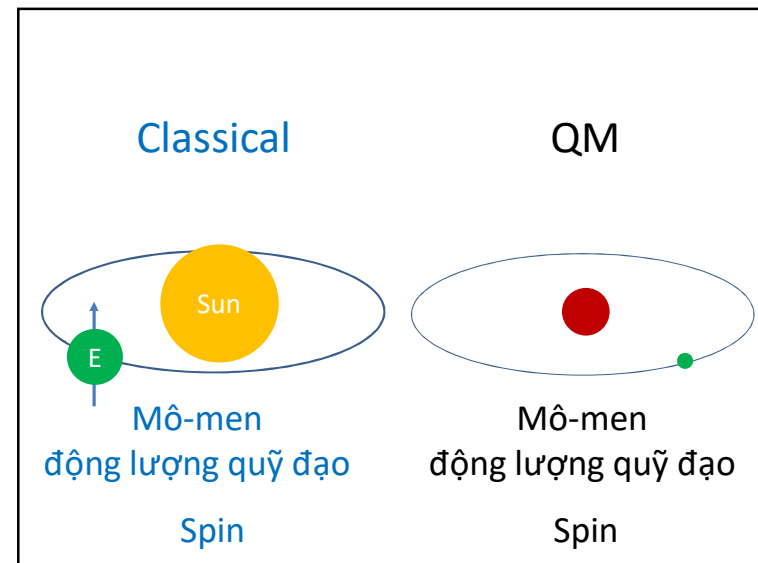


Spin



Spin

- Electron có spin ($\mathbf{S}$)
- Spin không liên quan đến không gian !
- Đặc trưng cho tính chất nội tại của hạt
- $\rightarrow$ mô-men động lượng bên trong ($\mathbf{S}$) và mô-men động lượng bên ngoài ($\mathbf{L}$)

Spin

Bài toán spin ($\mathbf{S}$) được xử lý tương tự như bài toán mô-men động lượng ($\mathbf{L}$)

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \end{aligned} \quad [4.134]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z; \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x; \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^2 |s m\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |s m\rangle \\ S_z |s m\rangle &= \hbar m |s m\rangle \end{aligned} \quad [4.135]$$

$$\begin{aligned} L^2 \psi &= \hbar^2 l(l+1) \psi \\ L_z \psi &= \hbar m \psi \\ l &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \\ m &= -l, \dots, l \end{aligned}$$

$$s = ?; m = ?$$

Spin

Không phụ thuộc vào không gian (góc quay)

→ Không loại trừ các giá trị bán nguyên của s

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad [4.137]$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, \dots, l$$

Hàm riêng

$$f_l^m = Y_l^m$$

Bài tập 4.18

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad [4.120]$$

Tìm A_l^m

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \\ &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \quad [4.121] \end{aligned}$$

Dùng công thức [4.112]

Spin

$$S_{\pm} |s m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s (m \pm 1)\rangle \quad [4.136]$$

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y.$$

Spin

- ✓ Mỗi hạt cơ bản có spin **riêng và không thể thay đổi !**
- ✓ Spin là một số lượng tử đặc trưng cho hạt
- ✓ Số lượng tử mô-men bên ngoài (l) có thể nhận giá trị (nguyên) nào đó và thay đổi khi hệ bị nhiễu loạn
- ✓ Số lượng tử mô-men bên trong (s) cố định đối với 1 hạt đã cho

Hạt với spin $s = 1/2$

- ✓ Protons, neutrons, electrons
- ✓ Quarks và leptons

Hạt với spin $s = 1/2$

$$|s\ m\rangle: s = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

→ Có hai trạng thái được gọi là spin up và down:

$$\text{Spin up } (\uparrow): \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Spin down } (\downarrow): \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Thay cho bra/ket $|s\ m\rangle$ có thể dùng spinor (ma trận cột) để mô tả trạng thái spin tổng quát:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139]$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [4.140] \quad \text{Spin up } (\uparrow)$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [4.141] \quad \text{Spin down } (\downarrow)$$

Cần xác định toán tử $\mathbf{S}^2$ và S_z

Sử dụng các tính chất của các toán tử sau đây

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z & S^2|s\ m\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s\ m\rangle \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x & S_z|s\ m\rangle &= \hbar m|s\ m\rangle \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y & & \end{aligned} \quad [4.134] \quad [4.135]$$

$$S_{\pm}|s\ m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s\ (m \pm 1)\rangle \quad [4.136]$$

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y.$$

$$S^2|s\ m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\ m\rangle$$

$$\text{Ta có: } \mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+ \quad \text{và} \quad \mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_- \quad [4.142]$$

Toán tử $\mathbf{S}^2$ là ma trận 2×2 .

$$\text{Gọi} \quad \mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [4.143]$$

$$S_z |s m\rangle = \hbar m |s m\rangle$$

$$S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_- \quad [1.144]$$

$$\Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.145]$$

$$S_{\pm} |s m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s (m \pm 1)\rangle \quad [4.136]$$

$$S_{\pm} \equiv S_x \pm i S_y.$$

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_-, S_- \chi_+ = \hbar \chi_-, S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0$$

$$\rightarrow S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [4.146]$$

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(S_+ + S_-)}{2} \text{ và } S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad [4.147]$$

$$\text{Có thể viết: } S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

σ là ma trận Pauli với các thành phần cho bởi:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.148]$$

Chú ý: S_x, S_y, S_z và S^2 là các toán tử hermit vì chúng biểu thị cho các đại lượng có thể khảo sát. $S_{\pm}$ không hermit.

$$S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_- \quad [1.144]$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [4.145]$$

Trạng thái riêng (hàm riêng/spinor riêng) của S_z là

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right); \quad [1.149]$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right) \\ \chi &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139] \end{aligned}$$

→ Nếu đo giá trị S_z trên hạt ở trạng thái tổng quát χ thì có thể thu được giá trị $+\frac{\hbar}{2}$ với xác suất $|a|^2$ hoặc $-\frac{\hbar}{2}$ với xác suất $|b|^2$.

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad [4.150]$$

Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_z

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_z thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Nếu đo giá trị S_x thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của S_x :

$$S_x f = \lambda f \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] f = 0$$

Để PT có nghiệm thì định thức của nó phải = 0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Hàm riêng (spinor riêng) được xác định qua

$$S_x f = \lambda f \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{\hbar}{2} \quad f = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \beta = \pm \alpha$$

→ Spinor riêng:

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2} \right)$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2} \right) \quad [1.451]$$

Spinor tổng quát χ cần được biểu diễn trong hệ cơ sở $\chi_+^{(x)}$ và $\chi_-^{(x)}$

$$[1.451] \text{ cho } \chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_-$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_-$$

$$\Rightarrow \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+^{(x)} + \chi_-^{(x)})$$

$$\text{và: } \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+^{(x)} - \chi_-^{(x)})$$

$$\text{Trạng thái tổng quát } \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139])$$

$$\Rightarrow \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right) \chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} \right) \chi_-^{(x)} \quad [1.452]$$

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \quad [1.452]$$

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } +\frac{\hbar}{2} \right)$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } -\frac{\hbar}{2} \right) \quad [1.451]$$

Nếu đo giá trị S_x thì xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ là $\frac{|a+b|^2}{2}$, và có được $-\frac{\hbar}{2}$ là $\frac{|a-b|^2}{2}$

Ví dụ 4.2. Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_x

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_x thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Nếu đo giá trị S_y thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của S_y :

$$S_y f = \lambda f \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] f = 0$$

Để PT có nghiệm thì định thức của nó phải = 0

$$\begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ???$$

Xin tính tiếp để tìm λ và f

BT: Hạt spin $\frac{1}{2}$ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

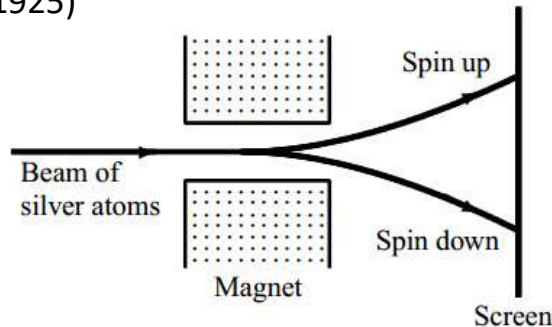
Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_y ?

(Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau:

a) Nếu đo S_y thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?)

Thí nghiệm Stern-Gerlach

- ✓ Stern-Gerlach: 1922, Ag
- ✓ Goudsmit & Uhlenbeck: giả thuyết spin (1925)



Thí nghiệm Stern – Gerlach (Hạt trong từ trường không đều)

Cổ điển: Dải liên tục (không tách vạch)!

Bạc có 1 electron (thứ 47) ngoài cùng ở lớp 5s

QM (Schroedinger): $2l + 1$ vạch. nếu như ở trạng thái s ($l = 0$) $\rightarrow$ 1 vạch; ở trạng thái p ($l = 1$) thì có 3 vạch!

1 electron ngoài cùng ở lớp 5s

$\rightarrow$ Spin $s = 1/2$

SPIN: Có 2 trạng thái (ứng với 2 vạch được quan sát trong thí nghiệm của Stern-Gerlach)

Thí nghiệm Stern-Gerlach

- ✓ Cổ điển: dải phổ liên tục
- ✓ QM với Schroedinger: 1 chấm
- ✓ Thực nghiệm: 2 vạch!
- ✓ Ag: 47 e. Electron thứ 47 ở 5s $\Rightarrow l = 0$
- ✓ Nếu ở 5p thì $l = 1 \rightarrow 3$ vạch
- ✓ Spin: e với spin $\frac{1}{2} \rightarrow 2$ vạch

