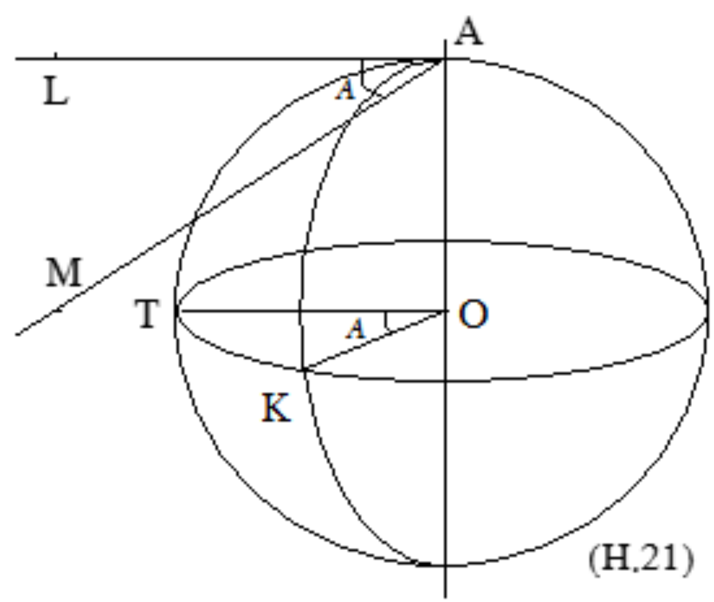
CHƯƠNG 3: LƯỢNG GIÁC CẦU

Giảng viên: TS. Nguyễn Nhật Kim Ngân
Email: nnkngan@hcmus.edu.vn
Văn phòng: B34, Vật lý Địa cầu,
Khoa Vật lý – Vật lý Kỹ thuật

1. GÓC CẦU

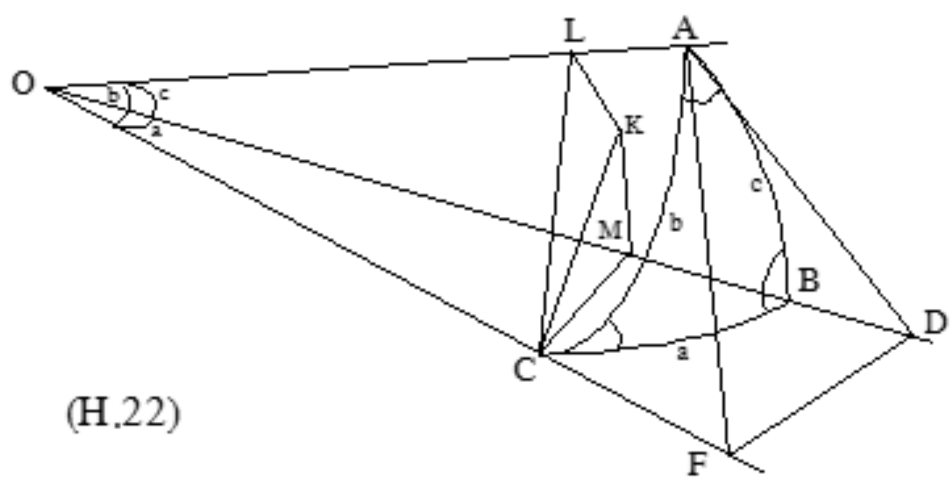
- Từ A ta vẽ hai tiếp tuyến AL và AM. Hai tiếp tuyến này tạo thành góc phẳng A có số đo bằng góc cầu A.
- Cung của vòng tròn lớn TK vuông góc với bán kính OA cũng có số đo bằng A và bằng số đo của góc ở tâm O là TOK = A



(H.21)

2. TAM GIÁC CẦU

- Ba điểm trên mặt cầu được nối bởi ba cung của vòng tròn lớn, lập thành một tam giác cầu. Các cung vòng tròn lớn đó là a, b, c là các cạnh của tam giác cầu. Ta chỉ khảo sát tam giác có góc và cạnh nhỏ hơn 180^0.
- Nối ba đỉnh A, B, C của tam giác cầu với tâm O của hình cầu, ta có một góc tam diện.



(H.22)

2. TAM GIÁC CẦU

Trong tam giác cầu ABC:

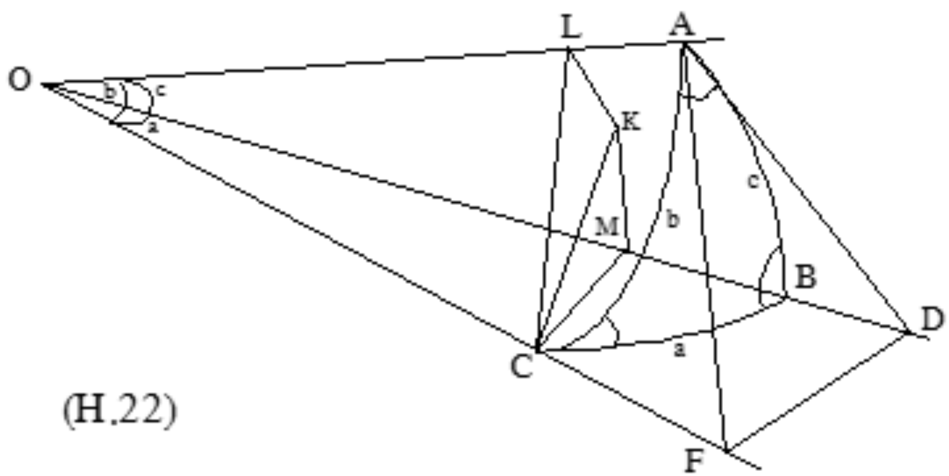
a. Mỗi góc phẳng của tam diện được đo bằng cạnh đối diện tương ứng của tam giác cầu.

COB = a

COA = b

AOB = c

b. Mỗi góc nhị diện bằng góc tương ứng của tam giác cầu. Ví dụ: góc FAD = A, tạo bởi nhị diện là 2 mặt phẳng chứa tam giác FOA và DOA.



(H.22)

3. CÁC HỆ THỨC GIỮA CÁC CẠNH CỦA TAM GIÁC CẦU

3.1. Cạnh:

a. Tổng ba cạnh: $0^0 < (a + b + c) < 360^0$

b. Một cạnh luôn nhỏ hơn tổng 2 cạnh và lớn hơn hiệu 2 cạnh kia: a < b+c; c> a-b

c. Nửa tổng 3 cạnh lớn hơn một cạnh: (a+b+c)/2 > b

3.2. Góc:

a. $180^0 < (A + B + C) < 540^0$

b. $(A+B-C) < 180^0$

4. CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN CỦA LƯỢNG GIÁC CẦU

1. Công thức Sin:

Sina/SinA = Sinb/SinB = Sinc/SinC

2. Công thức Cos:

Cosa = cosb.cosc + sinb.sinc.cosA
Cosb = cosc.cosa + sinc.sina.cosB
Cosc = cosa.cosb + sina.sinb.cosC

3. Công thức Sin Cos:

Sina.CosB = cosb.sinc – sinb.cosc.cosA
Sinb.cosC = cosc.sina – sinc.cosa.cosB
Sinc.cosA = cosa.sinb – sina.cosb.cosC

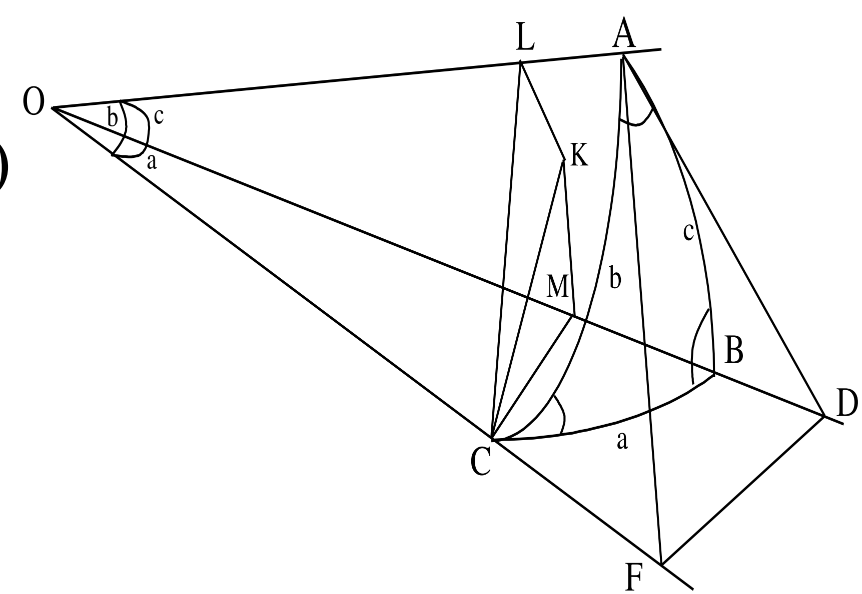
4.1. Công thức sin

Sina/SinA = Sinb/SinB = Sinc/SinC = n = hằng số

- Từ C hạ đường vuông góc CK xuống ΔAOB
- Từ K vẽ đường vuông góc KL và KM với hai cạnh OA và OB của tam giác này.
- Nối C với L và M, ta có $\widehat{CLO} = \widehat{CMO} = 90^0$

⇒ CM = Rsina = sina (Cho R = 1)

⇒ CL = Rsinb = sinb (Cho R = 1)



4.1. Công thức sin

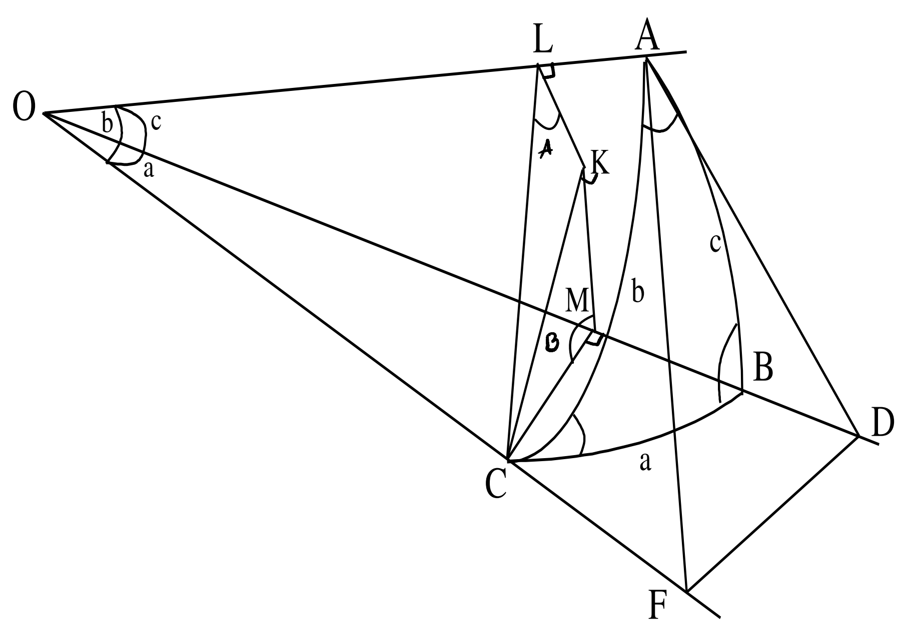
Xét ΔCKL và ΔCKM ta có:

CLK = A; CMK = B

⇒CK = CMsinB = CLsinA (2)

Kết hợp (1) với (2) ta có:

Sina/SinA = Sinb/SinB = Sinc/SinC = n = hằng số (3)



4.2. Công thức cos

Hai tiếp tuyến AF và AD hợp thành một góc phẳng bằng góc cầu A. Ta có:

OD = 1/cosc; OF = 1/cosb (4)

AD/OD = sinc; AF/OF = sinb (5)

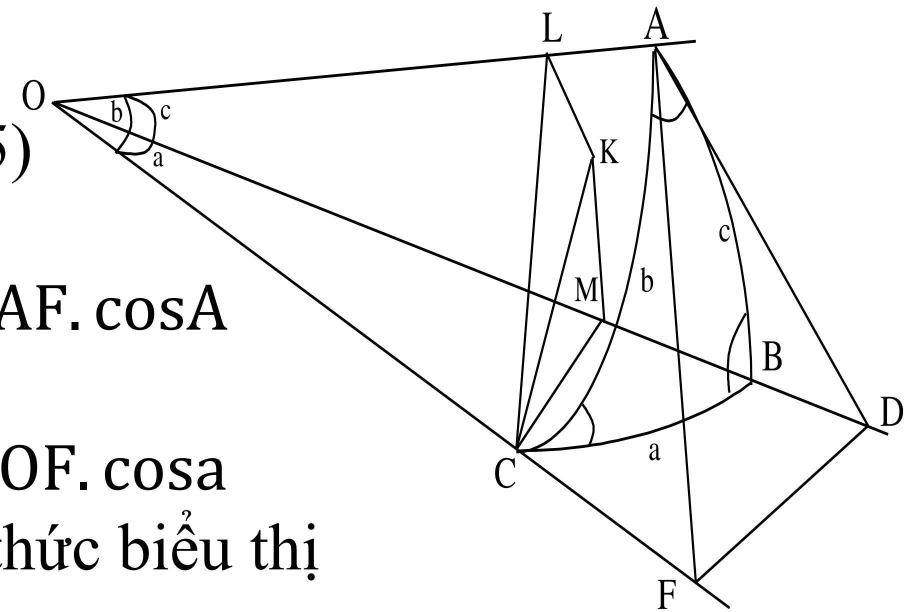
Xét ΔADF ta có:

$$DF^2 = AD^2 + AF^2 - 2AD.AF.\cos A$$

Trong ΔODF, ta có:

$$DF^2 = OD^2 + OF^2 - 2OD.OF.\cos a$$

Cân bằng 2 vế phải của 2 đẳng thức biểu thị DF^2



OD.OF.cosa = $(OD^2 - AD^2) + (OF^2 - AF^2) + 2.AD.AF.\cos A$

=> Cosa = 1/OF.OD + AF/OF.AD/OD.cosA

4.2. Công thức cos

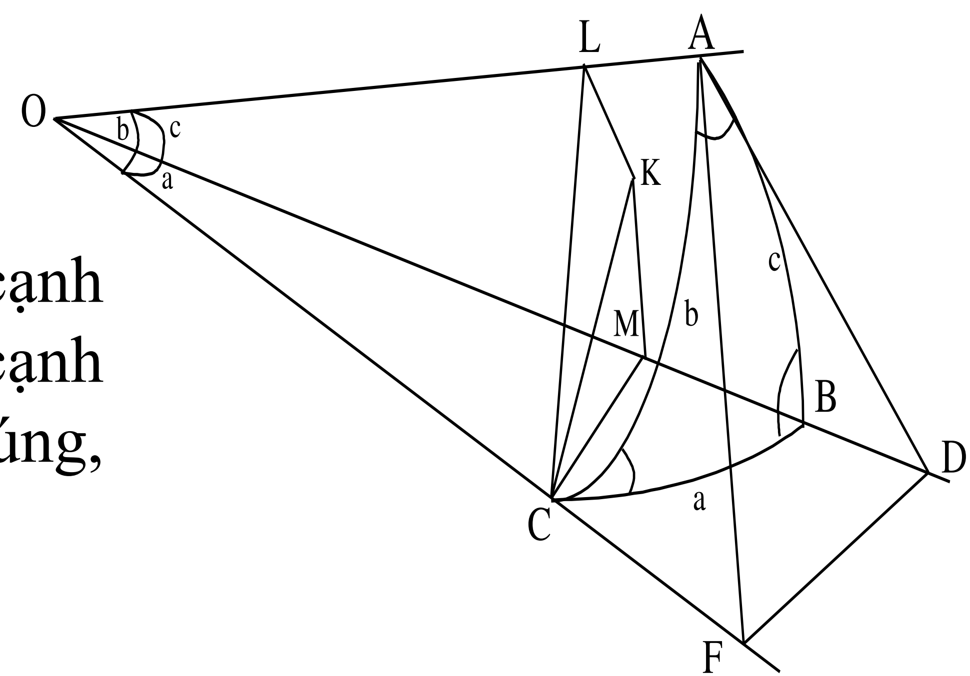
Sử dụng (4) và (5), ta có:

Cosa = cosb.cosc + sinb.sinc.cosA (6)

Cosb = cosc.cosa + sinc.sina.cosB (6a)

Cosc = cosa.cosb + sina.sinb.cosC (6b)

Phát biểu: Cos của một cạnh bằng tích các cos của hai cạnh kia cộng tích các sin của chúng, nhân với cos góc đối diện.



4.3. Công thức sin cos

$$\text{Cosa} = \text{cosb.cosc} + \text{sinb.sinc.cosA} \quad (6)$$
$$\text{Cosb} = \text{cosc.cosa} + \text{sinc.sina.cosB} \quad (6a)$$
$$\text{Cosc} = \text{cosa.cosb} + \text{sina.sinb.cosC} \quad (6b)$$

Nhân hai vế công thức (6) với cosc và cộng với (6a), ta có:
Cosb + cosa.cosc = cosc.cosa + cosb.cosc + sina.sinc.cosB + sinb.sinc.cosc.cosA

$$\Rightarrow$$

$$\text{cosb}\ (1-\cos^2 c) = \text{sinc sina cosB} + \text{sinb sinc cosc cosA}$$

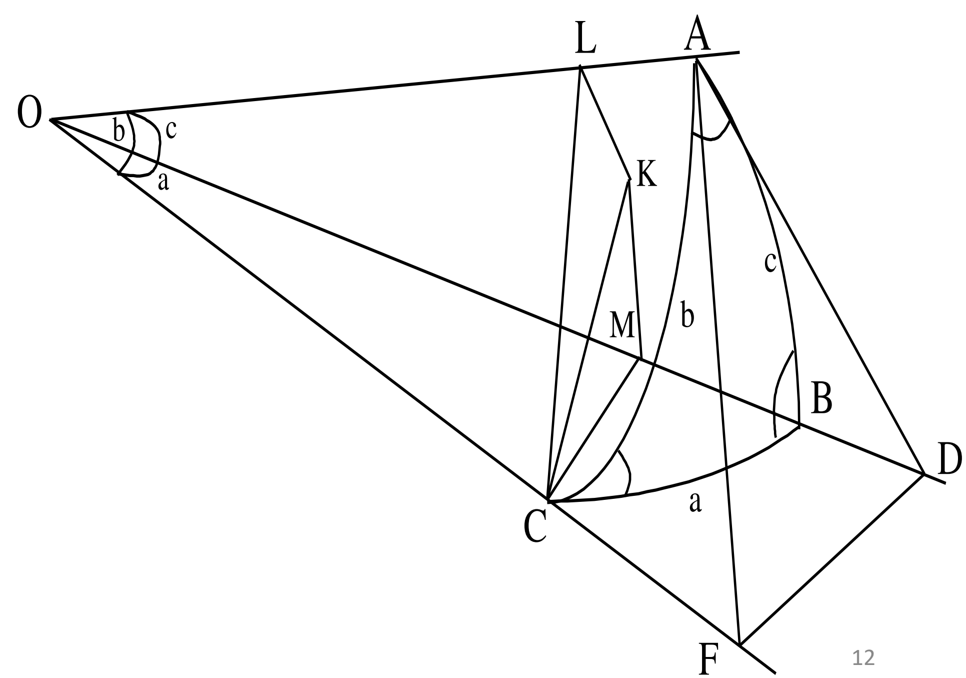
4.3. Công thức sin cos

Giản ước sinc ở hai vế ta có :

$$\sin a.\cos B = \cos b.\sin c - \sin b.\cos c.\cos A \qquad (7)$$

$$\sin b.\cos C = \cos c.\sin a - \sin c.\cos a.\cos B \qquad (7a)$$

$$\sin c.\cos A = \cos a.\sin b - \sin a.\cos b.\cos C \qquad (7b)$$



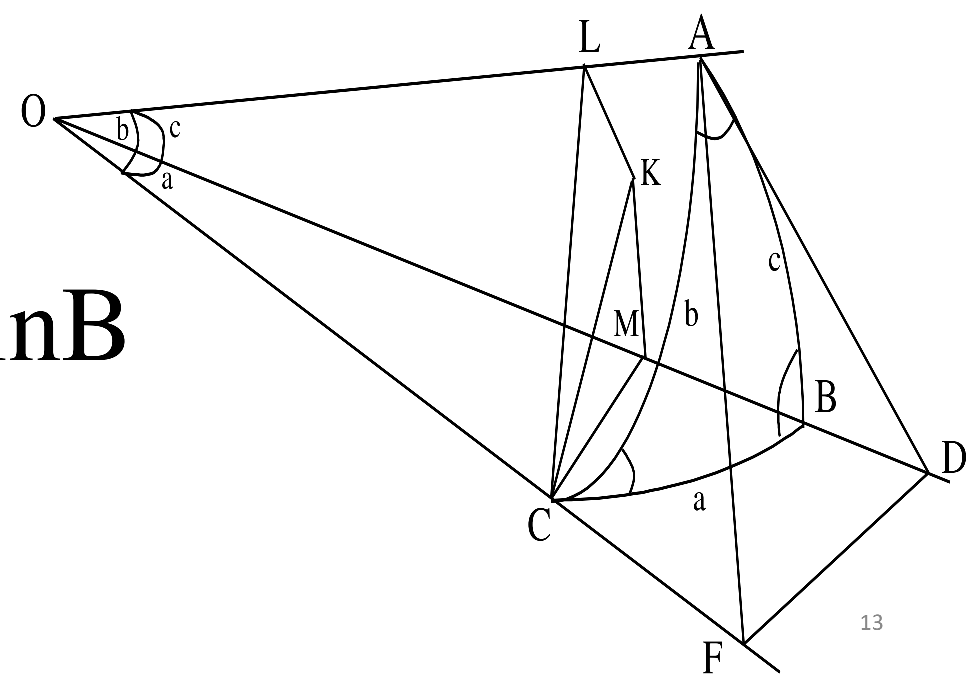
5. Tam giác cầu vuông

Ví dụ : $A = 90^0$, $\cos A = 0$, $\sin A = 1$.

<u>Công thức sin :</u>

sina/sinA = sinb/sinB =sinc/sinC

sina/sinb =1/sinB



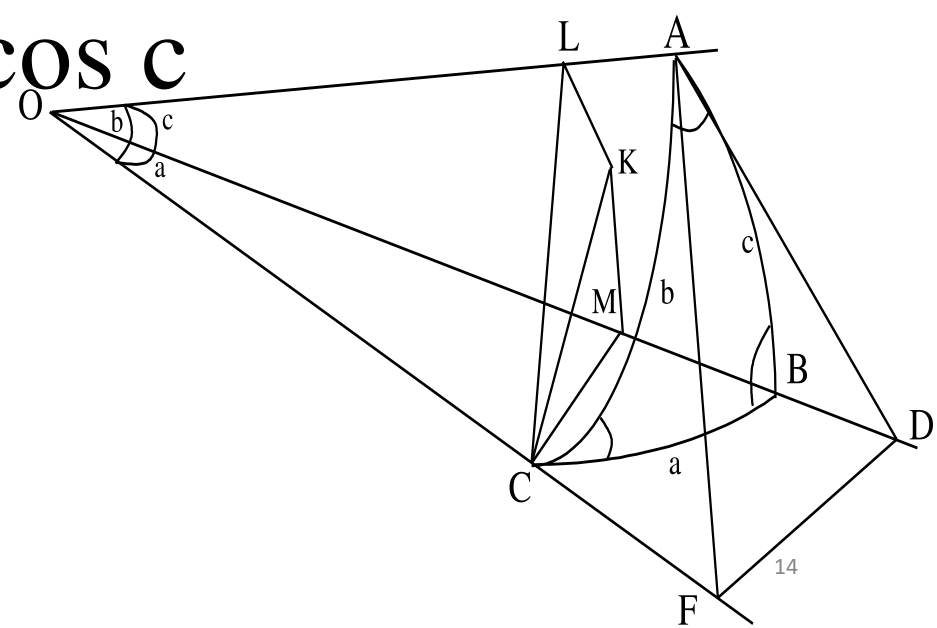
5. Tam giác cầu vuông

Ví dụ : A = 90^0 , cosA= 0, sinA =1.

Công thức cos :

cosa = cosb.cosc + sinb.sinc.cosA
cosb = cosc.cosa + sinc.sina.cosB
cos c = cosa.cosb + sina.sinb.cos C

⇒ Cos a = cos b.cos c



5. Tam giác cầu vuông

Ví dụ : $A = 90^0$, $\cos A = 0$, $\sin A = 1$.

<u>Công thức sin cos</u> :

$\sin a.\cos B = \cos b.\sin c - \sin b.\cos c.\cos A$

$\sin b.\cos C = \cos c.\sin a - \sin c.\cos a.\cos B$

$\sin c.\cos A = \cos a.\sin b - \sin a.\cos b.\cos C$

$\Rightarrow$ $\sin a . \cos B = \cos b . \sin c$

Chia hai vế của pt trên cho sinb, sử dụng pt (9), ta có:

$$\cot g B = \cot g b . \sin c \qquad (11)$$

$$\sin a / \sin b = 1/\sin B \qquad (9)$$

6. ỨNG DỤNG ĐỂ CHUYỂN TỌA ĐỘ

* Tam giác thị sai:

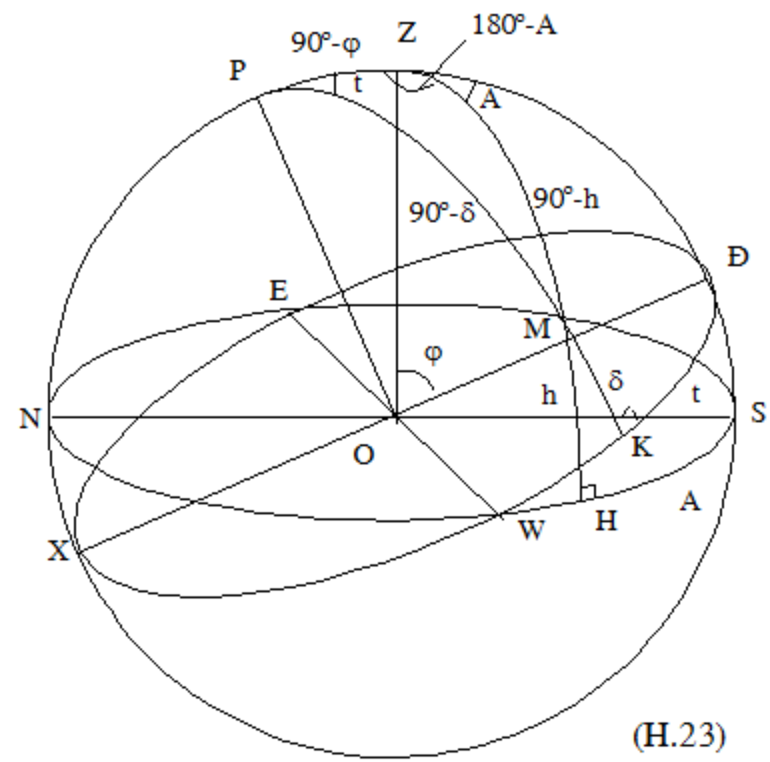
là một tam giác cầu trên thiên cầu, ba đỉnh là cực vũ trụ P, thiên đỉnh Z và thiên thể M.

Tam giác thị sai PZM có 3 cạnh như sau :

$PZ = 90^0 - \varphi$

$ZM = 90^0 - h = z$ (góc thiên đỉnh)

$PM = 90^0 - \delta$



(H.23)

6. ỨNG DỤNG ĐỂ CHUYỂN TỌA ĐỘ

6.2. Chuyển toạ độ từ hệ xích đạo I sang hệ chân trời

Ấp dụng 3 công thức cơ bản : sin, cos và sincos, ta có :

$$\sin z.\sin A = \cos\delta \sin t \qquad (13\ )$$

$$\cos z = \sin\delta.\sin\varphi + \cos\delta.\cos\varphi.\cos t \qquad (13\ a)$$

$$\sin z.\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t \qquad (13\ b)$$

6. ỨNG DỤNG ĐỂ CHUYỂN TỌA ĐỘ

6.2. Chuyển toạ độ từ hệ chân trời sang xích đạo I

$$\cos\delta\sin t = \sin z.\sin A \qquad (14)$$

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A \qquad (14a)$$

$$\cos\delta.\cos t = \cos z.\cos\varphi + \sin z\sin\varphi\cos A \qquad (14b)$$

7. BÀI TẬP

7.1. Cho $\varphi = 64^o\ 23'\ 58''$ S, $\delta = 52^o\ 40'\ 25''$ S, $t = 103^o\ 47'\ 21''$, tìm h của thiên thể.

ĐS : $h = 40^0\ 53'\ 42''$.

7.2. Cho $\varphi = 59^o\ 56'\ 32''$ N, $\delta = 38^o\ 44'\ 42''$ N, $h = 55^o\ 36'\ 20''$, tìm t và A. Sao nằm ở Tây bán cầu.

ĐS : $t = 43^o\ 28'\ 30''$, $A = 71^o\ 48'\ 30''$.

HD : Tìm t từ (13a) và A từ (14b).

7. BÀI TẬP

7.3. Cho $\varphi = 64^o\ 23'\ 58''$ N, $h = 10^o\ 12'\ 30''$ N, $A = 15^o\ 21'\ 45''$, tìm δ và t.

ĐS : $\delta = 14^o\ 29'\ 28''$ S, $t = 15^o\ 37'\ 21''$.

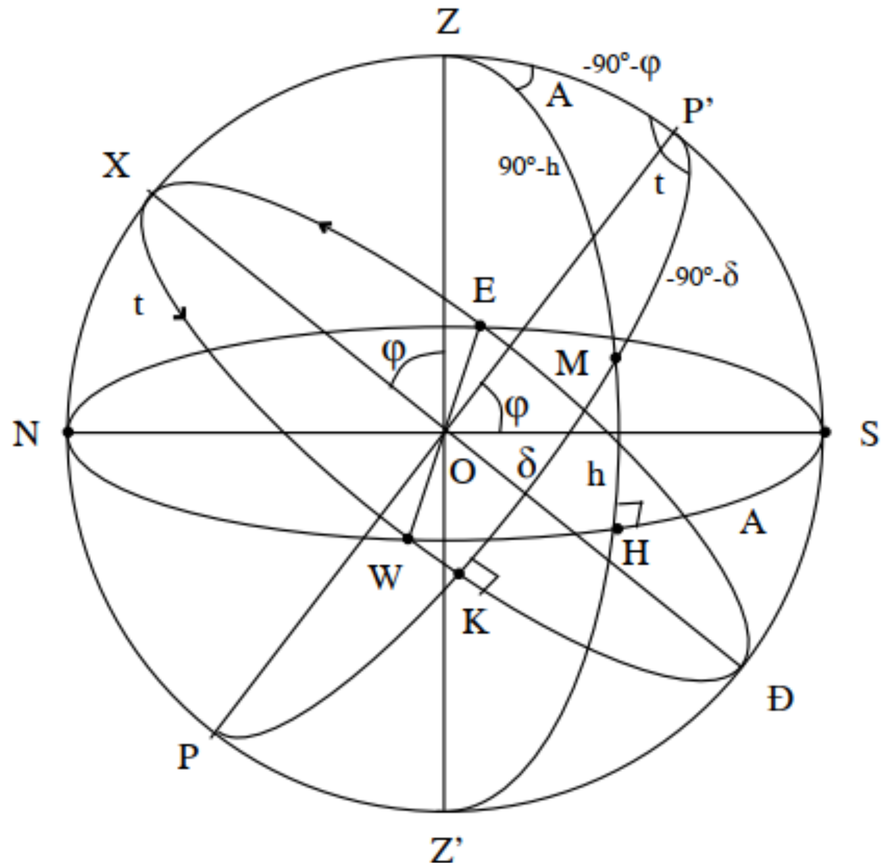
HD : Chia (14b) cho (14) ta có công thức tính t :

$$\text{ctg}t \sin A = \cos\varphi\, \text{tg}h + \sin\varphi \cos A$$

7.4. Cho $\varphi = 50^o\ 27'\ 12''$ N, $\delta = 28^o\ 51'\ 26''$ N, $t = 105^o\ 21'\ 06''$, tìm h và A.

ĐS : $h = 12^o\ 58'\ 29''$, $A = 119^o\ 55'\ 21''$.

7. BÀI TẬP



Thứ tự	Tọa độ cho trước	Xác định	Đáp số
1	$\varphi = 60^0$ N, $h = 45^0$, $A = 135^0$	δ và t	$\delta = 60^0$ N , $t = 90^0$
2	$\varphi = 38^0$ N, $h = 47^0$, $A = 284^0$	δ và t	$\delta = 20^0$ N , $t = 316^0$
3	$\varphi = 57^0$ S, $h = 38^0$, $A = 254^0$	δ và t	$\delta = 23^0$ S , $t = 304^0$