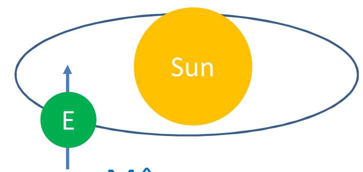
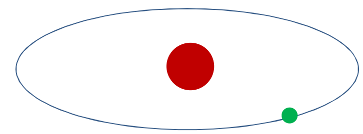
Spin

Classical | QM





Mô-men động lượng quỹ đạo | Mô-men động lượng quỹ đạo

Spin | Spin

Spin

- Electron có spin ($\boldsymbol{S}$)
- Spin không liên quan đến không gian !
- Đặc trưng cho tính chất nội tại của hạt
- → mô-men động lượng bên trong ($\boldsymbol{S}$) và mô-men động lượng bên ngoài ($\boldsymbol{L}$)

Spin

Bài toán spin ($\boldsymbol{S}$) được xử lý tương tự như bài toán mô-men động lượng ($\boldsymbol{L}$)

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad [S_y, S_z] = i\hbar \ {}_x \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_x \qquad [4.134]$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y.$$

$$S^2|s\ m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\ m\rangle$$

$$S_z|s\ m\rangle = \hbar m|s\ m\rangle \quad [4.135]$$

$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi$$

$$L_z\psi = \hbar m\psi$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots; \quad m = -l, \dots, l$$

$$s = ?; \quad m = ?$$

Spin

Không phụ thuộc vào không gian (góc quay)

→ Không loại trừ các giá trị bán nguyên của s

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots; \quad m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s \qquad [4.137]$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots; \quad m = -l, \ldots, l$$

Hàm riêng

$$f_l^m = Y_l^m$$

Bài tập 4.18

$$L_\pm f_l^m = (A_l^m) f_l^{m\pm 1} \qquad [4.120]$$

Tìm A_l^m

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \qquad [4.121]$$

Dùng công thức [4.112]

Spin

$$S_\pm |s\ m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\,|s\ (m\pm 1)\rangle \qquad [4.136]$$

$$S_\pm \equiv S_x \pm i S_y.$$

Spin

- ✓Mỗi hạt cơ bản có spin riêng và không thể thay đổi !
- ✓Spin là một số lượng tử đặc trưng cho hạt
- ✓Số lượng tử mô-men bên ngoài (l) có thể nhận giá trị (nguyên) nào đó và thay đổi khi hệ bị nhiễu loạn
- ✓Số lượng tử mô-men bên trong (s) cố định đối với 1 hạt đã cho

Hạt với spin $s = 1/2$

✓Protons, neutrons, electrons

✓Quarks và leptons

Hạt với spin $s = 1/2$

$|s\ m\rangle$: $s = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

→ Có hai trạng thái được gọi là spin up và down:

Spin up (↑): $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ Spin down (↓): $\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$

Thay cho bra/ket $|s\ m\rangle$ có thể dùng spinor (ma trận cột) để mô tả trạng thái spin tổng quát:

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139]$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [4.140] \quad \text{Spin up } (\uparrow)$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [4.141] \quad \text{Spin up } (\downarrow)$$

Cần xác định toán tử $\mathbf{S}^2$ và S_z

Sử dụng các tính chất của các toán tử sau đây

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$ [4.134]

$[S_z, S_x] = i\hbar S_x$

$S^2|s\ m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\ m\rangle$

$S_z|s\ m\rangle = \hbar m|s\ m\rangle$ [4.135]

$S_\pm|s\ m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s\ (m\pm 1)\rangle$ [4.136]

$S_\pm \equiv S_x \pm iS_y.$

$S^2|s\ m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\ m\rangle$

Ta có: $\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+$ và $\mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-$ [4.142]

Toán tử $\mathbf{S}^2$ là ma trận 2 × 2.

Gọi $\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$\mathbf{S}^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_+$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{S}^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [4.143]$$

$S_z|s\ m\rangle = \hbar m|s\ m\rangle$

$$\mathbf{S}_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_- \quad [1.144]$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad [4.145]$$

$$S_\pm|s\ m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm1)}|s\ (m\pm1)\rangle \quad [4.136]$$

$S_\pm \equiv S_x \pm iS_y.$

$$\mathbf{S}_+\chi_- = \hbar\chi_-, \mathbf{S}_-\chi_+ = \hbar\chi_-, \mathbf{S}_+\chi_+ = \mathbf{S}_-\chi_- = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{S}_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad [4.146]$$

$S_\pm = S_x \pm iS_y$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(S_+ + S_-)}{2} \text{ và } S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad [4.147]$$

Có thể viết: $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$

$\boldsymbol{\sigma}$ là ma trận Pauli với các thành phần cho bởi:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

[4.148]

Chú ý: $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ và $\mathbf{S}^2$ là các toán tử hermit vì chúng biểu thị cho các đại lượng có thể khảo sát. $\mathbf{S}_\pm$ không hermit.

$$\mathbf{S}_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \quad \mathbf{S}_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_- \quad [1.144]$$

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad [4.145]$$

Trạng thái riêng (hàm riêng/spinor riêng) của $\mathbf{S}_z$ là

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } +\frac{\hbar}{2}\right); \quad [1.149]$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } -\frac{\hbar}{2}\right)$$

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } +\frac{\hbar}{2}\right)$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng } -\frac{\hbar}{2}\right)$$

$$\chi = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad [4.139]$$

→ Nếu đo giá trị S_z trên hạt ở trạng thái tổng quát χ thì có thể thu được giá trị $+\frac{\hbar}{2}$ với xác suất $|a|^2$ hoặc $-\frac{\hbar}{2}$ với xác suất $|b|^2$.

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad [4.150]$$

Hạt spin ½ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_z

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_z thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Nếu đo giá trị S_x thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của $\mathbf{S}_x$:

$$\mathbf{S}_x f = \lambda f \qquad \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right] f = 0$$

Để PT có nghiệm thì định thức của nó phải = 0

$$\begin{vmatrix}-\lambda & \hbar/2\\ \hbar/2 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Hàm riêng (spinor riêng) được xác định qua

$\mathbf{S}_x f = \lambda f \qquad \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2} \qquad f = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

→ $\beta = \pm\alpha$

→ Spinor riêng:

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2}\right)$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2}\right) \qquad [1.451]$$

Spinor tổng quát χ cần được biểu diễn trong hệ cơ sở $\chi_+^{(x)}$ và $\chi_-^{(x)}$

[1.451] cho $\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_-$

$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_-$

$$\Rightarrow \chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(x)} + \chi_-^{(x)}\right)$$

và: $\chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(x)} - \chi_-^{(x)}\right)$

Trạng thái tổng quát ($\chi = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-$ [4.139])

$$\Rightarrow \chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \qquad [1.452]$$

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)} \quad [1.452]$$

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} + \frac{\hbar}{2}\right)$$

$$\chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \left(\text{trị riêng} - \frac{\hbar}{2}\right) \quad [1.451]$$

Nếu đo giá trị S_x thì xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ là $\frac{|a+b|^2}{2}$, và có được $-\frac{\hbar}{2}$ là $\frac{|a-b|^2}{2}$

Ví dụ 4.2. Hạt spin ½ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_x

Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau: Nếu đo S_x thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Nếu đo giá trị S_y thì kết quả có thể có và xác suất tương ứng là bao nhiêu?

Cần tìm hàm riêng và trị riêng của $\mathbf{S}_y$:

$$\mathbf{S}_y f = \lambda f \qquad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] f = 0$$

Để PT có nghiệm thì định thức của nó phải = 0

$$\begin{vmatrix}? & ?\\ ? & ?\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ???$$

Xin tính tiếp để tìm λ và f

BT: Hạt spin ½ ở trạng thái

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

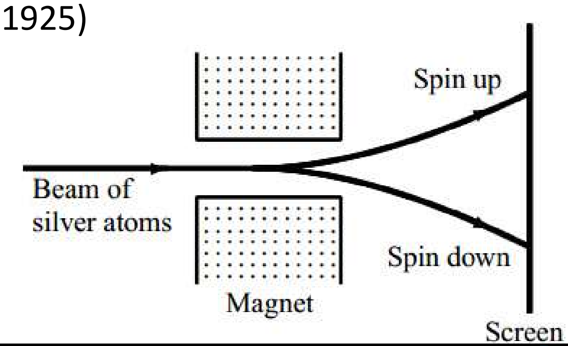
Xác suất để có được $+\frac{\hbar}{2}$ và $-\frac{\hbar}{2}$ nếu đo S_y?

(Bài toán trên có thể được hỏi theo cách khác như sau:

a) Nếu đo S_y thì thu được các giá trị khả dĩ nào và với xác suất tương ứng là bao nhiêu?)

Thí nghiệm Stern-Gerlach

- ✓Stern-Gerlach: 1922, Ag
- ✓Goudsmit &Uhlenbeck: giả thuyết spin (1925)



Thí nghiệm Stern – Gerlach (Hạt trong từ trường không đều)

Cổ điển: Dải liên tục (không tách vạch)!

Bạc có 1 electron (thứ 47) ngoài cùng ở lớp 5s

QM (Schroedinger): $2l + 1$ vạch. nếu như ở trạng thái s ($l = 0$) → 1 vạch; ở trạng thái p ($l = 1$) thì có 3 vạch!

1 electron ngoài cùng ở lớp 5s

→ Spin $s = 1/2$

SPIN: Có 2 trạng thái (ứng với 2 vạch được quan sát trong thí nghiệm của Stern-Gerlach)

Thí nghiệm Stern-Gerlach

- ✓Cổ điển: dải phổ liên tục
- ✓QM với Schroedinger: 1 chấm
- ✓Thực nghiệm: 2 vạch!
- ✓Ag: 47 e. Electron thứ 47 ở 5s => $l = 0$
- ✓Nếu ở 5p thì $l = 1$ → 3 vạch
- ✓Spin: e với spin ½ → 2 vạch