Bài giảng môn học Toán cao cấp C2

Nguyễn Anh Thi

2015

Chương 2
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Nội dung

Khái niệm chung

1. Một hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó

Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

Nếu các hệ số $b_i = 0$ thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

2. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số* của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ $(*)$.

Ví dụ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases} \qquad (*)$$

Ma trận hệ số của hệ $(*)$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *cột hệ số tự do là* $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$, *cột ẩn của hệ là* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa

Hai hệ phương trình là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác* 0.
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

Định lý

Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \dots, 0)$.
Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

Giải hệ phương trình tuyến tính

- Phương pháp Gauss
- Phương pháp Gauss-Jordan
- Quy tắc Cramer

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1. Ma trận R có 1 dòng là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array} \right)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

Phương pháp Gauss

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

Phương pháp Gauss

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không chứa phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Phương pháp Gauss

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$

Phương pháp Gauss

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng $\tilde{A}$ là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 5; \\ x_4 = -3. \end{cases}$

Phương pháp Gauss

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -2 + 10t - 17s \\ x_1 = 5 - 17t + 29s \end{cases}$

Phương pháp Gauss

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$. Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1.Ma trận R_A có một dòng $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

Phương pháp Gauss-Jordan

- Trường hợp 2. Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

Phương pháp Gauss-Jordan

- Trường hợp 3. Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là bậc tự do của hệ phương trình.

Quy tắc Cramer

Định lý

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ *gồm n ẩn và n phương trình. Đặt* $\Delta = detA; \Delta_i = detA_i, i \in \overline{1,n}$ *trong đó* A_i *là ma trận có được từ A bằng cách thay cột i bằng cột B. Khi đó*

i. *Nếu* $\Delta \neq 0$ *thì hệ* $(*)$ *có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i \in \overline{1,n}$$

ii. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i \neq 0$ *với một i nào đó thì hệ* $(*)$ *vô nghiệm.*

iii. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i = 0, \forall i \in \overline{1,n}$ *thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

Quy tắc Cramer

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

Vì $\Delta \neq 0$, nên hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$

Ta có $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$

$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$

Vậy hệ vô nghiệm.

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases}$

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$. Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Quy tắc Cramer

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m+12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

Quy tắc Cramer

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 6;$$

- $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1})$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$
  - m=1, $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
  - $m = 3, \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$

    Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

Quy tắc Cramer

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+9 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+9 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+9 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận

- Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, -1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là
$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$
  - $m=-1$, $\Delta_1 = -36 \neq 0$, hệ vô nghiệm.
  - $m=1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ta có hệ
  $$\begin{cases} -6x + 12y - 6z = 1; \\ -10x + 20y - 10z = 2; \\ -12x + 24y - 12z = 0. \end{cases}$$
  Hệ vô nghiệm.

Định lý Kronecker-Capelli

Định lý (Kronecker-Capelli)

Nếu $\tilde{A} = (A|B)$ là ma trận mở rộng của hệ gồm n ẩn dạng $AX = B$ thì $r(\tilde{A}) = r(A)$ hoặc $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$. Hơn nữa,

- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là $n - r(A)$.*

Định lý Kronecker-Capelli

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

Định lý Kronecker-Capelli

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với $m = 2$, hệ tương đương với hệ sau :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 11x_4 & = & -2 \\ & & & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Định lý Kronecker-Capelli

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - t; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14t; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21t \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Định lý Kronecker-Capelli

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

Định lý Kronecker-Capelli

Dạng bậc thang của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $m-7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$, hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 = m; \\ x_3 = m+1-x_4 = 1; \\ x_2 = 1+2x_3-2x_4 = 3-2m; \\ x_1 = 1-x_2+x_3-2x_4 = -1. \end{cases}$$

Định lý Kronecker-Capelli

Vậy khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3 - 2m, 1, m)$.

- Với $m = 7$, hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.