

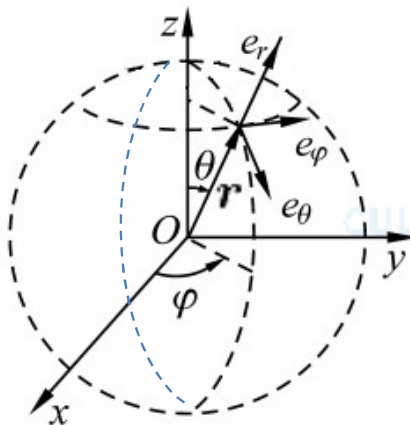
Mô-men động lượng
Angular momentum

Cơ cổ điển

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [4.95]$$

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad [4.96]$$

Tọa độ cầu



Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \quad [4.13a]$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

Tọa độ cầu

- PT Schroedinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2mr^2} L^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right. \\ & \quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V(r)\psi = E\psi \end{aligned}$$

Cơ lượng tử

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \quad \begin{matrix} L_x = yp_z - zp_y, \\ L_y = zp_x - xp_z, \\ L_z = xp_y - yp_x \end{matrix} \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] \\ &\quad - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned} \quad [4.97]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] \\ &= i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z \end{aligned} \quad [4.98]$$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z; \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x; \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y. \end{aligned} \quad [4.99]$$

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar L_z \rangle \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle L_z \rangle^2$$

$$\sigma_{L_x} \sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle| \quad [4.100]$$

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad [4.101]$$

$$[L^2, L_x] = ???$$

$$\begin{aligned}
 [L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
 &= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y \\
 &\quad + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
 &= L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y \\
 &\quad + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \quad [4.103]$$

$$[L^2, L_x] = 0, [L^2, L_y] = 0, [L^2, L_z] = 0 \quad [4.102]$$

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0 \quad [4.103]$$

→ Mỗi thành phần của $\mathbf{L}$ có cùng hàm riêng với L^2
 (Mỗi thành phần của $\mathbf{L}$ có thể được chéo hóa với L^2)

Những thành phần của $\mathbf{L}$ không giao hoán với nhau → có thể chọn CHỈ 1 thành phần để chéo hóa với L^2 .

Người ta quy ước chọn thành phần L_z

Trị riêng của mô-men động lượng

Tìm hàm riêng chung của L^2 và L_z

$$L^2 f = \lambda f \quad \text{và} \quad L_z f = \mu f \quad [4.104]$$

Toán tử “bậc thang”

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y \quad [4.105]$$

$$\begin{aligned}
 [L_z, L_{\pm}] &= [L_z, L_x \pm iL_y] \\
 &= [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] \\
 &= i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) \\
 &= \pm\hbar(L_x \pm iL_y)
 \end{aligned}$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad [4.106]$$

$$[L^2, L_{\pm}] = ?$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad [4.107]$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad [4.107]$$

Xét f là hàm riêng của L^2 : $L^2 f = \lambda f$
 $\Rightarrow L^2(L_{\pm} f) = L_{\pm}(L^2 f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm} f)$ [4.108]
 $\rightarrow f$ và $L_{\pm} f$ đều là HR của L^2 với cùng TR λ

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm} \quad [4.106]$$

Xét f là hàm riêng của L_z : $L_z f = \mu f$
 $L_z(L_{\pm} f) = (L_z L_{\pm} - L_{\pm} L_z) f + L_{\pm} L_z f$
 $= \pm \hbar L_{\pm} f + L_{\pm}(\mu f)$ [4.109]
 $= (\mu \pm \hbar)(L_{\pm} f)$

$L_{\pm} f$ là HR của L_z với TR $(\mu \pm \hbar)$

$$L_z(L_+ f) = (\mu + \hbar)(L_+ f)$$

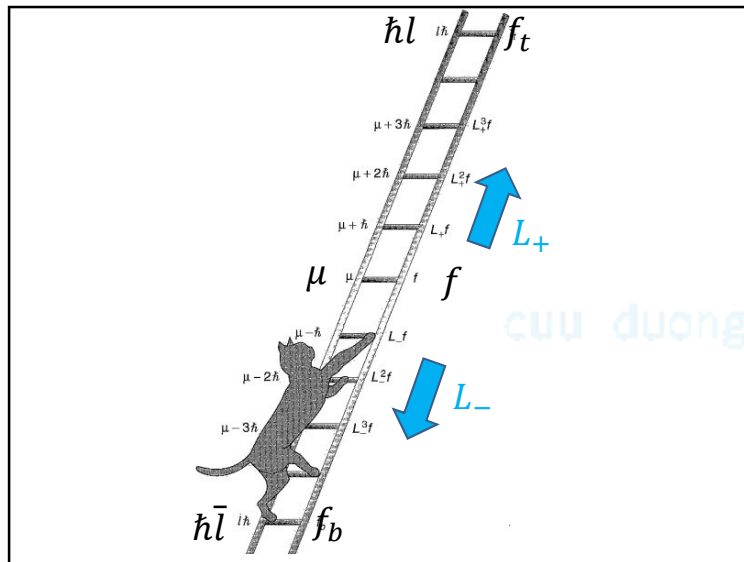
$\rightarrow L_+$ được gọi là toán tử “tăng” vì nó làm cho TR của L_z tăng thêm $\hbar$

$$L_z(L_- f) = (\mu - \hbar)(L_- f)$$

$\rightarrow L_-$ được gọi là toán tử “giảm” vì nó làm cho TR của L_z giảm đi $\hbar$

Mỗi $\lambda \rightarrow$ “thang” các trạng thái. Mỗi nấc thang cách nhau $\hbar$.

Leo lên bằng toán tử tăng L_+ . Leo xuống bằng toán tử giảm L_- .



Có thể leo lên/xuống đến khi nào? vô hạn?

$$\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \Leftrightarrow \lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2$$

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle = \langle L_x f | L_x f \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2$$

$\rightarrow$ Trị riêng μ của L_z bị chặn.

$\rightarrow$ Tồn tại bậc (trạng thái) cao nhất f_t

$$L_+ f_t = 0 \quad [4.110]$$

Gọi $h l$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_t :

$$L_z f_t = \hbar l f_t; \quad L^2 f_t = \lambda f_t \quad [4.111]$$

$$\begin{aligned}
 L_{\pm} L_{\mp} &= (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) \\
 &= L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x) \\
 &= L^2 - L_z^2 \mp i(\hbar L_z)
 \end{aligned}$$

$$L^2 = L_{\pm} L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z \quad [4.112]$$

$$\begin{aligned}
 L^2 f_t &= (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t \\
 &= (\mathbf{0} + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l) f_t \\
 &= \hbar^2 l(l+1) f_t
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \quad [4.113]$$

Tồn tại bậc (trạng thái) thấp nhất f_b

$$L_- f_b = 0 \quad [4.114]$$

Gọi $\hbar \bar{l}$ là TR của L_z ứng với trạng thái f_b :

$$L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b ; \quad L^2 f_b = \lambda f_b \quad [4.115]$$

$$\begin{aligned}
 L^2 f_b &= (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_b \\
 &= (\mathbf{0} + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) f_b = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) f_b
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) \quad [4.116]$$

$$\lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) \quad [4.116]$$

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1) \quad [4.113]$$

$$\Rightarrow \bar{l} = -l \text{ hoặc } \bar{l} = l+1$$

$$\Rightarrow \bar{l} = -l \quad [4.117]$$

$$\text{Loại } \bar{l} = l+1$$

Vì $\bar{l} \leq l$: bậc dưới không thể cao (lớn) hơn bậc trên

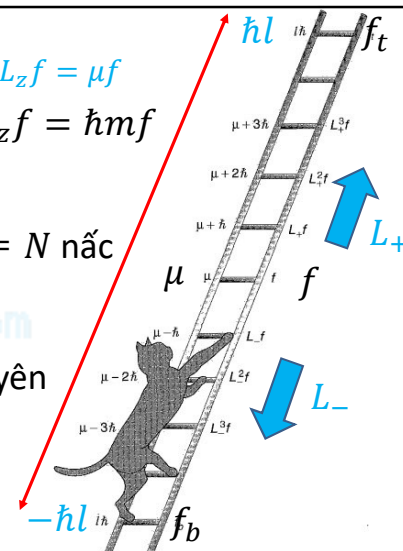
THANG λ

$$L_z f = \mu f$$

$$L_z f = \hbar m f$$

$$l = \frac{N}{2} \Leftarrow N \text{ nấc}$$

l là số nguyên hoặc bán nguyên

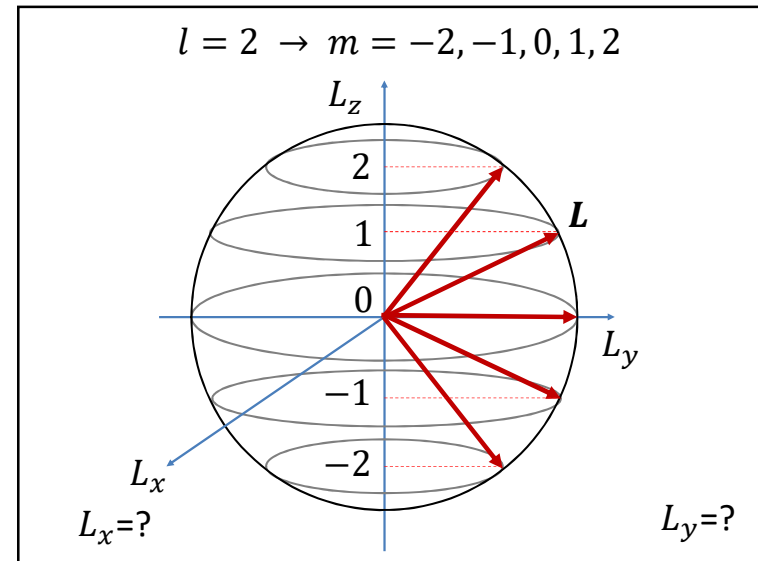


$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m; \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m \quad [4.118]$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad [4.119]$$

l cho trước $\rightarrow 2l+1$ giá trị của m ($2l+1$ bậc thang)

Ví dụ: $l = 2 \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$



Bài tập nhỏ

Chứng minh

- a) L_x, L_y là các toán tử hermit
- b) $L_{\mp}$ là toán tử liên hiệp hermit của $L_{\pm}$

$$\langle f | L_x g \rangle = \langle L_x f | g \rangle$$

$$\langle f | L_{\pm} g \rangle = \langle L_{\mp} f | g \rangle$$

Tọa độ cầu

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \quad [4.13a]$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

Hàm riêng

$$f_l^m = Y_l^m$$

Bài tập 4.18

$$L_{\pm} f_l^m = (A_l^m) f_l^{m \pm 1} \quad [4.120]$$

Tìm A_l^m

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \\ &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \end{aligned} \quad [4.121]$$

Dùng công thức [4.112]

Bài tập 4.19

$$\begin{aligned} [r_i, p_j] &= -[p_j, r_i] = i\hbar \delta_{ij}, [r_i, r_j] = [p_i, p_j] = 0 \\ i, j &= x, y, z. \quad r_x = x, r_y = y, r_z = z \end{aligned} \quad [4.10]$$

CM:

$$\begin{aligned} [L_z, x] &= i\hbar y, \\ [L_z, y] &= -i\hbar x, \\ [L_z, z] &= 0, \\ [L_z, p_x] &= i\hbar p_y, \\ [L_z, p_y] &= -i\hbar p_x, \\ [L_z, p_z] &= 0. \end{aligned} \quad [4.122]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left(\frac{\hbar}{i}\right) (\mathbf{r} \times \nabla) = \left(\frac{\hbar}{i}\right) (r\hat{r} \times \nabla) \\ \nabla &= \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad [4.123] \\ \mathbf{L} &= \frac{\hbar}{i} \left[r(\hat{r} \times \hat{r}) \frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r} \times \hat{\theta}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{r} \times \hat{\phi}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ (\hat{r} \times \hat{r}) &= 0, (\hat{r} \times \hat{\theta}) = \hat{\phi}, (\hat{r} \times \hat{\phi}) = -\hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{i} \left[\hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad [4.124]$$

$$\hat{\theta} = (\cos \theta \cos \phi) \hat{i} + (\cos \theta \sin \phi) \hat{j} - (\sin \theta) \hat{k} \quad [4.125]$$

$$\hat{\phi} = -(\sin \phi) \hat{i} + (\cos \phi) \hat{j} \quad [4.126]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{\hbar}{i} [(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad - (\cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}] \end{aligned}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.127]$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left(+\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.128]$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad [4.129]$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$

$$= \frac{\hbar}{i} \left[(-\sin \phi \pm i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\cos \phi \pm i \sin \phi) \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.130]$$

$$L_+ L_- = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad [4.131]$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad [4.132]$$

$$L^2 f_l^m$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f_l^m$$

$$= \hbar^2 l(l+1) f_l^m$$

$$L_z f_l^m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m = \hbar m f_l^m$$

$$H\psi = E\psi$$

$$L^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi \quad [4.133]$$

$$L_z \psi = \hbar m \psi$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad [4.119]$$

PT Schroedinger (

$$\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2mr^2} L^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad [4.14a]$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l \quad [4.29]$$

Tọa độ cầu + giải tích

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

Đại số (Tổng quát hơn)

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$