Khoa Vật lý – Vật lý kỹ thuật
Năm học 2013 – 2014

ĐỀ 1

Môn Toán cao cấp B1 (13VLH1 – 2)
Thời gian làm bài: 120 phút

Lưu ý: - Sinh viên **chỉ được** mang ***2 giáo trình lý thuyết và tài liệu chép tay*** vào phòng thi, **không được phép** sử dụng các thiết bị điện tử.

- Bài làm ***phải trình bày đầy đủ*** các bước tính, lập luận rõ ràng.

Câu 1: Dùng định nghĩa của đạo hàm để tính đạo hàm của $y = x + \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$.

Câu 2: Cho một hàm $y = f(x)$ thoả mãn phương trình $2x^3 - 9xy + 2y^3 = 0$. Đồ thị của hàm này đi qua điểm (1;2). Hãy tìm phương trình của tiếp tuyến với đồ thị của hàm $y = f(x)$ tại (1;2).

Câu 3: Ta định nghĩa hàm $F(x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ bằng biểu thức:

$$F(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$$

a) Bằng cách dùng định lý cơ bản của giải tích, tính $F(x)$. Đơn giản câu trả lời đến mức tối đa.
b) Bằng cách dùng câu a, tìm công thức cho $F(x)$.
c) Dùng công thức của $F(x)$ để tìm nguyên hàm của $\frac{1}{1+x^2}$. (Không sử dụng bảng nguyên hàm). Giải thích tại sao có được nguyên hàm đó.

Câu 4: Sử dụng quy tắc L'Hospital để tính những giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}; 0 < a < b$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x^3 - 5x + 1}{\ln x}$.

Câu 5: Tính các tích phân suy rộng sau:

a) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^3} dx$; $S > 1$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Câu 6: Xác định tâm, bán kính và khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n$$

Câu 7: Xác định các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ (trình bày rõ lý do):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

- - - HẾT - - -

ĐỀ 2

Đề thi học kỳ I khóa 2013: Môn Toán B1

Khoa Vật Lý – Trường ĐHKHTN – Lớp 13VLH3

Thời gian làm bài: 90 phút

(Được phép sử dụng tài liệu)

1. Khảo sát sự hội tụ của dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \frac{\sqrt{n}\cos(n!)}{n+1}$.

2. Cho dãy số $\{a_n\}$, $a_n = \underbrace{\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}}_{\text{n dấu căn}}$. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giá trị giới hạn của nó.

3. Hãy tính: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

4. Cho $f(x) = x^2\cos(x)$. Tính $f^{(50)}(x)$.

5. Hãy khai triển hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$ theo lũy thừa nguyên dương của x đến số hạng chứa x^5 với phần dư dạng Peano.

6. Tính e với độ chính xác đến 10^{-6}.

- - - HẾT - - -

Bài 1: Ta có: $-1 \le \cos(n!) \le 1 \iff -\frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}\cos(n!)}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$.

Theo định lý hàm kẹp $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(n!)}{n+1} = 0$. Vậy dãy $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 0.

Bài 2: Ta có: $3 \le a_n \le 4 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \le 4$.

$\Rightarrow 12 + a_n = a_{n+1}^2 = a_{n+1}.a_{n+1} \le 12 + a_{n+1} \Rightarrow a_n \le a_{n+1}$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} a_n \le a_{n+1} \\ 3 \le a_n \le 4 \end{matrix}\right\}$ Theo Weierstrass thì $\{a_n\}$ hội tụ $\Rightarrow \exists A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$.

Mặt khác: $12 + a_n = a_{n+1}^2 \Rightarrow A^2 - A - 12 = 0 \Rightarrow A = -3$ (loại) hay $A = 4$ (nhận).

Vậy dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và giá trị hội tụ bằng 4.

Bài 3: (Giới hạn đã cho có dạng 1^∞).

$$\text{Ta có: } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}-1}}\right\}^{x^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\right]} = e^A.$$

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2}{x^2+1}\right) = -2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = e^{-2}.$$

Bài 4: $f(x) = x^2\cos x$.

Áp dụng công thức Leibniz ta có: $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$. Với $u = x^2$ và $v = \cos x$.

Ta có: $(x^2)^{(3)} = 0 \Rightarrow i = 0; 1; 2$.

$$\Rightarrow (uv)^{(50)} = \sum_{i=0}^{2} C_{50}^i u^{(i)} v^{(50-i)} = x^2\cos\left(x + 50\frac{\pi}{2}\right) + C_{50}^1 2x.\cos\left(x + 49\frac{\pi}{2}\right) + C_{50}^2.2\cos\left(x + 48\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -x^2\cos x - 100x\sin x + 2450\cos x.$$

Vậy: $f^{(50)}(x) = (2450 - x^2)\cos x - 100x\sin x$.

Bài 5: $f(x) = e^{x-x^2}$. Đặt $X = x - x^2$. Áp dụng công thức Maclaurin với phần dư dạng Peano, ta có:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!} + o(X^5).$$

$$\Rightarrow e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + \frac{1}{6}(x-x^2)^3 + \frac{1}{24}(x-x^2)^4 + \frac{1}{120}(x-x^2)^5 + o(x^5).$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{27}{40}x^5 + o(x^5).$$

Bài 6: Xét hàm số $f(x) = e^x$. Ta có: $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$; $f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$.

Áp dụng công thức Maclaurin với phần dư dạng Lagrange ta có:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!} + R_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x). \text{ Trong đó: } R_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Cho $x = 1$ ta được công thức gần đúng để tính e như sau:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots + \frac{1^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(1). \text{ Trong đó: } R_n(1) = \frac{(1)^n}{n!}e^\theta.$$

Sai số: $|R_n(1)| = \frac{(1)^n}{n!}e^\theta < \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!}$. Chọn $n = 10$ ta có: $|R_n(1)| < \frac{3}{10!} < 10^{-6}$.

Vậy: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots + \frac{1^{10}}{10!} \approx 2{,}71828$.

- - - HẾT - - -

Ivanpham