(x^5).$$

6. Xét $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ ta có: $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(1 - e^{-b}) = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ.

Lại có: $0 \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{1+\sin^2 x}} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{1+\sin^2 x}}$ hội tụ.

Ivanpham