DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN

Vũ Đỗ Huy Cường

Mục lục

1 Nhập môn dao động **1**

1.1 Khái niệm Dao động 1

1.1.1 Định nghĩa dao động 1

1.1.2 Phân loại dao động 1

1.1.2.1 Dao động tuần hoàn – Dao động điều hòa 1

1.1.2.2 Dao động tự do – Dao động tắt dần - Dao động cưỡng bức 2

1.1.2.3 Dao động tuyến tính – dao động phi tuyến 2

1.1.3 Đặc trưng dao động 2

1.1.3.1 Biên độ - Vận tốc góc - Pha ban đầu 2

1.1.3.2 Chu kì - Tần số 3

1.2 Phương trình chuyển động của hệ dao động 3

1.2.1 Phương trình chuyển động 3

1.2.1.1 Quan hệ giữa tọa độ – vận tốc – gia tốc 3

1.2.1.2 Quan hệ giữa chuyển động dài và chuyển động quay 4

1.2.1.3 Quan hệ giữa lực và chuyển động 4

1.2.1.4 Quan hệ giữa Công và năng lượng 6

1.2.2 Thiết lập các phương trình chuyển động 6

1.2.2.1 Phương pháp phân tích lực 6

1.2.2.2 Phương pháp năng lượng 8

1.2.3 Phương pháp giải phương trình chuyển động 9

1.2.3.1 Phương pháp trực tiếp 9

1.2.3.2 Phương pháp gián tiếp 11

1.3 Bài tập 12

2 Dao động của hệ một bậc tự do **15**

2.1 Dao động tự do 15

2.2 Dao động tắt dần 18

2.2.1 Trường hợp lực cản nhỏ 19
2.2.2 Trường hợp lực cản lớn 21
2.3 Dao động cưỡng bức 21
2.3.1 Trường hợp không có lực cản 22
2.3.2 Trường hợp có lực cản 24
2.4 Bài tập 26

3 Dao động của hệ nhiều bậc tự do **29**
3.1 Dao động tự do 29
3.2 Dao động tắt dần 33
3.3 Dao động cưỡng bức 33
3.3.1 Dao động cưỡng bức không có lực cản 34
3.3.2 Dao động cưỡng bức có lực cản 36
3.4 Bài tập 36

Chương 1

Nhập môn dao động

1.1 Khái niệm Dao động

1.1.1 Định nghĩa dao động

Sự chuyển động của con lắc đồng hồ, cái đu đung đưa, tim đập, con chim bay làm rung động cành cây,... đều không ngừng chuyển động qua lại quanh một vị trí nào đó. Loại chuyển động này gọi là dao động.

Như vậy dao động được định nghĩa là sự lặp đi lặp lại nhiều lần một trạng thái của một vật nào đó quanh vị trí nào đó. Nếu có nhiều vật dao động (đồng thời tương tác với nhau) thì ta gọi đó là hệ dao động.

Quá trình dao động được đặc trưng bằng sự tăng hay giảm một cách luân phiên của các đại lượng tọa độ, vận tốc, gia tốc,... theo thời gian. Người ta sử dụng các phương trình toán học để mô tả các đại lượng này và gọi đó là các phương trình chuyển động.

1.1.2 Phân loại dao động

1.1.2.1 Dao động tuần hoàn – Dao động điều hòa

Dao động tuần hoàn là dao động mà trạng thái của vật được lặp lại như cũ, theo hướng cũ sau những khoảng thời gian bằng nhau xác định. Giả sử hàm $s(t)$ mô tả quá trình dao động. Nếu tồn tại giá trị $T > 0$ sao cho

$$s(t) = s(T + t) = s(2T + t) = ... = s(nT + t), \tag{1.1}$$

thì dao động đó được gọi là tuần hoàn và có chu kì T.

Người ta phân biệt thành các dao động có chu kì không đổi, dao động có chu kì biến đổi và dao động không có chu kì (dao động ngẫu nhiên).

Một dạng đặc biệt của dao động tuần hoàn chiếm vị trí quan trọng trong thực tế là dao động điều hòa, nghĩa là các đại lượng biến đổi tuân theo quy luật hình sin

$$s(t) \sim sin(t). \tag{1.2}$$

1.1.2.2 Dao động tự do – Dao động tắt dần - Dao động cưỡng bức

Dao động tự do là dao động mà chu kỳ dao động của vật chỉ phụ thuộc vào các đặc tính của hệ. Năng lượng của hệ được bảo toàn.

Dao động tắt dần là dao động có biên độ giảm dần theo thời gian. Dao động này xảy ra khi có ma sát hoặc lực cản của môi trường. Ma sát càng lớn thì dao động tắt dần càng nhanh. Năng lượng của vật giảm theo sự tắt dần.

Dao động cưỡng bức là dao động mà vật chịu tác dụng của một ngoại lực khiến nó dao động theo xu hướng của ngoại lực. Thông thường lực cưỡng bức khiến vật dao động có biên độ lớn hơn lúc không có lực tác động, nên năng lượng của hệ sẽ tăng lên.

1.1.2.3 Dao động tuyến tính – dao động phi tuyến

Dao động trong đó các phương trình mô tả chuyển động là phương trình vi phân tuyến tính thì được gọi là dao động tuyến tính. Nếu phương trình chuyển động là phương trình vi phân phi tuyến thì được gọi là dao động phi tuyến.

1.1.3 Đặc trưng dao động

Các đặc trưng sau đây được định nghĩa riêng cho dao động điều hòa, nhưng vẫn có thể sử dụng chúng với một ý nghĩa tương đối trong trường hợp dao động không phải điều hòa.

1.1.3.1 Biên độ - Vận tốc góc - Pha ban đầu

Phương trình chuyển động của một vật dao động điều hòa thường được viết dưới dạng

$$s(t) = A sin(\omega t + \varphi), \tag{1.3}$$

trong đó $s(t)$ là tọa độ dao động của vật tính từ vị trí cân bằng của nó (chọn làm gốc tọa độ), A là biên độ dao động, ứng với độ lệch lớn nhất của vật so với vị trí cân bằng,$(\omega t + \varphi)$ là pha dao động tại thời điểm t, ω là tần số góc, φ là pha ban đầu của dao động.

Thứ nguyên của s và A là [Chiều dài], đơn vị thường dùng là m; thứ nguyên của ω là $[\text{Thời gian}]^{-1}$, đơn vị thường dùng là rad/s; φ không có thứ nguyên, đơn vị thường dùng là rad.

Ví dụ 1.1. Một vật dao động điều hòa có tọa độ x được mô tả bởi phương trình

$$x(t) = 5sin(\pi t + \pi/2)\ cm. \tag{1.4}$$

Biên độ của dao động là $A = 5cm$ nghĩa là đoạn đường vật di chuyển xa trung tâm nhất là $5cm$.

Pha ban đầu là $\varphi = \pi/2$, nghĩa là ban đầu tọa độ của vật là $x(0) = 5sin(\pi/2) = 5cm$, vật xa trung tâm nhất về phía dương của quỹ đạo.

Vận tốc góc là $\omega = \pi$, nghĩa là sau $1s$, vật đã di chuyển được một nửa chu trình dao động (một chu trình tương ứng với 2π).

1.1.3.2 Chu kì - Tần số

Chu kì T là thời gian vật thực hiện 1 vòng dao động. Tần số f là số lần dao động thực hiện được trong một đơn vị thời gian. Quan hệ giữa Chu kì và tần số được biểu diễn bởi

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1.5}$$

Thứ nguyên của T là [Thời gian], đơn vị thường dùng là s; thứ nguyên của f là $[\text{Thời gian}]^{-1}$, đơn vị thường dùng là Hz.

Ví dụ 1.2. Cho một vật dao động điều hòa có chu kì T và tần số f.

Nếu vật dao động điều hòa có chu kì $T = 2s$, nghĩa là nó thực hiện 1 vòng dao động hết $2s$, vậy trong $1s$ nó thực hiện được nửa vòng dao động $f = 0.5$.

Nếu vật dao động điều hòa có chu kì $T = 0.2s$, nghĩa là nó thực hiện 1 vòng dao động hết $0.2s$, vậy trong $1s$ nó thực hiện được 5 vòng dao động $f = 5$.

1.2 Phương trình chuyển động của hệ dao động

1.2.1 Phương trình chuyển động

Phương trình chuyển động là các phương trình mô tả chuyển động của cơ hệ như một hàm số theo thời gian.

1.2.1.1 Quan hệ giữa tọa độ – vận tốc – gia tốc

Về mặt vật lý, tọa độ, vận tốc, gia tốc là những đại lượng đặc trưng cho chuyển động của vật thể. Tọa độ cho biết vị trí trong không gian của vật. Vận tốc cho biết sự thay đổi tọa độ sẽ diễn ra nhanh hay chậm. Gia tốc cho biết sự thay đổi của vận tốc sẽ thay đổi như thế nào. Các đại lượng này được kí hiệu như sau

$$\text{Tọa độ } \vec{x}(x, y), \qquad \text{Vận tốc } \vec{v}(v_x, v_y), \qquad \text{Gia tốc } \vec{a}(a_x, a_y). \tag{1.6}$$

Thứ nguyên của tọa độ là [Chiều dài]; thứ nguyên của vận tốc là $[\text{Chiều dài}][\text{Thời gian}]^{-1}$; thứ nguyên của vận tốc là $[\text{Chiều dài}][\text{Thời gian}]^{-2}$.

Về mặt toán học, tọa độ, vận tốc, gia tốc là những hàm số phụ thuộc biến thời gian. Trong đó vận tốc là đạo hàm cấp một của tọa độ và gia tốc là đạo hàm cấp hai của tọa độ. Từ đó ta có các phương trình quan hệ giữa các đặc trưng của chuyển động:

Quan hệ thể hiện bằng phương trình vi phân

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}_x, \\ a_y(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \dot{v}_y. \end{cases} \tag{1.7}$$

Quan hệ thể hiện bằng phương trình tích phân

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)d\tau, \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)d\tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a_x(\tau)d\tau d\tau, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a_y(\tau)d\tau d\tau, \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó (v_{0x}, v_{0y}) và (x_0, y_0) là vận tốc và tọa độ tại thời điểm bắt đầu chuyển động, t_0 và t là thời điểm bắt đầu và thời điểm đang khảo sát. Chúng ta thường chọn thời điểm bắt đầu chuyển động là $t_0 = 0$.

Ví dụ 1.3.

a) Cho gia tốc của một vật đang chuyển động thẳng là $a = 2t\ m/s^{-2}$. Tìm công thức tọa độ và vận tốc của nó theo thời gian t biết vận tốc ban đầu là $v_0 = 2\ m/s$ và tọa độ ban đầu là $s_0 = 0\ m$. Tính vận tốc và tọa độ tại $t = 5\ s$.

b) Một vật đang chuyển động với tọa độ được biểu diễn bởi $s = 2t^2 + e^t\ m$. Tìm công thức vận tốc và gia tốc. Tính vận tốc và gia tốc tại $t = 3\ s$.

1.2.1.2 Quan hệ giữa chuyển động dài và chuyển động quay

Nếu một điểm chuyển động tròn quay quanh tâm O với bán kính r thì chúng ta có thể sử dụng góc quay φ, vận tốc góc ω và gia tốc góc ϵ như là những đặc trưng của chuyển động. Khi đó quan hệ giữa chuyển động dài và chuyển động quay được thể hiện như sau

$$s(t) = r\varphi(t), \qquad v(t) = r\omega(t), \qquad a(t) = r\epsilon(t). \tag{1.9}$$

Tọa độ dài s và tọa độ góc φ được gọi chung là tọa độ suy rộng thường được kí hiệu bởi q. Các tọa độ được sử dụng trong phương pháp năng lượng để tìm phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ gồm nhiều bậc tự do.

Tọa độ góc không có thứ nguyên, đơn vị thường dùng là là rad. Thứ nguyên của vận tốc góc là $[\text{Thời gian}]^{-2}$, đơn vị thường dùng là là rad/s. Thứ nguyên của gia tốc góc là $[\text{Thời gian}]^{-2}$, đơn vị thường dùng là là rad/s^2.

1.2.1.3 Quan hệ giữa lực và chuyển động

Theo định luật II Newton, gia tốc của một vật cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật.

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}, \tag{1.10}$$

trong đó $\overrightarrow{F}$ là hợp lực tác dụng lên vật. Phương trình trên còn được gọi là phương trình cân bằng lực của cơ hệ.

Thứ nguyên của lực là $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}][\text{Thời gian}]^{-2}$, đơn vị thường dùng là là N.

Trong chuyển động quay, phương trình (1.11) được viết lại như sau

$$M(\overrightarrow{F}) = I\overrightarrow{\epsilon} \tag{1.11}$$

trong đó $M(\overrightarrow{F})$ là moment của lực $\overrightarrow{F}$, I là moment quán tính (đại lượng đặc trưng cho quán tính trong chuyển động quay) và $\overrightarrow{\epsilon}$ là gia tốc góc của vật.

Thứ nguyên của moment lực là [Khối lượng][Chiều dài]^2[Thời gian]$^{-2}$, đơn vị thường dùng là Nm. Thứ nguyên của moment quán tính là [Khối lượng][Chiều dài]^2, đơn vị chuẩn dùng là kgm^2.

Một số lực phổ biến trong đời sống cũng như khoa học kĩ thuật:

Trọng lực $\overrightarrow{P}$: xuất hiện khi vật thể được đặt trong trường trọng lực.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} \tag{1.12}$$

với g là gia tốc trọng trường. Trọng lực $\overrightarrow{P}$ và gia tốc trọng trường $\overrightarrow{g}$ luôn hướng về tâm trái đất.

Lực đàn hồi lò xo $\overrightarrow{F}_{dh}$: xuất hiện khi lò xo bị làm biến dạng (kéo giãn hoặc nén nhỏ)

$$\overrightarrow{F}_{dh} = -k\overrightarrow{x} \tag{1.13}$$

với k là độ cứng lò xo và $\overrightarrow{x}$ là độ dài biến dạng của lò xo. Hướng của lực đàn hồi $\overrightarrow{F}_{dh}$ và hướng của $\overrightarrow{x}$ ngược chiều nhau.

Lực cản của môi trường $\overrightarrow{F}_c$: xuất hiện khi vật chuyển động trong môi trường

$$\overrightarrow{F}_c = -\frac{\overrightarrow{v}}{|v|}\gamma|v|^{\lambda} \tag{1.14}$$

với α, β là các hệ số cản và $\overrightarrow{v}$ là vận tốc của vật. Hướng của lực cản $\overrightarrow{F}_c$ và hướng của vận tốc $\overrightarrow{v}$ ngược chiều nhau.

Phản lực của mặt tiếp xúc $\overrightarrow{N}$: xuất hiện khi có sự tiếp xúc giữa vật và bề mặt vật chất. Phản lực được tính dựa vào sơ đồ phân tích lực. Hướng của phản lực $\overrightarrow{N}$ thường vuông góc với bề mặt tiếp xúc.

Lực ma sát trượt của mặt tiếp xúc $\overrightarrow{F}_{ms}$: xuất hiện khi có sự trượt giữa vật đối với bề mặt vật chất. Lực ma sát được tính bởi

$$\overrightarrow{F}_{ms} = -\frac{\overrightarrow{v}}{|v|}\mu|N| \tag{1.15}$$

với μ là hệ số ma sát trượt và $\overrightarrow{N}$ là phản lực của mặt tiếp xúc tác động lên vật. Hướng của lực ma sát $\overrightarrow{F}_{ms}$ và hướng của vận tốc $\overrightarrow{v}$ ngược chiều nhau.

Ví dụ 1.4. Vật A có khối lượng m đang trượt trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt đất. Vật được gắn vào tường C bằng lò xo có độ cứng là k. Biết hệ số ma sát của mặt phẳng nghiêng là μ và lực cản tỉ lệ với γ lần vận tốc của vật

. Hãy xác định các lực tác dụng lên vật và phương hướng của chúng.

Ví dụ 1.5. Con lắc elip gồm con chạy khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh $AB = l$. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Hãy xác định các lực tác dụng lên vật và phương hướng của chúng.

1.2.1.4 Quan hệ giữa Công và năng lượng

Công cơ học là một đại lượng vô hướng có thể mô tả như là tích của lực nhân với quãng đường dịch chuyển mà nó gây ra, và nó được gọi là công của lực. Chỉ có thành phần của lực theo phương của chuyển động ở điểm đó thì mới gây ra công.

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}, \tag{1.16}$$

trong đó A là công, F là lực tác dụng và s là quãng đường đi được.

Năng lượng là một đại lượng vô hướng thể hiện khả năng sinh công của hệ vật. Các loại hình năng lượng thường gặp trong môn học này là:

Động năng $T = \dfrac{1}{2}mv^2$ với m là khối lượng của vật và v là vận tốc của nó.

Thế năng trọng trường $V_g = mgh$ với m là khối lượng của vật, g là gia tốc trọng trường và h là độ cao của vật.

Thế năng đàn hồi $V_{dh} = \dfrac{1}{2}kx^2$ với k là độ cứng lò xo và x là độ dài biến dạng của lò xo.

Thứ nguyên của công và năng lượng đều là $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}]^2[\text{Thời gian}]^{-2}$. Đơn vị thường dùng là J.

Ví dụ 1.6. Vật A có khối lượng m đang trượt trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt đất. Vật được gắn vào tường C bằng lò xo có độ cứng là k. Biết hệ số ma sát của mặt phẳng nghiêng là μ và lực cản có các hệ số tỉ lệ γ, λ.

Hãy xác định động năng, thế năng của vật.

Ví dụ 1.7. Con lắc elip gồm con chạy khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh $AB = l$. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Hãy xác định động năng, thế năng của hệ.

1.2.2 Thiết lập các phương trình chuyển động

Chúng ta có thể sử dụng một trong hai phương pháp sau thiết lập các phương trình chuyển động cho hệ dao động,

1.2.2.1 Phương pháp phân tích lực

Để tìm các phương trình chuyển động của cơ hệ, chúng ta sử dụng phương trình cân bằng lực. Trước hết chúng ta viết phương trình cân bằng lực cho từng vật hoặc cho cả cơ hệ. Đây là một phương trình mà các thành phần đều có dạng vector nên chúng ta sẽ dùng các hình chiếu của chúng trên các phương chuyển động của cơ hệ.

Phương pháp phân tích lực có hiểu quả tốt trong trường hợp cơ hệ có ít vật thể (một hoặc hai). Trường hợp hệ có nhiều vật thể hơn, phương pháp này sẽ trở nên dài dòng và phức tạp vì phải xét đến nội lực giữa các vật trong cơ hệ.

Ví dụ 1.8. Vật A có khối lượng m đang trượt trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt đất. Vật được gắn vào tường C bằng lò xo có độ cứng là k. Biết hệ số ma sát của mặt phẳng nghiêng là μ và lực cản có các hệ số tỉ lệ γ, λ.

Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của vật bằng phương pháp phân tích lực.

Giải

Hệ lực tác động lên vật là

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_{ms} + \overrightarrow{F}_{dh} + \overrightarrow{F}_{c} = m\overrightarrow{a} \tag{1.17}$$

Chiếu phương trình trên lên hai trục tọa độ ta thu được hệ

$$\begin{cases} Pcos\alpha = N, \\ Psin\alpha - F_{dh} - F_c - F_{ms} = ma. \end{cases} \tag{1.18}$$

Từ phương trình trên, ta thu được

$$mgsin\alpha - kx - \gamma v - \mu mgcos\alpha = ma. \tag{1.19}$$

Chú ý rằng $v = \dot{x}$ và $a = \ddot{x}$, ta tìm được phương trình vi phân chuyển động:

$$-kx - \gamma\dot{x} - m\ddot{x} = \mu mgcos\alpha - mgsin\alpha. \tag{1.20}$$

Ví dụ 1.9. Con lắc elip gồm con chạy khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh $AB = l$. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của hệ bằng phương pháp phân tích lực.

Giải:

Phương trình cân bằng lực của con chạy

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T_1} = m_1\overrightarrow{a_1} \tag{1.21}$$

Chiếu lên phương chuyển động của con chạy, ta thu được

$$T_1 sin\theta = m_1\ddot{x} \tag{1.22}$$

Phương trình cân bằng lực của con chạy

$$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{F}_{qt} + \overrightarrow{T_2} = m_2\overrightarrow{a_2} \tag{1.23}$$

Chiếu lên phương pháp tuyến và tiếp tuyến chuyển động của con lắc, ta thu được

$$\begin{cases} -m_2gcos\theta + F_{qt}sin\theta + T_2 = m_2l\dot{\theta}^2 \\ Psin\theta + F_{qt}cos\theta = m_2l\ddot{\theta}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_2 = m_2gcos\theta - m_2\ddot{x}sin\theta + m_2l\dot{\theta}^2 \\ mgsin\theta + m_2\ddot{x}cos\theta = m_2l\ddot{\theta}. \end{cases} \tag{1.24}$$

Do thanh không giãn nên $T_1 = T_2$, ta thu được

$$m_2\ddot{x}sin^2\theta - m_2gcos\theta sin\theta + m_2l\dot{\theta}^2sin\theta = m_1\ddot{x}. \tag{1.25}$$

Kết quả là ta có hai phương trình vi phân chuyển động

$$\begin{cases} m_2\ddot{x}sin^2\theta - m_1\ddot{x} - m_2gcos\theta sin\theta + m_2l\dot{\theta}^2sin\theta = 0, \\ m_2gsin\theta + m_2\ddot{x}cos\theta - m_2l\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

1.2.2.2 Phương pháp năng lượng

Để tìm các phương trình chuyển động của cơ hệ, chúng ta sử dụng phương trình Larange loại II được phát biểu như sau.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F^*. \tag{1.27}$$

trong đó $L = T - V$ là hàm Lagrange, q là tọa độ suy rộng (tọa độ, góc) và $\dot{q}$ là đạo hàm theo thời gian của tọa độ suy rộng (vận tốc, vận tốc góc). F^* là cái ngoại lực suy rộng (lực, moment lực) không bảo toàn (không phải trọng lực, lực đàn hồi).

Nếu hệ chỉ có trọng lực và lực đàn hồi là lực thế thì phương trình Larange loại II được viết lại như sau

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial (V_g + V_{dh})}{\partial q_i} = F^*. \tag{1.28}$$

Phương pháp năng lượng có hiệu quả tốt trong trường hợp cơ hệ có nhiều vật thể. Vì chúng ta không cần quan tâm đến nội lực giữa các vật trong cơ hệ.

Ví dụ 1.10. Vật A có khối lượng m đang trượt trên mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt đất. Vật được gắn vào tường C bằng lò xo có độ cứng là k. Biết hệ số ma sát của mặt phẳng nghiêng là μ và lực cản của không khí tỉ lệ với hai lần vận tốc của vật.

Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của vật bằng phương pháp năng lượng.

Giải

Ta chọn tọa độ suy rộng là vị trí x của vật trên mặt phẳng nghiêng.

Động năng của vật: $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Thế năng của vật và của lò xo: $V_g = -mgxsin\alpha$, $V_{dh} = \frac{1}{2}kx^2$.

Các ngoại lực không bảo toàn tác động lên vật: $F_c = -\gamma v, F_{ms} = -\mu mgcos\alpha$.

Phương trình Lagrange được viết cho chuyển động của vật là

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}kx^2 - mgxsin\alpha) &= -\gamma v - \mu mgcos\alpha \\ \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx - mgsin\alpha &= -\gamma\dot{x} - \mu mgcos\alpha \\ \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx &= mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ví dụ 1.11. Con lắc elip gồm con chạy khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh $AB = l$. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của hệ bằng phương pháp năng lượng.

Giải

Tọa độ của hệ là

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), \\ y_1(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = x(t) + lsin(\theta), \\ y_2(t) = lcos(\theta). \end{cases} \tag{1.30}$$

Ta chọn hai tọa độ suy rộng là tọa độ x của con chạy và óc quay θ của con lắc.

Động năng của vật: $T_1 = \dfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2$, $T_2 = \dfrac{1}{2}m_2((\dot{x} + l\dot{\theta}cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}sin\theta)^2$.

Thế năng của vật: $V_1 = 0$, $V_2 = -m_2glcos\theta$.

Không có ngoại lực không bảo toàn tác động lên vật.

Phương trình Lagrange được viết cho chuyển động của tọa độ suy rộng thứ nhất là

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\Big(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2((\dot{x} + l\dot{\theta}cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}sin\theta)^2\Big) + \frac{\partial}{\partial x}(-m_2glcos\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\theta}cos\theta] &= 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Phương trình Lagrange được viết cho chuyển động của tọa độ suy rộng thứ hai là

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\Big(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2((\dot{x} + l\dot{\theta}cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}sin\theta)^2\Big) + \frac{\partial}{\partial\theta}(-m_2glcos\theta) &= 0. \\ \Leftrightarrow\ &l\ddot{\theta} + \ddot{x}cos\theta - \dot{x}l\dot{\theta}sin\theta + gsin\theta - \dot{x}l\dot{\theta}sin\theta &= 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.2.3 Phương pháp giải phương trình chuyển động

Các phương trình chuyển động trong môn học này thường là các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất cùng với các điều kiện đầu. Nghĩa là các phương trình chuyển động có dạng như sau

$$\begin{cases} a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t), \\ x(0) = x_0; \qquad \dot{x}(0) = v_0, \end{cases} \tag{1.33}$$

trong đó a, b, c là các hệ số có thể là hằng, có thể là hàm theo thời gian t.

Để giải phương trình (1.33) chúng ta sử dụng các phương pháp sau

1.2.3.1 Phương pháp trực tiếp

Giả sử (1.33) có các hệ số a, b, c là hằng và $a \neq 0$. Khi đó nghiệm của phương trình này là tổng của hai hàm số sau

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{1.34}$$

trong đó $x_1(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (vế phải bằng zero) và $x_2(t)$ là một nghiệm riêng của chính phương trình (1.33).

Phương trình đặc trưng tương ứng của phương trình (1.33) là phương trình bậc hai có dạng

$$ak^2 + bk + c = 0. \tag{1.35}$$

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta > 0$, nghiệm của phương trình thuần nhất là

$$x_1(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \tag{1.36}$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số và k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình (1.35).
Nếu $\Delta = 0$, nghiệm của phương trình thuần nhất là

$$x_1(t) = C_1e^{kt} + C_2te^{kt}, \tag{1.37}$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số và k là nghiệm kép của phương trình (1.35).
Nếu $\Delta < 0$, nghiệm của phương trình thuần nhất là

$$x_1(t) = C_1e^{\alpha t}sin(\beta t) + C_2e^{\alpha t}cos(\beta t), \tag{1.38}$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số và $\alpha = -\dfrac{b}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Để tìm nghiệm riêng của phương trình (1.33), chúng ta nhẩm nghiệm có dạng tương tự với hàm $f(t)$ bên vế trái. Dưới đây là một số gợi ý cho việc nhẩm nghiệm. Chúng ta cần xác định các hằng số $A, B, S, ...$ của nghiệm gợi ý.

Hàm $f(t)$	Nghiệm gợi ý $x_2(t)$
t	$At + B$
t^2	$At^2 + Bt + C$
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$
$te^{\alpha t}$	$Ate^{\alpha t} + Be^{\alpha t}$
$sin(\beta t)$	$Asin(\beta t) + Bcos(\beta t)$
$cos(\beta t)$	$Asin(\beta t) + Bcos(\beta t)$

Trường hợp sử dụng nghiệm gợi ý nhưng vẫn chưa tìm được nghiệm chính xác (không thỏa (1.33)), chúng ta sẽ tìm lại nghiệm bằng cách cộng thêm đơn thức có số mũ của t tăng một với nghiệm gợi ý.

Sau khi tìm được nghiệm tổng quát $x_1(t)$ của phương trình không thuần nhất và nghiệm riêng $x_2(t)$ của phương trình thuần nhất. Nghiệm tổng quát $x(t)$ của phương trình không thuần nhất sẽ được tính bởi công thức (1.34). Lưu ý rằng nghiệm $x_1(t)$ có hai hằng số chưa xác định còn nghiệm $x_2(t)$ không có hằng số chưa xác định. Như vậy nghiệm $x(t)$ cũng có hai hằng số chưa xác định. Chúng ta sẽ dựa vào các điều kiện đầu để xác định các hằng số này.

Ví dụ 1.12. Vật A có khối lượng m đang trượt trên mặt phẳng ngang so với mặt đất. Vật được gắn vào tường C bằng lò xo có độ cứng là k. Biết hệ số ma sát của mặt phẳng nghiêng là μ và không có lực cản của không khí. Khi bắt đầu khảo sát, vật ở vị trí cân bằng của lò xo và không có vận tốc.

Hãy tìm phương trình chuyển động của vật.

Giải

Sử dụng các kết quả của ví dụ 1.8

$$x + \frac{m}{k}\ddot{x} = \mu\frac{m}{k}g. \tag{1.39}$$

Phương trình đặc trưng của phương trình trên có $\Delta = -4\frac{m}{k} < 0$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$x_1(t) = C_1 sin(\sqrt{\frac{m}{k}}t) + C_2 cos(\sqrt{\frac{m}{k}}t). \tag{1.40}$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là

$$x_2(t) = \mu\frac{m}{k}g. \tag{1.41}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$x(t) = C_1 sin(\sqrt{\frac{m}{k}}t) + C_2 cos(\sqrt{\frac{m}{k}}t) + \mu\frac{m}{k}g \tag{1.42}$$

Thay các điều kiện biên vào nghiệm tổng quát, ta thu được

$$\begin{cases} x(0) = C_1 sin(0) + C_2 cos(0) + \mu\frac{m}{k}g = 0, \\ \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{m}{k}}C_1 cos(0) + \sqrt{\frac{m}{k}}C_2 sin(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -\mu\frac{m}{k}g, \\ C_1 = 0. \end{cases} \tag{1.43}$$

Vậy phương trình chuyển động của vật là

$$x(t) = \mu\frac{m}{k}g\Big(1 - cos(\sqrt{\frac{m}{k}}t)\Big). \tag{1.44}$$

1.2.3.2 Phương pháp gián tiếp

Để giải bài toán (1.34), chúng ta có thể sử dụng phép biến đổi laplace và phép biển đổi Fourier để biến các phương trình vi phân thành các phương trình đại số bình thường.

Ví dụ 1.13.

1.3 Bài tập

Bài tập 1.1. Cho biết thứ nguyên của các đại lượng sau:

a) Gia tốc trọng trường g.
b) Độ cứng k của lò xo.
c) Hệ số ma sát trượt μ của lực ma sát.
d) Hệ số γ, λ của lực cản.

Đáp án: a) g : $[\text{Chiều dài}][\text{Thời gian}]^{-2}$. b) k : $[\text{Khối lượng}][\text{Thời gian}]^{-2}$.
c) μ : không có thứ nguyên. d) λ : không có thứ nguyên,
γ : $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}]^{1-\lambda}[\text{Thời gian}]^{\lambda-2}$.

Bài tập 1.2. Cho biết thứ nguyên của các đại lượng sau:

a) Công suất $P = dA/dt$ (công thực hiện trong một đơn vị thời gian).
b) Động lượng $L = mv$ (đại lượng đặc trưng cho chuyển động tức thời của vật).
c) Áp suất $p = F/S$ (áp lực trên một đơn vị diện tích).
d) Hiệu suất $H = A_1/A$ (tỉ số công có ích và công thực hiện).

Đáp án: a) P : $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}]^{2}[\text{Thời gian}]^{-3}$.
b) L : $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}][\text{Thời gian}]^{-1}$.
c) p : $[\text{Khối lượng}][\text{Chiều dài}]^{-1}[\text{Thời gian}]^{-2}$.
d) H : không có thứ nguyên,

Bài tập 1.3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

a) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$.
b) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t^2$.
d) $\ddot{x} + \dot{x} = sint$.
c) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = e^t + 2t$.

Đáp án: a) $x(t) = C_1e^t sin2t + C_2e^t cos2t$.
b) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$
c) $x(t) = C_1 + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}sint - \frac{1}{2}cost$
d) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t} + \frac{1}{4}te^t - \frac{2}{3}t - \frac{4}{9}$

Bài tập 1.4. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} = sint$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$.
b) $\ddot{x} + \dot{x} = e^{2t} + 5t$, $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 2$.
c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^t + e^{-t}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.
d) $\ddot{x} + x = t + cost$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$.

Đáp án: a) $x(t) = -\frac{9}{34}e^{-4t} + \frac{3}{2} - \frac{1}{17}sint - \frac{4}{17}cost$.
b) $x(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{20}{3}e^{-t} + \frac{5}{2}t^2 - 5t + \frac{13}{2}$
c) $x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}$
d) $x(t) = -2sint + cost + \frac{1}{2}tsint + t$

Bài tập 1.5. Tìm phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ sau

a) Con lắc đơn gồm chiều dài dây l một đầu treo vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định trên trần nhà.

b) Con lắc đơn gồm chiều dài dây l một đầu treo vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định trên trần nhà, lực cản không khí tỉ lệ với vận tốc theo hệ số γ.

Đáp án: a) $l\ddot{\varphi} + gsin\varphi = 0$. b) $l\ddot{\varphi} + \gamma l\dot{\varphi} + gsin\varphi = 0$

Bài tập 1.6. Tìm phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ sau

a) Con lắc lò xo gồm một lò xo độ cứng k một đầu gắn vào vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định vào tường. Biết rằng con lắc chuyển động nằm ngang.

b) Con lắc lò xo gồm một lò xo độ cứng k một đầu gắn vào vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định vào tường. Biết rằng con lắc chuyển động thẳng đứng.

Đáp án: a) $m\ddot{x} + kx = 0$. b) $m\ddot{x} + kx + mg = 0$

Bài tập 1.7. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ sau biết rằng với góc nhỏ thì $sin\varphi = \varphi$, $cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

a) Con lắc đơn khối lượng $m = 0.5kg$, chiều dài dây $l = 1m$. Ban đầu con lắc được kéo một góc $\alpha = 10^o$ và được thả không vận tốc đầu.

b) Con lắc đơn khối lượng $m = 0.5kg$, chiều dài dây $l = 1m$, lực cản không khí tỉ lệ với vận tốc theo hệ số $\gamma = 2$. Ban đầu con lắc đứng ở vị trí cân bằng $\alpha = 0^o$ và cung cấp một vận tốc đầu $v(0) = 0.5m/s$.

$$\text{Đáp án: a) } \varphi = 10^o cos\sqrt{10}t. \text{ b) } \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-t}sin\frac{\sqrt{6}}{2}t$$

Bài tập 1.8. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ sau

c) Con lắc lò xo độ cứng $k = 20$, khối lượng vật nặng $m = 0.5kg$, chuyển động nằm ngang. Ban đầu con lắc được kéo giãn đoạn $x = 2cm$ và buông không vận tốc đầu.

d) Con lắc lò xo độ cứng $k = 20$, khối lượng vật nặng $m = 0.5$, chuyển động thẳng đứng. Ban đầu con lắc bị ép nén $x = -2cm$ và buông không vận tốc đầu.

Đáp án: a) $x = 2cos20t$. b) $x = 2.5 - 2cos20t$

Bài tập 1.9. Con lắc đôi khối lượng m_1, m_2 và chiều dài dây l_1, l_2 được mắc nối tiếp vào nhau. Nghĩa là dây l_1 nối vật m_1 và trần nhà, dây l_2 nối vật m_1 và m_2. Ban đầu hai con lắc được kéo lệch so với phương thẳng đứng góc φ_1 và φ_2.

Tìm phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

$$\text{Đáp án: } (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$+ m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1sin\varphi_1 = 0$$
$$m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$+ m_2gl_2\dot{\varphi}_2sin\varphi_2 = 0$$

Chương 2

Dao động của hệ một bậc tự do

Bậc tự do (DOF - Degree Of Freedom) là các thông số độc lập dùng để xác định trạng thái (vị trí, khuynh hướng chuyển động) của một hệ. Chúng phản ánh mức độ tự do của hệ, hệ càng nhiều bậc tự do có nghĩa hệ càng linh động, dễ biến đổi.

Mỗi vật các các bậc tự do riêng của nó. Hệ gồm nhiều vật thì số bậc tự do của hệ bằng tổng các bật tự do của các vật trong hệ.

Ví dụ 2.1.

Hệ gồm một chất điểm trong không gian có 3 bậc tự do là vị trí x, y, z.

Hệ gồm một vật rắn tuyệt đối có 6 bậc tự do gồm vị trí x, y, z và góc quay θ_x, θ_y, θ_z.

Hệ gồm một vật rắn biến dạng có vô số bậc tự do bởi vì nó gồm vô số chất điểm

Nếu khối lượng (hoặc nhiệt độ, điện tích,...) của chất điểm là biến đổi theo thời gian thì nó có thêm một bậc tự do nữa.

Thông thường bậc tự do được biểu diễn bởi tọa độ suy rộng là đại lượng dùng để xác định vị trí của cơ hệ. Đối với dao động tuyến tính tổng quát của hệ một bậc tự do, phương trình chuyển động là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$a\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + cq(t) = f(t), \tag{2.1}$$

Trong nội dung giáo trình này, ta chỉ khảo sát trường hợp các hệ số a, b và c là hằng số. Trường hợp vật dao động không chịu lực cưỡng bức thì $f \equiv 0$. Trường hợp vật dao động tự do không có lực cản thì $b = 0$.

2.1 Dao động tự do

Xét hệ một bậc tự do có tọa độ suy rộng là q, lực tác dụng lên hệ là lực có thế. Khi đó động năng và thế năng của hệ lần lượt là

$$T = \frac{1}{2}\bar{m}\dot{q}^2, \qquad V = \frac{1}{2}\bar{k}q^2, \tag{2.2}$$

trong đó $\bar{m}$ đặc trưng cho quán tính (liên quan đến sự di chuyển nhanh hay chậm) của vật và $\bar{k}$ đặc trưng cho "độ cứng" (liên quan đến sự dịch chuyển dài hay ngắn) của vật.

Ví dụ 2.2.

Trường hợp chuyển động của con lắc đơn khối lượng m, chiều dài dây l, ta có tọa độ suy rộng là góc quay của vật nặng $q = \varphi$; quán tính là moment quán tính $\bar{m} = ml^2$, độ cứng là đại lượng tỉ lệ với độ cao của vật nặng $\bar{k} = mgl$ trong đó g là gia tốc trọng trường. Khi đó động năng và thế năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \qquad V = \frac{1}{2}mgl\varphi^2.$$

Trường hợp chuyển động của con lắc lò xo khối lượng vật nặng m độ cứng k, ta có $q = x$ là li độ của vật nặng; quán tính là khối lượng vật nặng $\bar{m} = m$ và độ cứng chính là độ cứng lò xo $\bar{k} = k$. Khi đó động năng và thế năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad V = \frac{1}{2}kx^2.$$

Phương trình Lagrange II trong trường hợp không có ngoại lực khác tác dụng được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \tag{2.3}$$

Thay động năng và thế năng trong (2.2) vào phương trình trên, ta dễ dàng tìm được phương trình vi phân rút gọn như sau

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{2.4}$$

trong đó $\omega^2 = \bar{k}/\bar{m}$ gọi là tần số riêng của dao động. Phương trình (2.4) là phương trình vi phân mô tả dao động tự do của hệ tuyến tính một bậc tự do. Nghiệm tổng quát của nó được tìm ở dạng

$$q = Asin(\omega t + \alpha), \tag{2.5}$$

với A và α là các hệ số cần xác định.

Giả sử tại thời điểm ban đầu, ta biết tọa độ q_0 và vận tốc chuyển động $\dot{q}_0$ của cơ hệ. Như vậy ta tìm được

$$\begin{cases} q(0) = Asin\alpha = q_0, \\ \dot{q}(0) = A\omega cos\alpha = \dot{q}_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Kết quả là ta nhận được

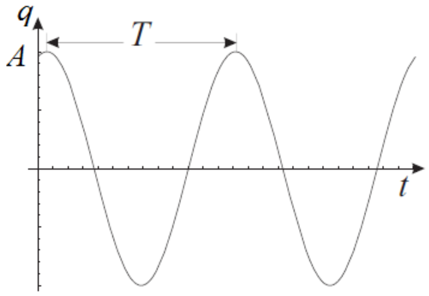
$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}} = A_0, \qquad \alpha = arctan\frac{\omega q_0}{\dot{q}_0} = \alpha_0. \tag{2.7}$$

Ta thu được phương trình chuyển động của hệ là

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}}sin\Big(\omega t + arctan\frac{\omega q_0}{\dot{q}_0}\Big). \tag{2.8}$$

Trong trường hợp này hệ dao động điều hòa với chu kì và tần số không đổi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}, \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}}. \tag{2.9}$$



Hình 2.1: Quỹ đạo của vật trong quá trình dao động tự do

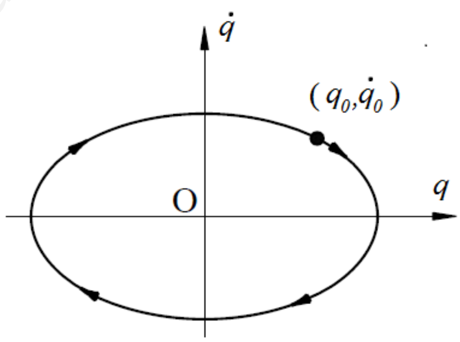
Tại mỗi thời điểm trạng thái của hệ được đặc trưng bằng dịch chuyển q và vận tốc $v = \dot{q}$. Ta biểu diễn tọa độ suy rộng và vận tốc của tọa độ suy rộng trên mặt phẳng pha (phase portrait)

$$\begin{cases} x = q = A_0 sin(\omega t + \alpha_0), \\ y = \dot{q} = A_0 \omega cos(\omega t + \alpha_0). \end{cases} \tag{2.10}$$

Từ phương trình tham số theo t, ta có thể tìm được quan hệ giữa tọa độ suy rộng và vận tốc của nó là

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{\dot{q}^2}{A^2\omega^2} = sin^2(\omega t + \alpha) + cos^2(\omega t + \alpha) = 1. \tag{2.11}$$

Đây là phương trình ellip với các bán trục là A và $A\omega$ với điểm biểu diễn ban đầu tương ứng với điều kiện $q(0) = q_0$ và $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.



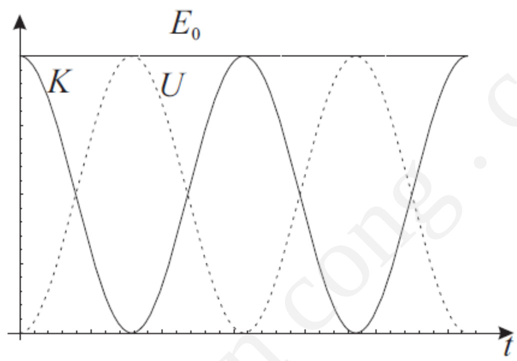
Hình 2.2: Phase portrait của dao động tự do

Khi thay tọa độ suy rộng và vận tốc của nó vào các biểu thức năng lượng. Ta thu được quan hệ giữa chúng như sau

$$\begin{cases} K(\dot{q}) = \dfrac{1}{2}\bar{m}\dot{q}^2 = \dfrac{\bar{m}\omega^2 A_0^2}{2} sin^2(\omega t + \alpha_0) = \dfrac{\bar{k}A_0^2}{2}(1 - cos(2\omega t - 2\alpha_0), \\ U(q) = \dfrac{1}{2}\bar{k}q^2 = \dfrac{\bar{k}A_0}{2} cos^2(\omega t + \alpha_0) = \dfrac{\bar{k}A_0^2}{2}(1 + cos(2\omega t - 2\alpha_0). \end{cases} \tag{2.12}$$

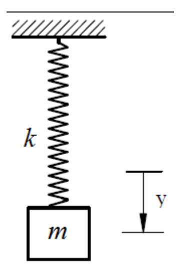
Kết quả là động năng và thế năng cũng có độ lớn là hàm dao động điều hòa với tần số rieng 2ω. Tổng năng lượng được bảo toàn và có giá trị

$$E = K + U = \bar{k}A_0^2 \tag{2.13}$$



Hình 2.3: Quan hệ giữa động năng và thế năng trong dao động tự do

Ví dụ 2.3. Tìm phương trình chuyển động của hệ gồm một lò xo độ cứng k một đầu gắn vào vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định vào trần. Biết rằng con lắc chuyển động theo phương thẳng đứng. Ban đầu lò xo ở vị trí cân bằng và được truyền một vận tốc đầu v_0. Cho biết chu kì và tần số của dao động.



2.2 Dao động tắt dần

Xét hệ một bậc tự do có tọa độ suy rộng là q. Giả sử tác động lên hệ ngoài lực có thế còn có lực cản phụ thuộc vào bậc nhất vận tốc, nghĩa là

$$F_c = \gamma v = \bar{\gamma}\dot{q}. \tag{2.14}$$

Phương trình Lagrange II trong trường hợp này được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_c. \tag{2.15}$$

Thay động năng và thế năng trong công thức (2.2) vào phương trình trên, ta thu được phương trình vi phân chuyển động rút gọn

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{2.16}$$

trong đó $2n = \bar{\gamma}/\bar{m}$, $\omega^2 = \bar{k}/\bar{m}$.

Chúng ta tìm nghiệm của phương trình trên trong hai trường hợp lực cản nhỏ và lực cản lớn.

2.2.1 Trường hợp lực cản nhỏ

Trường hợp này được xác định bởi $n < \omega$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.16) có dạng

$$q = Ae^{-nt}sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{2.17}$$

với $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ gọi là tần số tắt dần. Khi xét điều kiện đầu q_0 và $\dot{q}_0$, ta thu được

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{\omega_1^2}} = A_1, \qquad \alpha = arctan\frac{q_0\omega_1}{\dot{q}_0 + nq_0} = \alpha_1. \tag{2.18}$$

Vậy

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{\omega_1^2}}e^{-nt}sin\Big(\omega_1 t + arctan\frac{q_0\omega_1}{\dot{q}_0 + nq_0}\Big). \tag{2.19}$$

Nghiệm trên cho thấy biên độ của dao động giảm dần theo thời gian với quy luật hàm số mũ. Khi t tiến đến vô cùng, biên độ này tiệm cận tới không và do đó dao động là tắt dần. Chu kỳ dao động tắt dần được xác định bởi

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \simeq \frac{2\pi}{\omega}\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{k}\Big)^2\Big]. \tag{2.20}$$

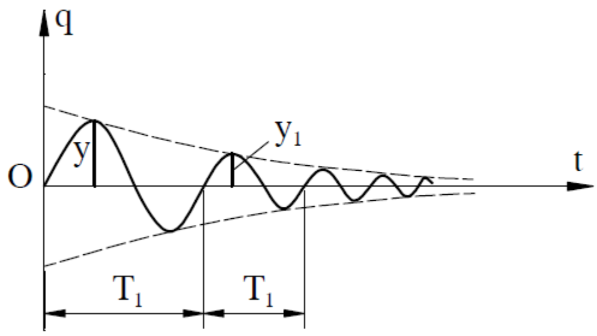
Chu kỳ tắt dần cũng là hằng số không phụ thuộc vào thời gian. Để đặc trưng cho sự giảm biên độ, người ta dùng kí hiệu δ và gọi nó là độ suy giảm Logarit của dao động

$$\delta = ln\frac{y}{y1} = nT_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{n^2} - 1}} \simeq \frac{y - y_1}{y} \tag{2.21}$$

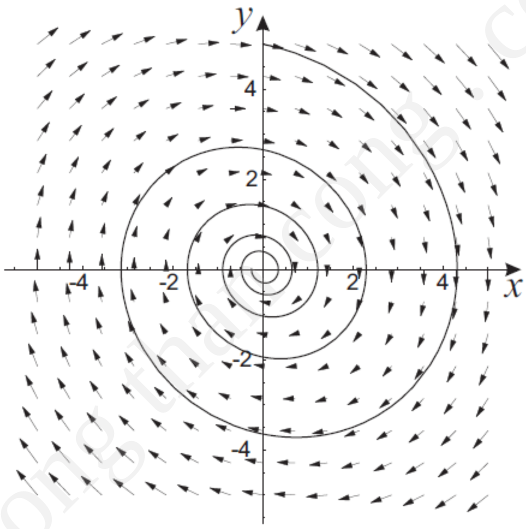
Từ phương trình tham số theo t của tọa độ suy rộng và vận tốc của nó, ta thu được

$$\frac{q^2}{A_1^2} + \frac{(\dot{q} - nq)^2}{A_1^2\omega_1^2} = e^{-nt}\Big(sin^2(\omega_1 t + \alpha_1) + cos^2(\omega_1 t + \alpha_1)\Big) = e^{-nt}. \tag{2.22}$$

Như vậy trong mặt phẳng $(q, \dot{q})$, quan hệ quan hệ giữa tọa độ suy rộng và vận tốc của nó là một hình xoắn ốc đi từ điểm ban đầu $(q_0, \dot{q}_0)$ hướng về gốc tọa độ.



Hình 2.4: Quỹ đạo của vật trong quá trình dao động tắt dần



Hình 2.5: Quan hệ giữa tọa độ suy rộng và vận tốc của vật trong quá trình dao động tắt dần

Về mặt năng lượng, phương trình (2.15) cho ta

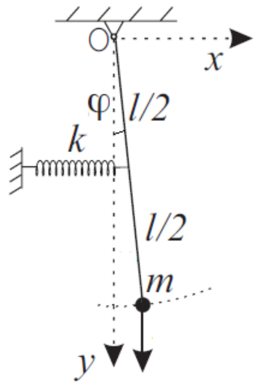
$$\frac{d}{dt}(K+U) = -F_c\dot{q}. \tag{2.23}$$

Tích phân phương trình trên từ t_0 đến t, ta thu được

$$K + U - E_0 = -\int_{t_0}^{t} F_c(\dot{q}(\tau))\dot{q}(\tau)d\tau = -E_d(t) \tag{2.24}$$

trong đó E_0 là tổng năng lượng ban đầu và $E_d(t)$ là phần năng lượng hao tán do lực cản tại thời điểm t.

Ví dụ 2.4. Xét một con lắc đơn gồm một vật khối lượng m nối vào thanh cứng chiều dài l theo phương thẳng đứng. Vật nặng trong khi chuyển động chịu lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc theo hệ số γ. Người ta nối điểm giữa của thanh với một lò xo độ cứng k nằm ngang. Hãy viết phương trình chuyển động của vật nặng treo trên thanh.

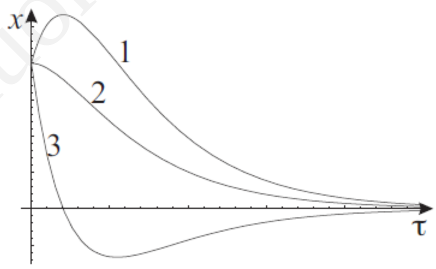


2.2.2 Trường hợp lực cản lớn

Trường hợp này được xác định bởi $n \geq \omega$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.16) có dạng

$$q = \begin{cases} e^{-nt}\Big((\dot{q}_0 - nq_0)t + q_0\Big), & \text{if } n = \omega, \\ e^{-(n+\omega_2)t}\Big(\dfrac{q_0(\omega_2+n)+\dot{q}_0}{2\omega_2}e^{2\omega_2 t} + \dfrac{q_0(\omega_2-n)+\dot{q}_0}{2\omega_2}\Big), & \text{if } n > \omega. \end{cases} \tag{2.25}$$

với $\omega_2 = \sqrt{n^2-\omega^2}$. Cả hai nghiệm này cho thấy hệ không dao động. Hơn nữa khi t tiến đến ∞, biên độ này tiệm cận tới zero và do đó chuyển động là tắt dần.



Hình 2.6: Quỹ đạo của vật trong quá trình dao động tắt dần

2.3 Dao động cưỡng bức

Dao động cưỡng bức xảy ra khi hệ chịu tác động của các kích động bên ngoài. Các kích động này có thể tuần hoàn hoặc do va chạm. Ta xem như lực kích động này như hàm theo thời gian $Q = Q(t)$.

Xét hệ một bậc tự do có tọa độ suy rộng q, chịu lực tác dụng là lực có thế, lực cản và lực kích động. Phương trình Lagrange II trong trường hợp này được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_c + Q. \tag{2.26}$$

Rút gọn phương trình trên, ta thu được phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega q = Q(t). \tag{2.27}$$

Trong trường hợp lực cản nhỏ ($n < \omega$) nghiệm tổng quát của phương trình (2.27) có dạng

$$q = Ae^{-nt}sin(\omega_1 t + \alpha) + \bar{q} \tag{2.28}$$

với $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ và A, α là những hệ số chưa xác định và $\bar{q}$ là nghiệm riêng của phương trình vi phân được tìm dưới dạng

$$\bar{q} = e^{-nt}\bar{Q}(t). \tag{2.29}$$

Khi xét điều kiện đầu q_0 và $\dot{q}_0$, ta thu được

$$\bar{Q}(t) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{n\tau}Q(\tau)sin(\omega_1(t-\tau))d\tau, \tag{2.30}$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$q = Ae^{-nt}sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{1}{k_1}\int_0^t e^{-n(t-\tau)}Q(\tau)sin(\omega_1(t-\tau))d\tau. \tag{2.31}$$

Về mặt năng lượng, phương trình (2.26) cho ta

$$\frac{d}{dt}(K + U) = -2D(\dot{q}) + f(t)\dot{q} \tag{2.32}$$

Tích phân phương trình trên từ t_0 đến t, ta thu được

$$K + U - E_0 = -2\int_{t_0}^t D(\dot{q}(s))ds = -E_d(t) + W(t). \tag{2.33}$$

trong đó E_0 là tổng năng lượng ban đầu, $E_d(t)$ là phần năng lượng hao tán do lực cản tại thời điểm t và $W(t)$ là công do lực cưỡng bức thực hiện cho đến thời điểm t.

Trong thực tế lực cưỡng bức là các lực điều hòa vì vậy trong các mục sau ta chỉ xét lực cưỡng bức điều hòa.

2.3.1 Trường hợp không có lực cản

Giả sử lực kích động biến đổi theo quy luật điều hòa $Q(t) = Q_0 sin\phi t$. Phương trình vi phân chuyển động thành

$$\ddot{q} + \omega^2 q = P_0 sin\phi t. \tag{2.34}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$q = Asin(\omega t + \alpha) + \bar{q}. \tag{2.35}$$

với $\bar{q}$ là nghiệm riêng được tìm dựa theo dạng của vế phải (2.34). Kết quả là ta thu được

$$\bar{q} = \frac{Q_0}{\omega^2 - \phi^2} sin\phi t. \tag{2.36}$$

Thay các điều kiện đầu chúng ta sẽ thu được

$$q = A_0 sin(\omega t + \alpha_0) - \frac{\phi Q_0}{\omega(\omega^2 - \phi^2)} sin\omega t + \frac{Q_0}{\omega^2 - \phi^2} sin\phi t. \tag{2.37}$$

trong đó A_0 và α_0 được xác định bởi (2.7).

Số hạng đầu của (2.37) tương ứng với dao động tự do tần số riêng ω. Số hạng thứ hai cũng là dao động điều hòa với tần số riêng ω nhưng biên độ phụ thuộc vào lực kích động. Số hạng cuối biểu thị dao động cưỡng bức với tần số kích động ϕ.

Trường hợp $\phi = \omega$ thì hai biểu thức cuối được tính toán bởi

$$-\frac{pQ_0}{\omega(\omega^2 - \phi^2)} sin\omega t + \frac{Q_0}{\omega^2 - \phi^2} sin\phi t = Q_0 \frac{-psin\omega t + \omega sin\phi t}{\omega(\omega^2 - \phi^2)}. \tag{2.38}$$

Áp dụng quy tắc L'Hopital, ta thu được

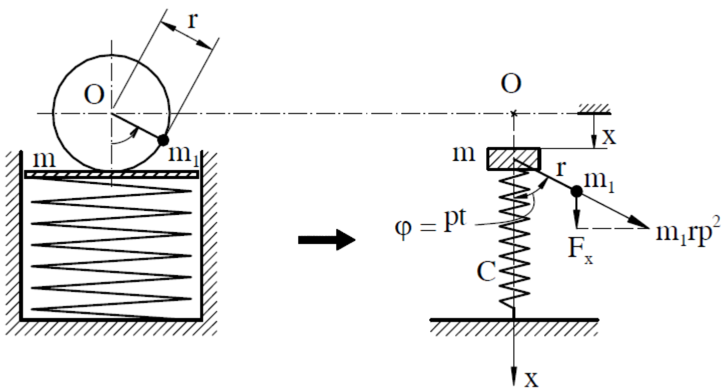
$$Q_0 \frac{-\phi sin\omega t + \omega sin\phi t}{\omega(\omega^2 - \phi^2)} = \lim_{\phi \to \omega} Q_0 \frac{-sin\omega t + \omega t cos\phi t}{-2\omega\phi} = \frac{Q_0}{2\omega^2} sin\omega t - \frac{Q_0 t}{2\omega} cos\omega t. \tag{2.39}$$

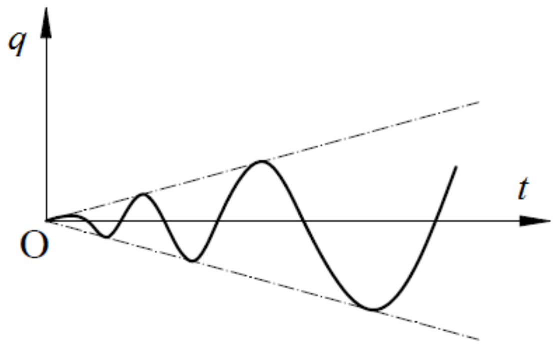
Kết quả ta thu được nghiệm của phương trình ban đầu là

$$q = A_0 sin(\omega t + \alpha_0) + \frac{Q_0}{2\omega^2} sin\omega t - \frac{Q_0 t}{2\omega} cos\omega t. \tag{2.40}$$

Thành phần cuối của nghiệm trên cho ta thấy biên độ của dao động tăng tuyến tính theo thời gian, đây chính là nguyên nhân gây nên sự cộng hưởng.

Ví dụ 2.5. Một động cơ điện khối lượng m được đỡ bởi một lò xo xoắn có độ cứng là k. Người ta gắn vào trục động cơ một tải trọng m_1 cách trục động cơ đoạn r. Biết động cơ quay với vận tốc góc không đổi ϕ. Hãy viết phương trình dao động của động cơ biết rằng tại thời điểm ban đầu lò xo ở vị trí không biến dạng và góc quay của tải trọng bằng zero.





Hình 2.7: Quỹ đạo của vật trong quá trình dao động cưỡng bức

2.3.2 Trường hợp có lực cản

Trong trường hợp cưỡng bức có lực cản, phương trình vi phân chuyển động được viết như sau

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = Q_0 sin\phi t. \tag{2.41}$$

Với lực cản nhỏ ($n < \omega$), nghiệm của phương trình trên là

$$q = Ae^{-nt} sin(\omega_1 t + \alpha) + \bar{q}, \tag{2.42}$$

với $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ và $\bar{q}$ là nghiệm riêng được tìm dựa theo dạng của vế phải (2.41). Kết quả là ta thu được

$$\bar{q} = \frac{Q_0}{\sqrt{(\omega^2 - \phi^2)^2 + 4n^2\phi^2}} sin(\phi t - \beta), \quad \text{với} \quad \beta = arctan\frac{2n\phi}{\omega^2 - \phi^2}. \tag{2.43}$$

Kiểm tra các điều kiện đầu ta thu được nghiệm của phương trình (2.41) là

$$q = A_1 e^{-nt} sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{Q_0}{\sqrt{(\omega^2 - \phi^2)^2 + 4n^2\phi^2}} sin(\phi t - \beta). \tag{2.44}$$

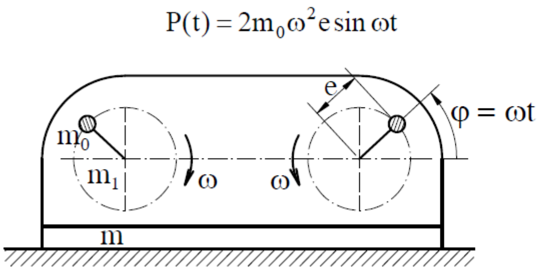
trong đó A_1 và α_1 đã được xác định bởi (2.18).

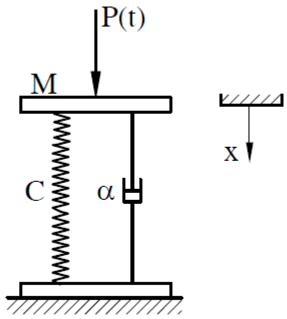
Số hạng đầu của nghiệm ứng với dao động tự do có lực cản và nó sẽ tắt dần theo thời gian. Sau một khoảng thời gian ta có thể bỏ qua số hạng này. Số hạng thứ hai xác định dao động bình ổn của hệ. Biên độ của nó không phụ thuộc thời gian và không tắt dần. Thậm chí khi xảy ra cộng hưởng ($\phi = \omega$) biên độ này vẫn hữu hạn.

Trong dao động cưỡng bức này luôn xảy ra độ lệch pha giữa pha dao đông với pha của lực kích động. Độ lệch pha này đạt cực đại khi cộng hưởng và có giá trị $\beta = \pi/2$.

Ví dụ 2.6. Để dầm bê tông ở chân móng các công trình, người ta dùng một thiết bị đặc biệt. Đó là chấn tử lệch tâm gồm một đế nặng khối lượng m, trên đó đặt hai đĩa quay khối lượng mỗi đĩa bằng m_1. Các đĩa quay trong mặt phẳng thẳng đứng theo chiều ngược nhau với vận tốc góc ϕ. Trên mỗi đĩa người ta gắn một tải trọng m_0 cách trục quay một khoảng r.

Hãy thiết lập phương trình dao động bình ổn của vỏ chấn tử. Tính biên độ dao động.

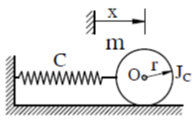

P(t) = 2m0ω2esinωt
e
φ = ωt
m0
m1
ω
ω
m


P(t)
M
C
α
x

2.4 Bài tập

Bài tập 2.1. Tìm phương trình chuyển động của hệ gồm một lò xo độ cứng k một đầu gắn vào vật nặng hình trụ khối lượng m bán kính r, một đầu gắn cố định vào tường. Biết rằng con lắc chuyển động theo phương nằm ngang. Ban đầu lò xo được kéo giãn đoạn x_0 và thả không vận tốc đầu.

Hãy cho biết chu kì và tần số của dao động. Biết moment quán tính của vật nặng là $I = \frac{1}{2}mr^2$.



Đáp án: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}, f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{2m}}$.

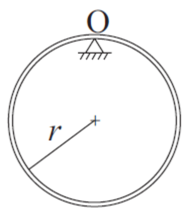
Bài tập 2.2. Xét một con lắc đơn gồm một vật khối lượng m nối vào thanh cứng chiều dài l theo phương thẳng đứng. Người ta nối điểm giữa của thanh với một lò xo độ cứng k nằm ngang.

Hãy viết phương trình chuyển động của vật nặng treo trên thanh. Biết tại thời điểm ban đầu con lắc được kéo lệch một góc 5^o và thả không vận tốc đầu.

Đáp án: $\varphi = 5^o sin(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}t)$.

Bài tập 2.3. Một vòng khối lượng m bán kính r được đặt trên một điểm tựa như hình vẽ. Biết rằng vòng được kéo lệch một góc $\varphi_0 = 7^o$ và thả không vật tốc đầu.

Hãy viết phương trình chuyển động của vòng.

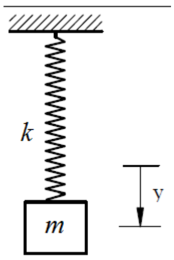


Đáp án: $\varphi = 7^o sin(\sqrt{\frac{g}{2r}}t + \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 2.4. Trong trường hợp dao động tắt dần có lực cản lớn, hãy chứng minh các công thức nghiệm (2.25) là nghiệm của phương trình vi phân (2.16).

Bài tập 2.5. Tìm phương trình chuyển động thẳng đứng của hệ gồm một lò xo độ cứng k một đầu gắn vào vật nặng khối lượng m, một đầu gắn cố định vào trần. Biết rằng vật nặng chịu lực cản không khí tỉ lệ thuận với vận tốc. Ban đầu lò xo bị kéo một đoạn l_0 và thả không vận tốc đầu.

Hãy viết phương trình chuyển động của vật nặng và cho biết chu kì của dao động.



Đáp án: Trường hợp lực cản nhỏ $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$x = e^{-nt}\left[(l_0 - \frac{mg}{k})cos(\omega_1 t) + n(l_0 - \frac{mg}{k})sin(\omega_1 t)\right] + \frac{mg}{k}$$

Trường hợp lực cản vừa $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$x = e^{-nt}\left[(l_0 - \frac{mg}{k}) + nt(l_0 - \frac{mg}{k})\right] + \frac{mg}{k}$$

Trường hợp lực cản lớn $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}, T = \frac{2\pi}{\omega_2}$

$$x = (l_0 - \frac{mg}{k} - \frac{kl_0 - mg}{2\omega_2 k})e^{-(n+\omega_2)t} + \frac{kl_0 - mg}{2\omega_2 k}e^{-(n-\omega_2)t} + \frac{mg}{k}$$

Bài tập 2.6. Một chiếc xích đu được mô hình hóa như một con lắc đơn gồm dây chiều dài l và vật nặng khối lượng m. Do lực cản tỉ lệ với vận tốc theo hệ số γ nên xích đu chuyển động chậm dần.

a) Tìm phương trình chuyển động của xích đu và quan hệ động năng - thế năng của nó.

b) Sau bao lâu thì xích đu dừng hẳn (năng lượng nhỏ hơn 1% so với ban đầu. Lúc đó xích đu đã quay được bao nhiêu vòng.

Đáp án: a) $e^{\frac{-\omega}{5}}t\left[\frac{\pi}{18}cos(\frac{t\omega\sqrt{24}}{5} + \frac{\pi}{18\sqrt{24}}sin(\frac{t\omega\sqrt{24}}{5}\right]$

b) $T_e = 227,0520s, N = 90,4986$ vòng.

Bài tập 2.7. Trong trường hợp dao động cưỡng bức không lực cản, hãy chứng minh

a) Công thức (2.36) là nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.34).

b) Công thức (2.37) là nghiệm của phương trình vi phân (2.34).

Bài tập 2.8. Trong trường hợp dao động cưỡng bức có lực cản, hãy chứng minh

a) Công thức (2.43) là nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.41).

b) Công thức (2.44) là nghiệm của phương trình vi phân (2.41).

Bài tập 2.9. Khảo sát sự biến thiên biên độ của số hạng thứ hai trong nghiệm của bài toán dao động cưỡng bức có lực cản theo tần số riêng của lực cưỡng bức ϕ.

Bài tập 2.10. Một chiếc xích đu được mô hình hóa như một con lắc đơn gồm dây chiều dài l và vật nặng khối lượng m. Do lực cản tỉ lệ với vận tốc theo hệ số γ nên xích đu chuyển động chậm dần. Tại thời diểm xích đu lên cao nhất bên trái, người ta cung cấp một năng lượng E_0 bằng cách tác dụng một lực vào xích đu.

Tìm phương trình chuyển động của xích đu lúc này. E_0 bằng bao nhiêu thì hệ dao động tuần hoàn?

Chương 3

Dao động của hệ nhiều bậc tự do

3.1 Dao động tự do

Xét cơ hệ N bậc tự do có các tọa độ suy rộng là $q_1, q_2, ..., q_N$. Các lực tác dụng lên hệ là lực có thế. Giả sử động năng và thế năng của hệ lần lượt là

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{m}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{k}_{ij}q_iq_j, \qquad i,j \in \overline{1,N}, \tag{3.1}$$

trong đó $\bar{m}_{ij}$, $\bar{k}_{ij}$ là đặc trưng cho quán tính và độ cứng của vật thể và liên hệ giữa chúng trong cơ hệ. Khi đó phương trình Lagrange II trong trường hợp không có ngoại lực khác tác dụng được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \qquad i \in \overline{1,N}. \tag{3.2}$$

Thay động năng và thế năng trong (3.1) vào phương trình trên, ta sẽ tìm được hệ phương trình vi phân rút gọn như sau

$$\sum_{j=1}^{N}\bar{m}_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\bar{k}_{ij}q_j = 0, \qquad i \in \overline{1,N}. \tag{3.3}$$

Hệ phương trình (3.3) là hệ phương trình vi phân mô tả dao động tự do của hệ tuyến tính N bậc tự do. Để giải hệ này, chúng ta có phương pháp tổng quát như sau:

Viết lại hệ trên một cách đơn giản như sau

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + ... + a_{1N}\ddot{q}_N + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + ... + c_{1N}q_N = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + ... + a_{2N}\ddot{q}_N + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + ... + c_{2N}q_N = 0, \\ \qquad ... \\ a_{N1}\ddot{q}_1 + a_{N2}\ddot{q}_2 + ... + a_{NN}\ddot{q}_N + c_{N1}q_1 + c_{N2}q_2 + ... + c_{NN}q_N = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$q_i = A_i sin(\omega t + \alpha), \qquad i \in \overline{1,N}. \tag{3.5}$$

Thay (3.5) vào (3.4) ta thu được

$$\begin{cases} A_1(c_{11} - a_{11}\omega^2) + A_2(c_{12} - a_{12}\omega^2) + ... + A_N(c_{1N} - a_{1N}\omega^2) = 0, \\ A_1(c_{21} - a_{21}\omega^2) + A_2(c_{22} - a_{22}\omega^2) + ... + A_N(c_{2N} - a_{2N}\omega^2) = 0, \\ \quad ... \\ A_1(c_{N1} - a_{N1}\omega^2) + A_2(c_{N2} - a_{N2}\omega^2) + ... + A_N(c_{NN} - a_{NN}\omega^2) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Điều kiện cần và đủ để A_i tồn tại thì

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - a_{11}\omega^2) & (c_{12} - a_{12}\omega^2) & ... & (c_{1N} - a_{1N}\omega^2) \\ (c_{21} - a_{21}\omega^2) & (c_{22} - a_{22}\omega^2) & ... & (c_{2N} - a_{2N}\omega^2) \\ & ... & & \\ (c_{N1} - a_{N1}\omega^2) & (c_{N2} - a_{N2}\omega^2) & ... & (c_{NN} - a_{NN}\omega^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Phương trình trên được gọi là phương trình tần số. Nó là phương trình bậc N của ω^2. Giả sử khi giải phương trình trên ta tìm được N nghiệm (dương) của ω lần lượt là ω_1, ω_2, ... ω_N, khi đó ta thu được nghiệm

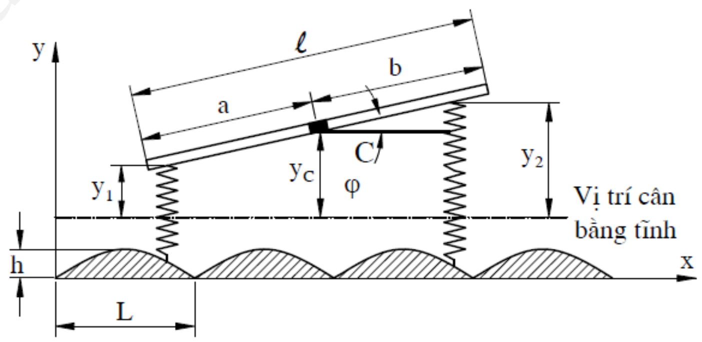
$$\begin{cases} q_1 = A_1 sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 sin(\omega_2 t + \alpha_2) + ... + A_N sin(\omega_N t + \alpha_N), \\ q_2 = A_1\zeta_{21} sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\zeta_{22} sin(\omega_2 t + \alpha_2) + ... + A_N\zeta_{2N} sin(\omega_N t + \alpha_N), \\ \quad ... \\ q_N = A_1\zeta_{N1} sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\zeta_{N2} sin(\omega_2 t + \alpha_2) + ... + A_N\zeta_{NN} sin(\omega_N t + \alpha_N). \end{cases} \tag{3.8}$$

trong đo

$$\zeta_{ij} = -\frac{c_{1j} - a_{1j}\omega_j^2}{c_{ji} - a_{ji}\omega_i^2}, \qquad i, j \in \overline{1, N}. \tag{3.9}$$

Ví dụ 3.1. Xe ô tô khối lượng m đang dao động tại chỗ nhờ hai lò xo độ cứng k_1, k_2 đặt tại hai trục xe. Biết trọng tâm xe cách hai bánh lần lượt là d_1, d_2 và moment quán tính của xe so với trọng tâm là I.

Viết phương trình chuyển động thẳng đứng của xe ô tô đối với mặt phẳng nằm ngang.



Giải:

Hệ có hai bậc tự do là chuyển động thẳng đứng của trọng tâm xe và sự quay của xe quanh trọng tâm nó. Ta chọn hai tọa độ suy rộng gồm y là tung độ của trọng tâm tính tại vị trí cân bằng và φ là góc nghiêng của sàn xe so với mặt phẳng nằm ngang. Khi đó động năng và thế năng của hệ lần lượt được xác định bằng

$$K = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$
$$U = \frac{1}{2}k_1(y + d_1\varphi - \Delta x)^2 + \frac{1}{2}k_2(y - d_2\varphi - \Delta x)^2 + mgy.$$

trong đó Δx là độ nén các lò xo khi chịu tải trọng mg. Phương trình Lagrange II cho ta

$$\begin{cases} m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + (k_1d_1 - k_2d_2)\varphi & = 0, \\ I\ddot{\varphi} + (k_1d_1 - k_2d_2)y + (k_1d_1^2 + k_2d_2^2)\varphi & = 0. \end{cases}$$

Để đơn giản hóa bài toán, ta giả sử $k_1 = k_2 = k$ và $d_1 = d_2 = d$. Khi đó phương trình trên được viết lại

$$\begin{cases} m\ddot{y} + 2ky & = 0, \\ I\ddot{\varphi} + 2kd^2\varphi & = 0. \end{cases}$$

Giải phương trình trên ta thu được hai nghiệm tổng quát sau

$$y = A_1sin(\frac{2k}{m}t + \alpha_1), \qquad \phi = A_2sin(\frac{2kd^2}{I}t + \alpha_2).$$

Thay các điều kiện biên, ta được

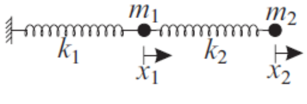
$$\begin{cases} y(0) = A_1sin(\alpha_1) = y_0, \\ \dot{y}(0) = \sqrt{\frac{2k}{m}}A_1\omega_1cos(\alpha_1) = 0, \\ \phi(0) = A_2sin(\alpha_2) = 0, \\ \dot{\phi}(0) = \sqrt{\frac{2kd^2}{I}}A_2\omega_1cos(\alpha_1) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = y_0, \\ \alpha_1 = pi/2, \\ A_2 = -\sqrt{\frac{2kd^2}{I}}v_0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Vậy nghiệm tổng quát mô phỏng dao động của xe hơi là

$$\begin{cases} y = y_0sin(\frac{2k}{m}t + \frac{\pi}{2}), \\ \varphi = v_0\sqrt{\frac{2kd^2}{I}}sin(\frac{2kd^2}{I}t). \end{cases}$$

Ví dụ 3.2. Cho hệ cơ vật gồm hai lò xo nối tiếp nhau nằm ngang như hình vẽ. Biết khối lượng của các vật nặng lần lượt là $m_1 = m_2 = m$ và độ cứng của các lò xo lần lượt là $k_1 = 3k, k_2 = 2k$. Biết rằng tại thời điểm ban đầu các lò xo chưa biến dạng và vật nặng m_2 được truyền một vận tốc v_0.

Hãy so sánh tần số dao động riêng của từng vật và tìm biểu diễn quan hệ giữa các tọa độ suy rộng và vận tốc của chúng.



Giải

Hệ có hai bậc tự do là vị trí của các vật nặng. Ta chọn hai tọa độ suy rộng gồm x_1 và x_2 là li độ của m_1 và m_2 so với vị trí không biến dạng. Khi đó động năng và thế năng của hệ lần lượt được xác định bằng

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$
$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2.$$

Phương trình Lagrange II cho ta

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0, \\ &m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Áp dụng phương pháp giải tổng quát, điều kiện (3.7) cho ta

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k2 \\ -k2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dẫn đến

$$m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 + 6k^2 = 0$$

Giải phương trình trên ta thu được hai nghiệm sau

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Theo công thức (3.9), ta tìm được tỉ lệ giữa các biên độ

$$\zeta_{21} = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = 2, \qquad \zeta_{22} = -\frac{c_{12} - a_{12}\omega_2^2}{c_{22} - a_{22}\omega_2^2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm tổng quát mô phỏng chuyển động của cơ hệ là

$$\begin{cases} x_1 = A_1sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ x_2 = 2A_1sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \dfrac{1}{2}A_2sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \tag{3.11}$$

Thay các điều kiện biên, ta được

$$\begin{cases} x_1(0) = A_1sin(\alpha_1) + A_2sin(\alpha_2) = 0, \\ \dot{x}_1(0) = A_1\omega_1cos(\alpha_1) + A_2\omega_2cos(\alpha_2) = 0, \\ x_2(0) = 2A_1sin(\alpha_1) - \dfrac{1}{2}A_2sin(\alpha_2) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = 2A_1\omega_1cos(\alpha_1) - \dfrac{1}{2}A_2\omega_2cos(\alpha_2) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{2v_0}{5}, \\ \alpha_1 = 0, \\ A_2 = -\sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{v_0}{15}, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Vậy phương trình chuyển động của cơ hệ là

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{2v_0}{5}sin(\dfrac{k}{m}t) - \sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{v_0}{15}sin(\dfrac{6k}{m}t), \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{4v_0}{5}sin(\dfrac{k}{m}t) + \sqrt{\dfrac{m}{k}}\dfrac{v_0}{15}sin(\dfrac{6k}{m}t), \end{cases} \tag{3.13}$$

3.2 Dao động tắt dần

Xét cơ hệ N bậc tự do có tọa độ suy rộng là $q_1, q_2, ..., q_N$. Giả sử tác động lên hệ ngoài các lực có thế còn có lực cản phụ thuộc vào vận tốc, nghĩa là

$$F^{\gamma} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} v_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \bar{\gamma}_{ij} \dot{q}_j, \qquad i, j \in \overline{1, N}. \tag{3.14}$$

Phương trình Lagrange II trong trường hợp này được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i^{\gamma}, \qquad i \in \overline{1, N} \tag{3.15}$$

Thay động năng và thế năng trong công thức (3.1) và lực cản trong công thức (3.14) vào phương trình trên, ta thu được phương trình vi phân chuyển động rút gọn

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{m}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \bar{\gamma}_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \bar{k}_{ij} q_j = 0, \qquad i \in \overline{1, N}. \tag{3.16}$$

Giải các phương trình vi phân trên, ta sẽ được tìm được dạng tổng quát của các tọa độ suy rộng. Tùy vào các giá trị ban đầu của tọa độ suy rộng và vận tốc của nó, ta sẽ tìm được các phương trình chuyển động của cơ hệ. Các phương trình chuyển động này sẽ có dạng dao động tắt dần trong trường hợp các lực cản nhỏ hoặc chuyển động chậm dần trong trường hợp lực cản lớn.

Ví dụ 3.3. Con lắc đơn được thiết kế gồm vật nặng khối lượng m và thanh cứng chiều dài l. Cho hệ vật gồm hai con lắc đơn được treo cách nhau một khoản d. Tại trung điểm các thanh, người ta gắn một lò xo có độ cứng k và chiều dài lúc không biến dạng là l. Người ta gắn vào giữa hai vật nặng một thiết bị tạo lực cản tỉ lệ với vận tốc tương tốc giữa hai vật năng. Tại thời điểm ban đầu các thanh được kéo lệch các góc lần lượt là φ_1 và φ_2. Biết rằng góc dao động của các vật nặng là nhỏ.

Tìm phương trình chuyển động của hệ.

Ví dụ 3.4. Hai lò xo có chiều dài lần lượt là l_1, l_2 và độ cứng lần lượt là k_1, k_2. Một vật nặng khối lượng m được đặt lên hai lò xo trên như hình vẽ. Biết vật nặng chịu lực cản tỉ lệ với vận tốc khối tâm vật bởi hệ số γ.

Tìm phương trình chuyển động của hệ.

3.3 Dao động cưỡng bức

Xét hệ N bậc tự do có các tọa độ suy rộng là $q_1, q_2, ..., q_n$, chịu lực tác dụng là lực có thế, lực cản và lực kích động. Phương trình Lagrange II trong trường hợp này được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i^{\gamma} + Q_i, \qquad i \in \overline{1, N}. \tag{3.17}$$

Thay động năng và thế năng trong công thức (3.1) và lực cản trong công thức (3.14) vào phương trình trên, ta thu được phương trình vi phân chuyển động rút gọn

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{m}_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \bar{\gamma}_{ij} q_j + \sum_{j=1}^{N} \bar{k}_{ij} q_j = Q_i, \qquad i \in \overline{1,N}. \tag{3.18}$$

Giải các phương trình vi phân trên, ta sẽ được tìm được dạng tổng quát của các tọa độ suy rộng. Tùy vào các giá trị ban đầu của tọa độ suy rộng và vận tốc của nó, ta sẽ tìm được các phương trình chuyển động của cơ hệ. Các chuyển động này hết sức phức tạp và phụ thuộc nhiều vào lực cản cũng như lực cưỡng bức.

3.3.1 Dao động cưỡng bức không có lực cản

Phương trình chuyển động của cơ hệ trong trường hợp này là

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{m}_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \bar{k}_{ij} q_j = Q_i sin(\phi t + \beta), \qquad i \in \overline{1,N}. \tag{3.19}$$

Ta có thể viết lại trong trường hợp tổng quát như sau

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + ... + a_{1N}\ddot{q}_N + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + ... + c_{1N}q_N = Q_1 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + ... + a_{2N}\ddot{q}_N + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + ... + c_{2N}q_N = Q_2 \\ \qquad ... \\ a_{N1}\ddot{q}_1 + a_{N2}\ddot{q}_2 + ... + a_{NN}\ddot{q}_N + c_{N1}q_1 + c_{N2}q_2 + ... + c_{NN}q_N = Q_N \end{cases} \tag{3.20}$$

Khi đó nghiệm của phương trình hệ trên gồm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất được xác định bởi (3.12) và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Ta tìm nghiệm riêng đó dưới dạng

$$\bar{q}_j = B_j sin(\phi t + \beta), \qquad j \in \overline{1,N}. \tag{3.21}$$

thay phương trình trên vào (3.19) ta thu được hệ

$$\begin{cases} B_1(c_{11} - a_{11}\phi^2) + B_2(c_{12} - a_{12}\phi^2) + ... + B_N(c_{1N} - a_{1N}\phi^2) = Q_1 \\ B_1(c_{21} - a_{21}\phi^2) + B_2(c_{22} - a_{22}\phi^2) + ... + B_N(c_{2N} - a_{2N}\phi^2) = Q_2 \\ \qquad ... \\ B_1(c_{N1} - a_{N1}\phi^2) + B_2(c_{N2} - a_{N2}\phi^2) + ... + B_N(c_{NN} - a_{NN}\phi^2) = Q_N \end{cases} \tag{3.22}$$

Đây là hệ N phương trình có N ẩn, chúng ta có thể tìm được biên độ B_j của các nghiệm $\bar{q}_j$ tương ứng.

Trong trường hợp có hai bậc tự do, ta tìm được biên độ như sau

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{\bar{Q}_1(c_{22} - a_{22}\phi^2) - \bar{Q}_2(c_{12} - a_{12}\phi^2)}{(c_{11} - a_{11}\phi^2)(c_{22} - a_{22}\phi^2) - (c_{12} - a_{12}\phi^2)^2} \\ B_2 = \dfrac{\bar{Q}_2(c_{11} - a_{11}\phi^2) - \bar{Q}_1(c_{12} - a_{12}\phi^2)}{(c_{11} - a_{11}\phi^2)(c_{22} - a_{22}\phi^2) - (c_{12} - a_{12}\phi^2)^2} \end{cases} \tag{3.23}$$

Mẫu số của hệ trên là đa thức bậc hai đối với ϕ^2. Mặt khác các tần số ω_1, ω_2 cũng là nghiệm của đa thức trên. Như vậy công thức biên đô B_j có thể viết lại như sau

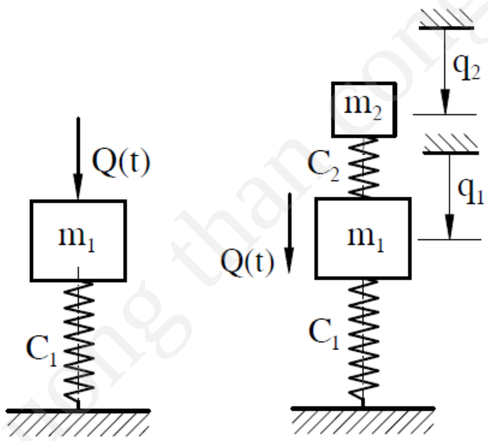
$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{\bar{Q}_1(c_{22} - a_{22}\phi^2) - \bar{Q}_2(c_{12} - a_{12}\phi^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\phi^2 - \omega_1^2)(\phi^2 - \omega_2^2)} \\ B_2 = \dfrac{\bar{Q}_2(c_{11} - a_{11}\phi^2) - \bar{Q}_1(c_{12} - a_{12}\phi^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\phi^2 - \omega_1^2)(\phi^2 - \omega_2^2)} \end{cases} \tag{3.24}$$

Với $\phi = \omega_1$ hoặc $\phi = \omega_2$ (tần số lực kích động bằng một trong các tần số riêng của hệ), các biên độ dao động cưỡng bức sẽ tăng vô hạn. Ta có hiện tượng cộng hưởng.

Ví dụ 3.5. Hai vật nặng khối lượng m_1, m_2 đặt trên các lò xo có độ cứng tương ứng là k_1, k_2 như hình vẽ. Lực kích động Q_1 tác dụng lên vật m_1 có dạng

$$Q_1 = \bar{Q}_1 sin(\phi t + beta)$$

.



Giải

Hệ có hai bậc tự do ứng với tọa độ theo phương thẳng đứng của hai vật. Động năng và thế năng của cơ hệ lần lượt là

$$K = \frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2), \qquad U = \frac{1}{2}(k_1q_1^2 + k_2(q_2 - q_1)^2)$$

Phương trình Lagrange II viết cho cơ hệ như sau

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = \bar{Q}_1 sin(\phi t + beta) \\ m_2\ddot{q}_2 - k_2q_1 + k_2q_2 = 0. \end{cases}$$

Áp dụng (**??**) cho ta nghiệm sau

$$\begin{cases} \bar{q}_1 = 0 \\ \bar{q}_2 = -\dfrac{\bar{Q}_1}{k_2} sin(\phi t + \beta) \end{cases}$$

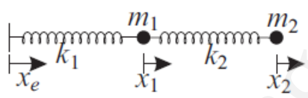
tức là vật m_1 không có dao động cưỡng bức. Ta có thể kiểm chứng điều này bằng cách thay nghiệm riêng $\bar{q}_2$ vào phương trình thứ nhất của hệ vi phân chuyển động. Khi đó ta được

$$\ddot{q}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} q_1 = 0$$

nghĩa là q_1 dao động điều hòa với tần sô $\omega_1 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m_1}$.

Ví dụ 3.6. Cho hệ cơ vật gồm hai lò xo nối tiếp nhau nằm ngang như hình vẽ. Biết khối lượng của các vật nặng lần lượt là m_1, m_2 và độ cứng của các lò xo lần lượt là k_1, k_2. Tại đầu bên trái lò xo chịu một dịch chuyển $x_e(t) = \bar{x}_e cos(\phi t)$. Biết rằng tại thời điểm ban đầu các lò xo chưa biến dạng và vật nặng m_2 được truyền một vận tốc v_0.

Tìm phương trình chuyển động của hệ.



Giải

Hệ có hai bậc tự do ứng với li độ của hai vật. Động năng và thế năng của cơ hệ lần lượt là

$$K = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_2)^2, \qquad U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_e)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2$$

Phương trình Lagrange II viết cho cơ hệ như sau

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = k_1x_e \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

3.3.2 Dao động cưỡng bức có lực cản

Ví dụ 3.7. Hai lò xo có chiều dài lần lượt là l_1, l_2 và độ cứng lần lượt là k_1, k_2. Một vật nặng khối lượng m được đặt lên hai lò xo trên như hình vẽ. Biết vật nặng chịu lực tác động cưỡng bức $f(t)$ theo phương thẳng đứng và chịu lực cản tỉ lệ với vận tốc khối tâm vật bởi hệ số γ.

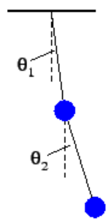
Tìm phương trình chuyển động của hệ.

3.4 Bài tập

Bài tập 3.1. Con lắc đơn được thiết kế gồm vật nặng khối lượng m và thanh cừng chiều dài l. Cho hệ vật gồm hai con lắc đơn được treo cách nhau một khoản d. Tại trung điểm các thanh, người ta gắn một lò xo có độ cứng k và chiều dài lúc không biến dạng là l. Tại thời điểm ban đầu các thanh được kéo lệch các góc lần lượt là φ_1 và φ_2. Biết rằng góc dao động của các vật nặng là nhỏ.

a) Tìm phương trình chuyển động của hệ.

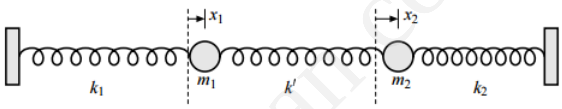
b) Trong trường hợp hai con lắc có khối lượng khác nhau, hãy tìm phương trình chuyển động của hệ.



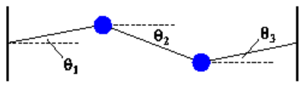
Bài tập 3.2. Hai vật nặng khối lượng m_1, m_2 được liên kết bởi ba lò xo có độ cứng k_1, k_2, k' như hình vẽ. Biết rằng các lò xo có chiều dài tự nhiên như nhau. Cho $m_1 = m, m_2 = 2m, k_1 = k, k_2 = 2k, k' = 2k$. Tìm phương trình chuyển động của hệ trong các trường hợp sau

a) Tại thời điểm ban đầu, vật m_2 được truyền vận tốc v_0 về phía trái.

b) Tại thời điểm ban đầu, vật m_1 bị kéo đoạn x_0 về phía phải.



Bài tập 3.3. CHo hệ như hình vẽ. Tìm phương trình chuyển động của hệ.



Bài tập 3.4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lò xo thứ nhất có độ cứng k_1 và chiều dài lúc chưa biết dạng $l_1 = a/2$ được đặt cố định một đầu ở A còn đầu kia nằm tại E trên AB. Đầu di động E được gắn vật nặng khối lượng m_1. Lò xo thứ hai có độ cứng k_2 và chiều dài lúc chưa biết dạng $l_2 = 3a/4$ được đặt cố định một đầu ở C còn đầu kia nằm tại F trên CD. Đầu di động E được gắn vật nặng khối lượng m_2. Biết $a = 60cm, k_1 = k_2 = 10kg/s, m_1 = m_2 = 0?1kg$. Ban đầu lò xo một bị kéo một đoạn $x_1 = 5cm$ về phía B và thả không vận tốc đầu còn lò xo thứ hai được truyền một vận tốc $v_2 = 1m/s$ hướng về D.

a) Tìm chuyển động của hai vật nặng.

b) Tìm chuyển động của trung điểmM của EF và điểm H trên EF thỏa $HF = 2HE$.

Bài tập 3.5. Một tòa nhà cao tầng được mô hình hóa thành hai phần như hình bên. Biết khối tâm chúng nằm ở tâm hình học. Khối lượng, moment quán tính (so với khối tâm) và chiều dài của chúng lần lượt là m_1, I_1, l_1 và m_2, I_2, l_2. Gọi góc quay của hai phần là φ_1 và φ_2.

a) Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ.

b) Viết phương trình chuyển động của hệ. Biết ban đầu tòa nhà đứng thẳng đứng và phần trên chịu sức gió khiến nó có vận tốc góc ω_0. Cho $m_1 = 3m, m_2 = m; l_1 = l, l_2 = 3l; I_1 = m_1 l_1^2/3, I_2 = m_2 l_2^2/12$.

c) Cấu trúc của tòa nhà sẽ bị phá hỏng nếu góc nghiêng phần thấp lớn hơn 3^o và góc nghiêng phần trên lớn hơn5^o. Tìm vận tốc góc ban đầu lớn nhất để cấu trúc tòa nhà không bị phá vỡ. Tại điểm cực trị đó, phần nào sẽ bị vỡ trước?

Bài tập 3.6. Một lò xo độ cứng k chiều dài tự nhiên l.Hai đầu lò xo được gắn hai vật nặng m_1 và m_2. Ban đầu lò xo bị kéo giãn đoạn x_0. Biết $m_2 = 2m_1$. Tìm phương trình chuyển động của hai vật trong các trường hợp sau:

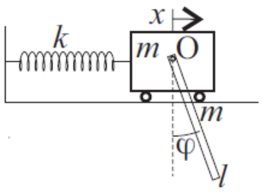
a) Lò xo được đặt nằm ngang.

b) Lò xo được đặt vắt qua một nêm hình nửa tam giác đều. Hai vật nặng trượt không ma sát trên hai mặt nêm.

Bài tập 3.7. Một vật nặng khối lượng M được nối với tường bằng một lò xo độ cứng k. Một vật nặng m được nối với vật nặng M bằng một thanh cứng không giãn l.

a) Tìm phương trình chuyển động của hệ.

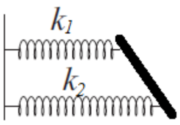
b) Nếu vật nặng M chịu lực tác động $F = \bar{F} sin(\phi t)$. Tìm phương trình chuyển động của hệ.



Bài tập 3.8. Hai lò xo độ cứng k_1, k_2, chiều dài tự nhiên l_1, l_2 một đầu được gắn vào tường một đầu được gắn vào hai đầu thanh dài khối lượng m chiều dài d.

a) Tìm phương trình chuyển động của hệ.

b) Nếu thanh chịu lực tác động $F = \bar{F}cos(\phi t)$ tại trọng tâm. Tìm phương trình chuyển động của hệ.



Bài tập 3.9. Hai thanh cứng và một vật nặng m được gắn như hệ hình bên. Biết mỗi thanh có thể dao động quanh khớp nối của chúng.

a) Tìm phương trình chuyển động của hệ.

b) Trong trường hợp thanh có thể co giãn, tình phương trình chuyển động của hệ.