Bài giảng môn học Toán cao cấp C2

Nguyễn Anh Thi

2015

Chương 4

TRỊ RIÊNG-VECTOR RIÊNG

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Ta nói hệ số* $\lambda \in \mathbb{R}$ *là một* ***trị riêng*** *của ma trận* A *nếu có một vector khác không* $x \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$Ax = \lambda x$$

hay nói cách khác

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

x *được gọi là một* ***vector riêng*** *của* A *tương ứng với* λ.

Ví dụ

$\lambda = 3$ *là một giá trị riêng của ma trận* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ *tương ứng với vector riêng* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Trị riêng λ của một ma trận A là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Khai triển của $\det(A - \lambda I)$ là một đa thức bậc n và được gọi là đa thức đặc trưng của A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Một ma trận vuông cấp n có nhiều nhất n trị riêng.

Ví dụ

Tìm các trị riêng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông cấp n, các vector riêng của A tương ứng với trị riêng λ là các vector khác không x trong không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Không gian nghiệm này được gọi là không gian riêng $E(\lambda)$ của A tương ứng với λ.

Ví dụ

Tìm cơ sở cho các không gian riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1)$$

Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5(\text{ bội } 2), \lambda_2 = 1(\text{ bội } 1)$$

Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập nghiệm

$$E(5) = \{(-t, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{(-t, t, 0) + (0, 0, s) | t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{t(-1, 1, 0) + s(0, 0, 1) | t, s \in \mathbb{R}\}$$

Suy ra $E(5)$ có số chiều là $\dim E(5) = 2$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = 0$$

Giải ra ta được tập nghiệm

$$E(1) = \{(t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1, 0) | t \in \mathbb{R}\}$$

Suy ra $E(1)$ có số chiều là $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)\}$

Định nghĩa

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *A được gọi là đồng dạng với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho* $A = P^{-1}BP$.

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Ma trận A được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với ma trận đường chéo.*

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1: Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

- Nếu $P_A(\lambda)$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\lambda)$ và các số bội $m_1, m_2, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm số chiều của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, A chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3: Với mỗi $i \in \overline{1,p}$ tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, gọi P là ma trận có được bằng cách dựng các vector trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

$$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_p)$$

trong đó λ_i xuất hiện m_i lần với mọi i.

Ví dụ

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tìm trị riêng và vector riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.*

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda^2+4)$$

Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$. Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ $(A - 4I_3)X = 0$.

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$E(4) = \{(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, -1, 1) | t \in \mathbb{R}\}$.

$E(4)$ có cơ sở là $\mathcal{B} = \{-1, -1, 1\}$.

Ví dụ

Chéo hóa ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Trị riêng $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1($ bội $1), \lambda_2 = -2($ bội $2)$

Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập hợp nghiệm

$E(1) = \{(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -1, 1) | t \in \mathbb{R}\}$.

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\}$.

- Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$.

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập hợp nghiệm là
$E(-2) = \{(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{(-t, t, 0) + (-s, 0, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 1, 0) + s(-1, 0, 1) | t, s \in \mathbb{R}\}$.
Suy ra $E(-2)$ có chiều $\dim E(-2) = 2$ với cơ sở
$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (-1, 0, 1)\}$.

Vì các không gian $E(\lambda_i)$ của A có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được. Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vector trong $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.