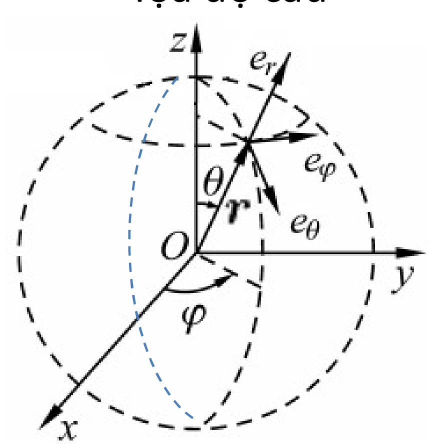
Mô-men động lượng
Angular momentum

Cơ cổ điển

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad [4.95]$$

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \qquad [4.96]$$

Tọa độ cầu



Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\boldsymbol{L}^2 \qquad [4.13a]$$

$$\boldsymbol{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]$$

Tọa độ cầu

- PT Schroedinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{2mr^2}\boldsymbol{L}^2 + V(r)\right]\psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right)\right] + V(r)\psi = E\psi$$

Cơ lượng tử

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$
$$L_y = zp_x - xp_z,$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, p_y \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, p_z \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$
$$L_y = zp_x - xp_z,$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \quad [4.97]$$

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \quad [4.98]$$

$$\boxed{[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y.} \quad [4.99]$$

$$\sigma_{L_x}^2\sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle i\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2$$

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}|\langle L_z\rangle| \quad [4.100]$$

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad [4.101]$$

$[L^2, L_x] =???$

$$
\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y \\
&\quad + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y \\
&\quad + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar \;_y)L_z \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \qquad [4.103]$$

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \qquad [4.103]$$

→ Mỗi thành phần của $\boldsymbol{L}$ có cùng hàm riêng với L^2

(Mỗi thành phần của $\boldsymbol{L}$ có thể được chéo hóa với L^2)

Những thành phần của $\boldsymbol{L}$ không giao hoán với nhau → có thể chọn CHỈ 1 thành phần để chéo hóa với L^2.

Người ta quy ước chọn thành phần L_z

Trị riêng của mô-men động lượng

Tìm hàm riêng chung của L^2 và L_z

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{và} \quad L_z f = \mu f \qquad [4.104]$$

Toán tử "bậc thang"

$$\boxed{L_\pm \equiv L_x \pm iL_y \qquad [4.105]}$$

$$
\begin{aligned}
[L_z, L_\pm] &= [L_z, L_x \pm iL_y] \\
&= [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] \\
&= i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) \\
&= \pm\hbar(L_x \pm iL_y)
\end{aligned}
$$

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \qquad [4.106]$$

$$[L^2, L_\pm] = ?$$

$$[L^2, L_\pm] = 0 \qquad [4.107]$$

$[L^2, L_\pm] = 0$ [4.107]

Xét f là hàm riêng của L^2: $L^2 f = \lambda f$

$$\Rightarrow L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f) \quad [4.108]$$

→ f và $L_\pm f$ đều là HR của L^2 với cùng TR λ

$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$ [4.106]

Xét f là hàm riêng của L_z: $L_z f = \mu f$

$$\begin{aligned} L_z(L_\pm f) &= (L_z L_\pm - L_\pm L_z) f + L_\pm L_z f \\ &= \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f) \\ &= (\mu \pm \hbar)(L_\pm f) \end{aligned} \quad [4.109]$$

$L_\pm f$ là HR của L_z với TR $(\mu \pm \hbar)$

$L_z(L_+ f) = (\mu + \hbar)(L_+ f)$

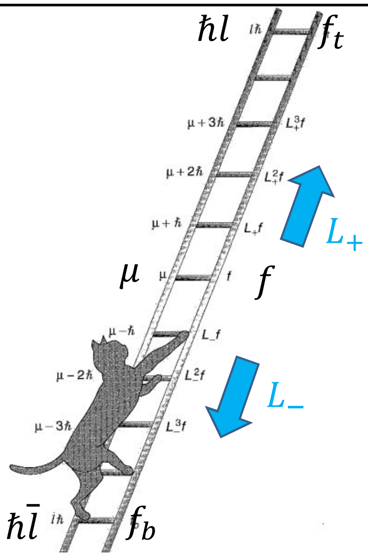
→ L_+ được gọi là toán tử "tăng" vì nó làm cho TR của L_z tăng thêm $\hbar$

$L_z(L_- f) = (\mu - \hbar)(L_- f)$

→ L_- được gọi là toán tử "giảm" vì nó làm cho TR của L_z giảm đi $\hbar$

Mỗi λ → "thang" các trạng thái. Mỗi nấc thang cách nhau $\hbar$.

Leo lên bằng toán tử tăng L_+. Leo xuống bằng toán tử giảm L_-.



Có thể leo lên/xuống đến khi nào? vô hạn?

$\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \quad \Leftrightarrow \lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2$

$\langle L_x^2 \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle = \langle L_x f | L_x f \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$

→ Trị riêng μ của L_z bị chặn.

→ Tồn tại bậc (trạng thái) cao nhất f_t

$L_+ f_t = 0$ [4.110]

Gọi $\hbar l$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_t:

$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t$ [4.111]

$$L_\pm L_\mp = (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y)$$
$$= L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_xL_y - L_yL_x)$$
$$= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar\ \ _z)$$

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z \qquad [4.112]$$

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t$$
$$= (\mathbf{0} + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t$$
$$= \hbar^2 l(l+1) f_t$$

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \qquad [4.113]$$

Tồn tại bậc (trạng thái) thấp nhất f_b

$$L_- f_b = 0 \qquad [4.114]$$

Gọi $\hbar\bar{l}$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_b:

$$L_z f_b = \hbar\bar{l} f_b \quad ; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \qquad [4.115]$$

$$L^2 f_b = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b$$
$$= (\mathbf{0} + \hbar^2\bar{l}^2 - \hbar^2\bar{l}) f_b = \hbar^2\bar{l}(\bar{l}-1) f_b$$

$$\lambda = \hbar^2\bar{l}(\bar{l}-1) \qquad [4.116]$$

$$\lambda = \hbar^2\bar{l}(\bar{l}-1) \qquad [4.116]$$
$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \qquad [4.113]$$

$\Rightarrow \bar{l} = -l$ hoặc $\bar{l} = l+1$

$\Rightarrow \bar{l} = -l \qquad [4.117]$

Loại $\bar{l} = l+1$

Vì $\bar{l} \le l$: bậc dưới không thể cao (lớn) hơn bậc trên

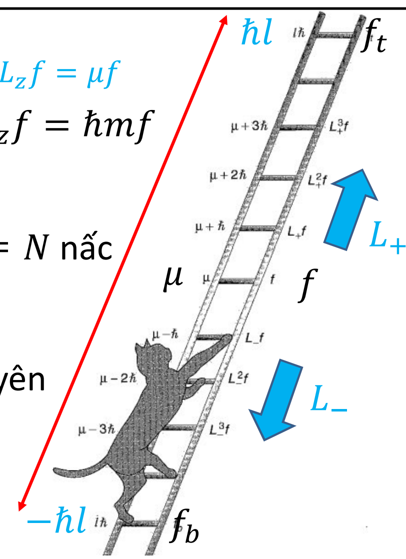
THANG λ

$L_z f = \mu f$

$L_z f = \hbar m f$

$l = \dfrac{N}{2} \Leftarrow N$ nấc

l là số nguyên hoặc bán nguyên



$$\boxed{L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m}$$

[4.118]

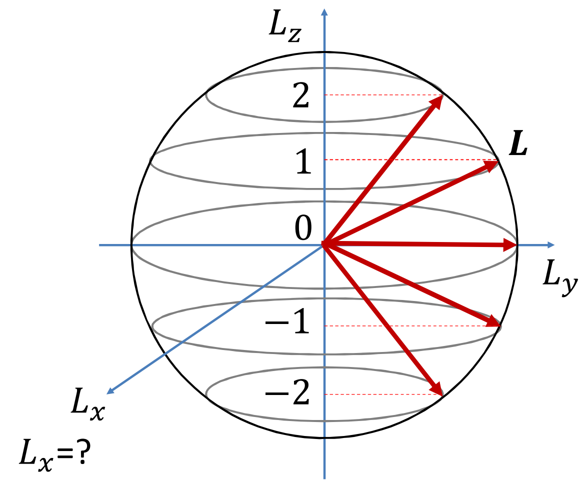
$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

[4.119]

l cho trước → $2l+1$ giá trị của m ($2l+1$ bậc thang)

Ví dụ: $l = 2 \quad \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$

$l = 2 \;\rightarrow\; m = -2, -1, 0, 1, 2$



L_x=?

L_y=?

Bài tập nhỏ

Chứng minh

a) L_x , L_y là các toán tử hermit

b) $L_{\mp}$ là toán tử liên hiệp hermit của $L_{\pm}$

$$\langle f | L_x g \rangle = \langle L_x f | g \rangle$$

$$\langle f | L_{\pm} g \rangle = \langle L_{\mp} f | g \rangle$$

Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\boldsymbol{L}^2 \qquad [4.13a]$$

$$\boldsymbol{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \right]$$

Hàm riêng

$$f_l^m = Y_l^m$$

Bài tập 4.18

$$L_\pm f_l^m = (A_l^m) f_l^{m\pm 1} \qquad [4.120]$$

Tìm A_l^m

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$$
$$= \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \qquad [4.121]$$

Dùng công thức [4.112]

Bài tập 4.19

$$[r_i, p_j] = -[p_j, r_i] = i\hbar\delta_{ij}, [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0$$
$$i, j = x, y, z.\ r_x = x, r_y = y, r_z = z \qquad [4.10]$$

CM:

$[L_z, x] = i\hbar y,$

$[L_z,] = -i\hbar x,$

$[L_z, z] = 0,$ [4.122

$[L_z, p_x] = i\hbar p_y,$

$[L_z, p_y] = -i\hbar p_x,$

$[L_z, p_z] = 0.]$

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\hbar}{i}\right)(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla}) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)(r\hat{r} \times \boldsymbol{\nabla})$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad [4.123]$$

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\left[r(\hat{r} \times \hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r} \times \hat{\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{r} \times \hat{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]$$

$$(\hat{r} \times \hat{r}) = 0, (\hat{r} \times \hat{\theta}) = \hat{\phi}, (\hat{r} \times \hat{\phi}) = -\hat{\theta}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}\left[\hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] \qquad [4.124]$$

$$\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi)\,\hat{\imath} + (\cos\theta\sin\phi)\hat{\jmath} - (\sin\theta)\hat{k} \quad [4.125]$$
$$\hat{\phi} = -(\sin\phi)\hat{\imath} + (\cos\phi)\hat{\jmath} \quad [4.126]$$

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i}[(-\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath})\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$-(\cos\theta\cos\phi\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \quad [4.127]$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\left(+\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \quad [4.128]$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad [4.129]$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left[(-\sin\phi \pm i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm i\sin\phi)\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad [4.130]$$

$$L_+L_- = \hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

[4.131]

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

[4.132]

$$L^2 f_l^m$$
$$= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]f_l^m$$
$$= \hbar^2 l(l+1)f_l^m$$

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}f_l^m = \hbar m f_l^m$$

$$H\psi = E\psi$$
$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi \qquad [4.133]$$
$$L_z\psi = \hbar m\psi$$

$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ [4.119]

PT Schroedinger (

$$\frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + L^2\right]\psi + V\psi = E\psi$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{2mr^2}\boldsymbol{L}^2 + V(r)\right]\psi = E\psi \quad [4.14a$$

$= 0,1,2\ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, l-1, l$

[4.29]

Tọa độ cầu + giải tích

$l = 0,1,2\ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$

Đại số (Tổng quát hơn)

$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$